



Lehrstuhl für Materialphysik

Dissertation



Simulation der Rissausbreitung im Crash

Dipl.-Ing. Karlheinz Kunter

Dezember 2020



EIDESSTÄTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe.

Ich erkläre, dass ich die Richtlinien des Senats der Montanuniversität Leoben zu "Gute wissenschaftliche Praxis" gelesen, verstanden und befolgt habe.

Weiters erkläre ich, dass die elektronische und gedruckte Version der eingereichten wissenschaftlichen Abschlussarbeit formal und inhaltlich identisch sind.

Datum 21.12.2020

Unterschrift Verfasser/in
Karlheinz Kunter

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Simulationsmethode zur Beschreibung der Rissausbreitung in der Crashsimulation von Fahrzeugen mit dem Ziel der Integration in der expliziten Finite Element Methode (FEM) entwickelt. Vor allem bei höchstfesten Leichtbauwerkstoffen treten an der Riss Spitze hohe Spannungs- und Dehnungskonzentrationen auf, die bei derzeit verwendeten Elementgrößen nur unzureichend prognostiziert werden können. Da eine lokale Feinvernetzung zu einer starken Erhöhung der Rechenzeit führen würde, wird in dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, die benötigte, hohe Auflösung der Spannungen und Dehnungen durch die Verwendung von analytischen Lösungen des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems zu erreichen. Diese Lösungen ermöglichen die Anwendung eines lokalen, bruchmechanischen Instabilitätskriteriums zur Beschreibung des Rissfortschritts.

Für die Lösungen des linear-elastischen Rissmodells sowie des Kohäsivzonenmodells nach Dugdale werden mit der hybriden Trefftz-Methode (HTM), der Extended Finite Element Method (XFEM) und der analytischen Submodell-Methode (ASM) drei Varianten zur Kombination der analytischen Lösungen mit der FEM untersucht. Basierend auf einer impliziten Umsetzung in MATLAB[®] werden die Vor- und Nachteile der drei Varianten anhand eines einfachen stationären Mode I-Rissproblems analysiert. Verglichen mit dem Verfahren der Element-Elimination auf Basis kontinuumsmechanischer Versagens- und Schädigungsmodelle bieten alle drei Methoden eine Verbesserung der Prognosequalität bei gleichzeitig geringer Netzabhängigkeit. Da die ASM die geringste Erhöhung der Berechnungszeit mit sich bringt und sich außerdem am einfachsten in einen expliziten Crash-Code integrieren lässt, wird diese Methode zur Simulation von laufenden Rissen erweitert. Neben der Simulationsmethodik stellt die zugehörige Materialcharakterisierung einen wesentlichen Bestandteil des Gesamtkonzepts dar. Aus diesem Grund wird im Zuge der Arbeit auch eine Methode zur experimentellen Ermittlung des Risswiderstands entwickelt. Bei stabil wachsenden Rissen in dünnwandigen Blechwerkstoffen bildet der Riss Spitzenöffnungswinkel eine geeignete Kenngröße für den Risswiderstand. Die Versuche zur Ermittlung dieser Kenngröße werden exemplarisch für den Warmumformstahl 22MnB5 durchgeführt, da sich dieser Werkstoff sehr kritisch in Hinblick auf die Rissbildung und -ausbreitung verhält. Die ermittelten Versuchsergebnisse werden anschließend auf die Simulationsmethode übertragen und zur Kalibrierung der Riss Spitzenmodellierung verwendet. Abschließend wird die gesamte Methode mittels eines Software-Prototyps in Form einer gekoppelten Simulation von MATLAB[®] mit LS-DYNA[®] anhand der experimentell untersuchten einseitig gekerbten Zugproben und eines Dreipunkt-Biegeversuchs einer Fahrzeugkomponente validiert.

Abstract

The present work deals with the development of a simulation method for crack propagation in vehicle crash simulations, which is aimed to be integrated in the explicit finite element method (FEM). Especially for ultra-high strength lightweight materials, the high stress and strain concentrations occurring at the crack tip cannot be predicted with currently used element sizes. Since mesh refinement would lead to a large increase in computational time, this work investigates analytic solutions to increase the local resolution of the stress and strain fields. These solutions facilitate the use of a fracture mechanics crack propagation criterion at the crack tip. In the present work, three different variants for combining the analytical solutions with the FEM are investigated and applied for the linear-elastic crack model, and the cohesive zone model according to Dugdale. These variants are the hybrid Trefftz method (HTM), the extended finite element method (XFEM) and a submodel approach, which is referred to as the analytical submodel method (ASM) in this work. Based on an implicit implementation in MATLAB, the advantages and disadvantages of the three variants are analysed using a simple stationary mode I crack problem. Compared to the element elimination method based on continuum mechanical failure and damage models, which is currently state of the art in industrial applications, all three methods offer an improvement of the prediction quality while showing a very low mesh dependency at the same time. Since the ASM involves the least increase in computing time and is also the easiest to be integrated into an explicit crash code, this method is being further developed for the simulation of propagating cracks. In addition to the simulation methodology, the associated material characterisation is also an essential component of the overall concept. Due to this, a method for the experimental determination of the crack resistance is developed in this work. For stably growing cracks in thin-walled sheet materials, the crack tip opening angle is a suitable parameter to describe crack resistance. The tests to determine this parameter are carried out for the hot forming steel 22MnB5, as this material shows a very critical behaviour with regard to crack formation and propagation. The experimental test results are transferred to the simulation method and used to calibrate the crack tip modelling. Finally, the entire method is validated using the investigated single edge notched tensile specimens and a three-point bending test on a vehicle component. All simulations are carried out with a software prototype based on a coupling of MATLAB with LS-Dyna.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Reinhard Pippan für die hervorragende Betreuung bei der Umsetzung der vorliegenden Arbeit. Weiters möchte ich mich bei Prof. Thomas Antretter für die zügige Durchsicht des Entwurfs und die Hilfestellungen beim Abschluss der Arbeit bedanken. Unverzichtbare Hilfe bei der Entwicklung und Umsetzung der Modelle und Methoden habe ich von Thomas Heubrandtner, Bettina Suhr und Michael Koplenig erhalten, bei denen ich mich für die ausgezeichnete Zusammenarbeit bedanke. In der Zeit, die ich in Leoben verbringen durfte, habe ich mich am Erich Schmid Institut immer sehr wohl gefühlt und hatte die Möglichkeit, neben meiner Arbeit auch einen Einblick in viele weitere interessante Forschungsfelder im Bereich der Werkstoffwissenschaften zu erlangen. Dafür möchte ich mich bei allen Mitarbeitern und Doktoranden des Instituts bedanken. Abschließend bedanke ich mich bei Kerstin und meiner ganzen Familie für den liebevollen Rückhalt vor allem in der letzten Phase der Arbeit, woraus ich sehr viel Kraft schöpfen konnte.

Karlheinz Kunter

Acknowledgements

Diese Arbeit entstand an der Virtual Vehicle Research GmbH in Graz, Österreich. Der Autor bedankt sich für die Förderung im Rahmen des COMET K2 Competence Centers for Excellent Technologies durch das Österreichische Bundesministerium für Klimaschutz (BMK), das Österreichische Bundesministerium für Digitalisierung und Wirtschaftsstandort (BMDW), das Land Steiermark (Abt. 12) sowie die Steirische Wirtschaftsförderung (SFG). Das Programm wird durch die Österreichische Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG) abgewickelt. Ebenfalls dankt er den unterstützenden Firmen und Projektpartnern Audi AG, Porsche AG, VW AG und Magna Steyr Engineering AG&CoKG sowie dem Erich Schmid Institut für Materialwissenschaft der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Zielsetzung	4
1.3. Aufbau dieser Arbeit	5
2. Stand der Technik	7
2.1. Explizite Zeitschrittverfahren	7
2.1.1. Zentrale Differenzenmethode	8
2.1.2. Stabilität der Lösung und kritischer Integrationszeitschritt	9
2.2. Materialversagen in der Crash-Simulation	11
2.2.1. Duktilbruch	12
2.2.2. Einfache Versagenshypthesen	13
2.2.3. Schädigungsmechanik	14
2.3. Grenzen der Prognosequalität	22
2.3.1. Lokalisierung der Beanspruchungen	22
2.3.2. Ursachen der Lokalisierung	22
2.3.3. Methoden zur Reduktion der Netzabhängigkeit	22
3. Bruchmechanische Grundlagen	25
3.1. Beschreibung und Einteilung von Bruchvorgängen	26
3.2. Linear elastische Bruchmechanik (LEBM)	27
3.2.1. Griffith-Kriterium	28
3.2.2. K -Konzept	29
3.3. Elastoplastische Bruchmechanik (EPBM)	31
3.3.1. J -Integral	31
3.3.2. Risspitzenöffnungsverschiebung (CTOD)	34
3.3.3. Risspitzenöffnungswinkel ψ_c und Risspitzenöffnungsverschiebung δ_5	36
3.3.4. Kohäsivzonenmodelle	37
4. Konstruktion analytischer Risspitzenfelder	41
4.1. Ebene Elastizitätstheorie	41
4.1.1. Die Navier-Cauchysche Differentialgleichung	42
4.1.2. Komplexe Darstellung	43
4.2. Risspitzenmodelle	46
4.2.1. Linear-elastisches Rissmodell	47
4.2.2. Kohäsivzonenmodell nach Dugdale	51
4.2.3. Kohäsivzonenmodell mit linearer Entfestigung	56
5. Anwendung analytischer Risspitzenfelder in der FEM	63
5.1. Ebenes elastisches Rissproblem	63

5.2.	Variationsprinzipien	64
5.2.1.	Prinzip der minimalen potenziellen Energie	64
5.2.2.	Erweitertes Prinzip der potenziellen Energie	66
5.2.3.	Prinzip der minimalen Komplementärenergie	67
5.2.4.	Erweitertes Prinzip der Komplementärenergie	67
5.2.5.	Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers	67
5.3.	Hybride Trefftz-Methode (HTM)	68
5.3.1.	Hybride Trefftz-Rissspitzenelemente	69
5.3.2.	Auffinden der FE-Lösung	73
5.4.	Analytische Submodelltechnik (ASM)	74
5.4.1.	Mapping der Randbedingungen	74
5.4.2.	Größe des Submodellbereichs	77
5.5.	Extended Finite Element Method (XFEM)	79
5.5.1.	Rissspitzenanreicherung	80
5.5.2.	Auffinden der FE-Formulierung	81
5.6.	Umsetzung und Verifikation	84
5.6.1.	Testkonfiguration	84
5.6.2.	Hybride Trefftz-Methode	85
5.6.3.	Analytische Submodelltechnik	89
5.6.4.	Extended Finite Element Method	92
5.7.	Diskussion und Schlussfolgerungen	95
6.	Bruchmechanische Materialcharakterisierung	97
6.1.	Materialcharakterisierung	98
6.1.1.	Wärmebehandlung	98
6.1.2.	Überprüfung der Materialkennwerte	99
6.2.	Probenherstellung und Präparation	100
6.3.	Versuchsbeschreibung	100
6.4.	Versuchsergebnisse	104
6.4.1.	Auswertemethodik	104
6.4.2.	Auswertungsergebnisse	106
6.4.3.	Diskussion und Schlussfolgerung	107
7.	Rissfortschritt in der Crash-Simulation	109
7.1.	Implizite HTM-Simulation einer SEN(T)-Probe	109
7.1.1.	Simulationsablauf	110
7.1.2.	Simulationsmodell	110
7.1.3.	Ergebnisse	112
7.2.	Explizite ASM-Simulation	114
7.2.1.	Simulationsablauf	114
7.2.2.	Simulation der SEN(T)-Versuche	117
7.2.3.	Komponentenversuch	119
7.3.	Diskussion und Ausblick	122
8.	Zusammenfassung	125

A. Untersuchung der Netzabhängigkeit	129
A.1. Einfluss von Geometrie und Netzdiskretisierung	129
A.1.1. Hybride Trefftz-Methode (HTM)	129
A.1.2. Analytische Submodelltechnik (ASM)	132
A.2. Einfluss von Netzunregelmäßigkeit	135
B. Umsetzung des ASM durch Software-Kopplung	137
B.1. Ablauf der Simulation	137
B.2. Softwarestruktur	140

Abbildungsverzeichnis

1.1. Eingesetzte Leichtbauwerkstoffe in der Karosserie des Volkswagen Touareg 2019 [117]	2
1.2. Charakteristische Spannungs-Dehnungs-Verläufe verschiedener Kategorien von Stahlwerkstoffen und deren Einsatzbereiche im Fahrzeug nach [19, S. 19].	3
1.3. Rissinitiierung an Widerstandspunktschweißverbindungen (WPS) unter ebener Zugbeanspruchung	4
2.1. Phasen des Duktilbruchs, Abbildungen stammen aus [1, S. 224] .	12
2.2. Rasterelektronenaufnahme der Bruchfläche eines häufig verwendeten höherfesten Karosseriebaustahls des Typs H340LAD (Bezeichnung nach DIN/EN)	13
3.1. Bruchmechanisches Bewertungskonzept	25
3.2. Gundlegende Rissöffnungsmodi in der Bruchmechanik	27
3.3. Innenriss in einer unendlich ausgedehnten Platte unter uniaxialer Zugspannung (Griffith-Riss)	28
3.4. Zur Erläuterung der K -dominierten Zone für einen Mode I Riss .	30
3.5. Zur Definition des J -Integrals	32
3.6. Zur Definition der Rissöffnungsverschiebung δ_t	34
3.7. Rissöffnungsverschiebung für Kleinbereichsfließen nach dem Modell der Risslängenkorrektur nach Irwin	34
3.8. Rissöffnungsverschiebung für das Modell einer streifenförmigen plastischen Zone (strip yield model)	35
3.9. Zur Definition der Rissspitzenöffnungsverschiebung (CTOD) . . .	35
3.10. Zur Definition der Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 und des Rissspitzöffnungswinkels ψ_{CTOA}	36
3.11. Beschreibung des Duktilbruchs mit Hilfe des Kohäsivzonenmodells	37
3.12. Beispiele für Kohäsivgesetze	38
4.1. Zweidimensionaler elastischer Körper im ebenen Spannungszustand (Lösungsgebiet Ω). Die Dirichlet-Randbedingung auf Γ_0 und Neumann-Randbedingung auf Γ_1 wirken nur in der Ebene, d.h. die Komponenten in x_3 -Richtung verschwinden.	42
4.2. Erzeugung einer halbseitig offenen Rissgeometrie in der komplexen z -Ebene durch Faltung mit Hilfe einer konformen Abbildung $f(\zeta) = -\zeta^2$ aus der oberen Halbebene.	47

4.3. Dugdale Model: Durch die konforme Abbildung $z = -r_D(\zeta^2 - 1)$ wird die Rissgeometrie aus der oberen komplexen Halbebene erzeugt. Die streifenförmige plastische Zone nimmt in der ursprünglichen Konfiguration das Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen Achse ein.	51
4.4. Real- und Imaginärteile der ersten Ordnung der Funktionenbasis $\hat{W}_n(\zeta)$ mit beiden Riemannschen Blättern. Es ist zu erkennen, dass nur ein Blatt in der komplexen Ebene beschränkt bleibt, während für das andere Blatt sowohl Real- als auch Imaginärteil für $\xi, \eta \rightarrow \pm\infty$ gegen $\pm\infty$ streben. Diese Beschränktheit auf \mathbb{C} ist eine notwendige Eigenschaft der Basisfunktionen, aufgrund derer nur diese Blätter zur Approximation der Randbedingungen herangezogen werden.	53
4.5. Real- und Imaginärteile der ersten drei Ordnungen der holomorphen Basisfunktionen $\hat{W}_n(\zeta)$, wobei $\zeta = \xi + i\eta$ das konform abgebildete Lösungsgebiet ist.	54
4.6. Real- und Imaginärteil des inhomogenen Anteils des Potentials $\phi_p(\zeta)$ zur Befriedigung der konstanten Krastranddichte am Rissufer (Dugdale-Modell)	55
4.7. Kohäsivgesetz mit linearer Entfestigung, ausgehend von einer maximalen Randkraftdichte τ_c nimmt die Randkraftdichte mit zunehmender Rissaufweitung bis zur Dekohärenzlänge δ_c linear auf 0 ab.	57
5.1. Lösungsgebiet Ω mit einer Aufteilung in zwei Teilgebiete Ω_0 und Ω_1 . In der Umgebung der Rissspitze Ω_1 werden die analytischen Rissspitzenfelder verwendet. Das übrige Gebiet Ω_0 bleibt vom Riss unbeeinflusst.	64
5.2. Lösungsgebiet Ω mit einer Unterteilung in zwei Teilgebiete. Die Umgebung der Rissspitze Ω_1 wird mit einem speziellen Element und die übrige Umgebung mit konventionellen Finiten Elementen modelliert. Am äußeren Rand wird eine Dirichlet-Randbedingung angenommen, während auf den Rissufern Γ_1 die Lösung einer Neumann-Randbedingung genügen muss, die durch die Randkraftdichte τ vorgegeben wird. Der Normalenvektor auf die Rissufer wird mit n und der Rand zwischen den beiden Lösungsgebieten wird mit Γ_2 bezeichnet.	70
5.3. Lösungsgebiet Ω mit einem Submodellbereich um die Rissspitze Ω_1 . Auf dem Rand Γ_2 werden die Randbedingungen aus dem Gesamtmodell auf das Submodell übertragen.	75
5.4. Prinzipdarstellung der XFEM. Während Knoten an durchgerissenen Elementen mit Stufenfunktionen angereichert werden, verwendet man an der Rissspitze spezielle Funktionen, die das Bruchverhalten charakterisieren.	79

5.5.	Vergleich der von-Mises-Spannungen σ_v für das linear elastische Rissmodell unter Mode I Belastung für: (a) ein hochaufgelöstes Standard-FE-Netz und (b) ein hybrides Trefftz-Element mit Ordnung $N = 9$	86
5.6.	Verifikation der hybriden Trefftz-Methode (HTM) für das linear-elastische Rissmodell anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang: (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers, (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 8$ mm.	87
5.7.	Vergleich der von-Mises-Spannung σ_{mises} für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale unter Mode I Belastung, berechnet mit: (a) hochaufgelöster Standard-FE-Simulation und (b) hybridem Trefftz-Element.	88
5.8.	Verifikation der hybriden Trefftz-Methode (HTM) für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang: (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers, (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.	88
5.9.	Vergleich der von-Mises-Spannungen σ_{mises} für das linear elastische Rissmodell unter Mode I Belastung für: (a) FE-Simulation und (b) Analytische Submodellsimulation.	90
5.10.	Verifikation des Analytischen Submodells (ASM) für das linear-elastische Rissspitzenmodell anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang: (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers, (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 8$ mm.	91
5.11.	Von-Mises-Spannung in der Umgebung der Rissspitze für (a) FE-Simulation und (b) Analytische Submodellsimulation.	91
5.12.	Verifikation des Analytischen Submodells (ASM) für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang: (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers, (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.	92
5.13.	Von-Mises-Spannung in der Umgebung der Rissspitze für (a) FE-Simulation und (b) XFEM-Simulation.	93
5.14.	Verifikation der XFEM-Implementierung für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang: (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers, (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.	94
6.1.	Fließkurven aus den Zugversuchen für 22MnB5.	99
6.2.	Skizze der verwendeten einseitig gekerbten Zugprobe.	100
6.3.	Erklärung des Zusammenhangs zwischen Rissöffnungswinkel ψ_c und Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 [105].	101
6.4.	Prinzipdarstellung der Versuchsdurchführung und Messmethodik.	102

6.5.	Bestimmung der Rissspitzenöffnungsverschiebung CTOD δ_5 mit Hilfe der digitalen Bildkorrelation.	103
6.6.	Risswiderstandskurven der einseitig gekerbten Zugproben für die Rissspitzenöffnungsverschiebung CTOD δ_5 bei unterschiedlichen Anfangsriszlängen (inklusive Kerb)	105
6.7.	Auswertung der gemessenen $\delta_5 - \Delta a$ -Risswiderstandskurven und (a) Parametrierung der Modellfunktion (b) Ermittlung eines kritischen Rissöffnungswinkels ψ_{δ_5}	105
6.8.	$\delta_5 - \Delta a$ -Risswiderstandskurven der einseitig gekerbten Zugversuche, ermittelt durch Anpassung der Modellfunktion (6.3) an die Ergebnisse der Messreihen mit unterschiedlichen Anfangsriszlängen.	106
6.9.	Rissöffnungswinkel ψ_{δ_5} aus den Messreihen der einseitig gekerbten Zugversuche mit unterschiedlichem Anfangsriszlängen.	106
7.1.	Möglichkeiten zur Auswertung des Rissöffnungswinkels in der Simulation.	109
7.2.	Ablauf der impliziten Simulation des SEN(T)-Versuchs bei vorgegebener δ_5 -R-Kurve.	111
7.3.	Ausschnitt des FE-Netzes mit einem Trefftz-Element im Rissspitzenbereich zur Simulation des Risswachstums	111
7.4.	Ergebnis der impliziten Simulation bei Vorgabe der δ_5 -R-Kurve.	112
7.5.	Spannungsplot der Vergleichsspannung in drei unterschiedlichen Phasen der Rissausbreitung.	112
7.6.	Ergebnis der impliziten Simulation für (a) Rissöffnungswinkel $\psi_{c,4P}$ (b) Rissöffnungsverschiebung δ_t	113
7.7.	Approximation der $\psi_{c,4P}$ -R-Kurve zur Verwendung in der expliziten Simulation.	114
7.8.	Auffinden des Element-Patches zur Festlegung des ASM-Randes (Integrationspfad) und zur Rekonstruktion der Randspannung mit Hilfe des Superconvergent Patch Recovery-Verfahrens (SPR).	115
7.9.	Beispiel für das Ergebnis des Einebnens (Flattenings).	117
7.10.	Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und Standard-FE-Simulation für unterschiedliche Netzdiskretisierungen.	117
7.11.	Zum Ablauf der expliziten Simulation des Rissfortschritts in einer SEN(T)-Probe mit einem ASM, wobei (a)–(c) die Testelemente (orange) und ASM-Patches (grün) und (d)–(f) die analytischen Lösungen der Vergleichsspannungen bei den angegebenen Riszlängen zeigen.	118
7.12.	Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und ASM-Simulationen für zwei unterschiedliche Netzdiskretisierungen (2 mm und 4 mm).	119
7.13.	Dreipunktbiegeversuch des Türaufprallträgers mit eingebrachtem Sägeschnitt mit 6 mm Länge, bezogen auf den Mittelpunkt des Übergangs von Flansch zu Bauteil-Flanke.	120

7.14. FE-Modell für den Dreipunkt-Biegeversuch mit geschwächtem Türaufprallträger mit 2.5 mm-Netzdiskretisierung.	120
7.15. Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und Standard-FE-Simulation bei zwei unterschiedlichen Netzdiskretisierungen (2.5 mm-Netz und 5 mm-Netz).	120
7.16. Ablauf der expliziten Simulation des Dreipunkt-Biegeversuchs mit dem Türaufprallträger.	121
7.17. Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und ASM-Simulation mit zwei unterschiedlichen Netzdiskretisierungen (2.5 mm-Netz und 5 mm)-Netz.	122
A.1. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der HTM-Simulationen für das linear elastische Rissmodell bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) sowie der Größe des Trefftz-Elementbereichs (5x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm) . . .	130
A.2. Simulationsergebnisse (HTM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) und der Größe des Trefftz-Elementbereichs (5x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm).	130
A.3. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises Spannungen der HTM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) sowie der Größe des Trefftz-Elementbereichs (10x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm)	131
A.4. Simulationsergebnisse (HTM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) und der Größe des Trefftz-Elementbereichs (10x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm).	131
A.5. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der ASM-Simulationen für das linear-elastische Risspitzenmodell bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).	133
A.6. Simulationsergebnisse (ASM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) und der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).	133
A.7. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der ASM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).	134

A.8. Simulationsergebnisse (ASM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).	134
A.9. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen von ASM-Simulationen für das linear-elastische Risspitzenmodell bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.	135
A.10. Simulationsergebnisse (ASM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.	135
A.11. Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen von ASM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.	136
A.12. Simulationsergebnisse (ASM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 für drei unterschiedliche starke Netzunregelmäßigkeiten.	136
B.1. Ablauf der Initialisierungsphase im ersten Berechnungszyklus nach Start des FE-Solvers.	138
B.2. Ablauf eines Auswertezyklus mit der Darstellung der Informationen, die zwischen MATLAB [®] und LS-DYNA [®] ausgetauscht werden.	139
B.3. Übersicht der wichtigsten MATLAB [®] -Klassen für die Implementierung der ASM	140

Tabellenverzeichnis

5.1. Einteilung der verwendeten Variationsprinzipien	65
5.2. Geometrie, Materialdaten und Belastung der Zugprobe mit einseitigem Riss zur numerischen Verifikation	84
5.3. Vergleich der mittels HTM berechneten Spannungsintensitätsfaktoren für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen	87
5.4. Vergleich der Rissspitzenöffnungsverschiebungen für unterschiedliche Netzgrößen und damit verbundenen Ordnungen der Trefftz-Lösungen	89
5.5. Vergleich der mittels ASM berechneten Spannungsintensitätsfaktoren für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen	90
5.6. Vergleich der mittels ASM berechneten Rissspitzenöffnungsverschiebungen für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen	92
6.1. Übersicht der Materialeigenschaften und Prozessparameter für die Probenvorbereitung des Warmumformstahls 22MnB5 [2].	98
6.2. Ergebnisse der Zugversuche des Warmumformstahls 22MnB5 [2].	99
6.3. Messerergebnisse für den Rissöffnungswinkel ψ_c nach [125]. Die Beifügung T-L bezeichnet eine senkrecht zur Walzrichtung stehende Lastrichtung und L-T eine parallel zur Walzrichtung liegende Last.	107

Abkürzungen

AHSS	Advanced High Strength Steel
ASM	Analytisches Submodell
BEM	Boundary Element Method
C(T)	Compact Tension
CAE	Computer Aided Design
CTOA	Crack Tip Opening Angle
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
DIC	Digital Image Correlation
EFG	Element Free Galerkin
EPBM	Elastisch-plastische Bruchmechanik
eWEZ	entfestigte Wärmeeinflußzone
EWK	ESI-Wilkins-Kamoulakos
FDS	Flow Drill Screw
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
GISSMO	Generalised Incremental Stress State dependent Model
GTN	Gurson Tveergard Needleman
HRR	Hutchinson Rice Rosengren
HTE	Hybrides Trefftz-Element
HTM	Hybride Trefftz-Methode
JC	Johnson Cook
LEBM	Linear-elastische Bruchmechanik
M(T)	Middle Cracked Tension
MMC	Modified Mohr Coulomb
MPI	Message Parsing Interface
MPP	Massive Parallel Computing
PUM	Partition of Unity Method
SEN(T)	Single Edge Cracked Tension
SMP	Shared Memory Processing
SPR	Superconvergent Stress Recovery
TCP/IP	Transmission Control Protocol/Internet Protocol
TE	Trefftz-Element
UHSS	Ultra High Strength Steel
WPS	Widerstandspunktschweißung
XFEM	Extended Finite Element Method

1. Einleitung

Der Klimawandel stellt die Automobilindustrie vor die große Herausforderung, die Emission von Treibhausgasen drastisch zu reduzieren. Um die Wende zu einer ökologisch nachhaltigen Industrie zu schaffen, reicht die Einführung alternativer Antriebskonzepte als alleinige Maßnahme nicht aus, da ein maßgeblicher Anteil des Ressourcen- und Energiebedarfs bereits im Entwicklungs- und Produktionsprozess anfällt. Eine durchgängige Virtualisierung des Entwicklungsprozesses eröffnet die Möglichkeit, trotz steigender Sicherheitsanforderungen und vergrößerter Variantenvielfalt, die Zahl realer Prototypen zu reduzieren und trägt somit dazu bei, Zeit und Kosten stark zu reduzieren. Die Grundlage für einen effizienten virtuellen Funktionsauslegungsprozess bilden Software-Werkzeuge, die bereits in einem frühen Stadium über eine hohe Prognosequalität verfügen. Eine zentrale Rolle spielt dabei die Simulation der gesetzlich vorgeschriebenen Crashlastfälle. Das wichtigste Simulationswerkzeug für diesen hochdynamischen Vorgang ist die explizite Finite Elemente Methode. Trotz vieler Weiterentwicklungen in den letzten Jahren, wie der Entwicklung neuer verbesserter schädigungsmechanischer Modelle oder adaptiver Netzverfeinerung, ist die akkurate Abbildung des Bauteilversagens auf Gesamtfahrzeugebene nach wie vor eine große Herausforderung.

1.1. Motivation

Der Einsatz moderner Leichtbauwerkstoffe und neuer innovativer Verbindungstechniken führt zu einer erhöhten Materialvielfalt und Komplexität in aktuellen Fahrzeugkarosserien. Abb. 1.1 zeigt am Beispiel des VW Touareg in der Baureihe 2019 die unterschiedlichen Werkstoffe, die in dieser Karosserie zum Einsatz kommen. Während in der ersten Dekade dieses Jahrhunderts der Fahrzeugleichtbau noch sehr stark durch den Ersatz von Stahl durch Aluminium-, Magnesium und Kohlefaser-Verbundwerkstoffen geprägt war, setzen die Automobilhersteller bei aktuellen Fahrzeuggenerationen auf einen sinnvollen Mix aus höchstfesten Stahl- und Aluminiumwerkstoffen zur Reduktion des Karosseriegewichts trotz steigender Anforderungen an die Fahrzeugsicherheit. In Abb. 1.2 ist anhand der charakteristischen Spannungs-Dehnungsverläufe das große Spektrum moderner Karosseriebaustähle zu sehen. Die Festigkeiten dieser Stähle reichen dabei von 400 MPa in konventionellen Tiefziehstählen bis über 1000 MPa bei Dual- und Mehrphasenstählen (Advanced High Strength Steels AHSS). Bei Warmumformstählen (Ultra High Strength Steels UHSS), die für Bauteile verwendet werden, die im Crashlastfall besonders hoch beansprucht werden (z.B. A- und B-Säulen, Längsträger, Türaufprallträger usw.), liegen die Zugfestigkeiten noch deutlich darüber. Die aktuell sehr weit verbreiteten Stahlgüten 22MnB5 und 36MnB5 erreichen im pressgehärteten Zustand Festigkeiten von

1500 MPa bis zu 1800 MPa. Eine ausführlichere Beschreibung all dieser modernen Karosseriestähle findet sich beispielsweise in [22].

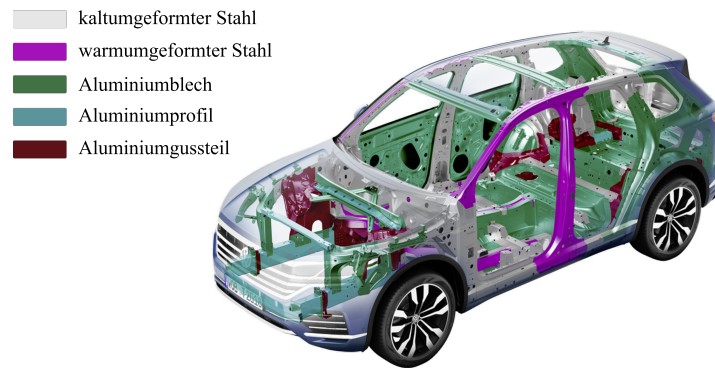


Abbildung 1.1.: Eingesetzte Leichtbauwerkstoffe in der Karosserie des Volkswagen Touareg 2019 [117]

Leider besitzen diese Stähle den Nachteil einer vergleichsweise geringen Duktilität, den man ebenso in Abb. 1.2 erkennt. So liegen die Bruchdehnungen der AHSS und UHSS meist nur im Bereich zwischen 5% bis 8%. Diese geringe Duktilität führt unter hohen Belastungen zu stärkeren Lokalisierungen der Spannungen und Dehnungen an geometrisch inhomogenen Stellen der Karosserien. Daneben besitzen die AHSS und UHSS aufgrund ihres größtenteils martensitischen Gefüges einen weiteren Nachteil. An Widerstandspunktschweißverbindungen (WPS-Verbindungen), die bei Stahlbauteilen nach wie vor die bevorzugte Fügetechnik darstellen, bilden sich in Folge des Wärmeeintrags entfestigte Wärmeeinflusszonen (eWEZ), die potenzielle Schwachstellen in der Karosserie darstellen können. In Abb. 1.3 ist die eWEZ an einer WPS-Verbindung und die mögliche Rissbildung in dieser Zone unter ebener Blechstreckung zu sehen. Die Ursache für diese lokale Schwächung findet sich im Wärmeeintrag durch den Schweißprozess. Dabei wird das Material in der Schweißlinse vollständig austenitisiert bzw. teilweise auch aufgeschmolzen. Während der anschließenden schnellen Abkühlphase bildet sich im Bereich der Schweißlinse wieder ein, dem Ausgangszustand ähnliches, martensitisches Gefüge aus. In einer Zone um die Schweißlinse wird die für Martensitumwandlung nötige Abkühlgeschwindigkeit jedoch nicht erreicht und es entsteht ein martensitisch-bainitisches Mischgefüge. Dieses Mischgefüge besitzt eine geringere Festigkeit als das umgebende martensitische Gefüge, wie sich am ausgebildeten Härtesack in Abb. 1.3a erkennen lässt. In Abb. 1.3b sieht man anhand einer sogenannten Blindzugprobe (d.h. einer Zugprobe mit einer Zweiblechverbindung durch einen Schweißpunkt, jedoch ohne Kraftübertragung über den Schweißpunkt) die aus diesem Härtesack resultierende Rissinitiierung unter ebener Blechstreckung. Ein typisches Beispiel für das Auftreten solcher Belastungszustände in der Fahrzeugkarosserie unter Crashbelastung bildet der Seitenaufprall eines Impaktors an der B-Säule. Durch die Biegebeanspruchung der B-Säule beim Eindringen des Impaktors entstehen an den Fügstellen im Flanschbereich diese großen ebenen Blechdehnungen, die

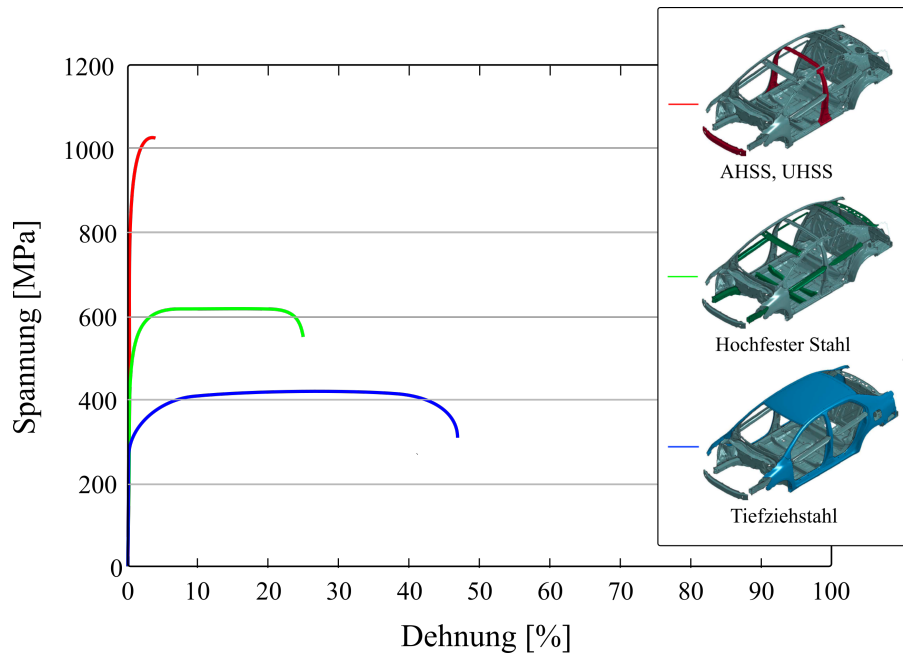


Abbildung 1.2.: Charakteristische Spannungs-Dehnungs-Verläufe verschiedener Kategorien von Stahlwerkstoffen und deren Einsatzbereiche im Fahrzeug nach [19, S. 19].

im Falle des Auftretens von Rissen zu einem spontanen Versagen des Bauteils und damit zu einer unzulässigen Gefährdung des Insassen führen können.

Neben dem Widerstandspunktschweißen kommen bei aktuellen Mischbaukarosserien auch weitere thermische und mechanische Fügeverfahren zum Einsatz. Auch bei diesen Verfahren tritt der Effekt der Lokalisierung von Spannungen und Dehnungen an den Fügstellen auf, wie hier am Beispiel von Halbhohlstanznietverbindungen aufgezeigt wird. Durch den Stanzprozess entsteht im stempelseitigen Blech ein Loch (siehe z.B. [37],[94]), an dem durch die geometrisch bedingte Kerbwirkung bei ebener Blechstreckung eine Spannungsüberhöhung auftritt, welche die Bildung von Rissen begünstigen kann. Ein ähnlicher Mechanismus existiert auch bei fließlochformenden Schraubverbindungen (FDS-Verbindungen). Zusammenfassend lässt sich sagen, dass viele aktuell eingesetzte Leichtbauwerkstoffe durch ihre hohe Festigkeit und vergleichsweise geringe Duktilität zur Rissbildung an den Verbindungstechniken neigen. Daher müssen die im CAE verwendeten Software-Werkzeuge in der Lage sein, diese Risse zu prognostizieren, um ein kritisches Bauteilversagen bereits frühzeitig im Auslegungsprozess durch geeignete konstruktive Maßnahmen auszuschließen.

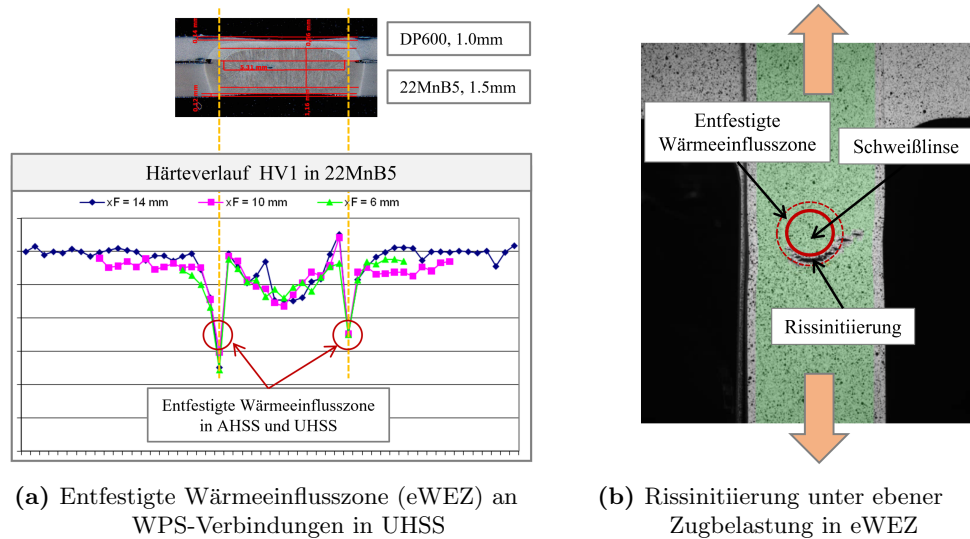


Abbildung 1.3.: Rissinitiierung an Widerstandspunktschweißverbindungen (WPS) unter ebener Zugbeanspruchung

1.2. Zielsetzung

Die Simulation von Rissen in der angewandten Crashsimulation findet in zwei aufeinanderfolgenden Phasen statt, für die jeweils unterschiedliche Modelle verwendet werden:

1. In der ersten Phase wird die Entstehung von Rissen mit Hilfe geeigneter Methoden an den Verbindungstechniken beschrieben. Dies kann beispielsweise durch eine mitlaufende Approximation des stetigen inhomogenen Dehnungsfeldes in einem geeignet gewählten Element-Patch in der Umgebung der Fügeverbindung realisiert werden. Der maximale Wert dieses approximierten Dehnungsfeldes wird dann einem für die Fügeverbindung charakteristischen ertragbaren Dehnungswert gegenübergestellt. Dieser charakteristische Dehnungswert wird vorab aus Versuchen und Detailsimulationen für unterschiedliche Last- und Materialkombinationen abgeleitet. Falls der in der Crashsimulation berechnete Dehnungswert diesen maximal ertragbaren Wert übersteigt, wird das Element, das sich an der Stelle der maximalen Dehnung befindet, gelöscht.
2. Die zweite Phase beschreibt die weitere Rissausbreitung durch das Bauteil. Dazu steht in der praktischen Anwendung derzeit nur das Verfahren der Elementauflösung auf Basis eines schädigungsmechanischen Kriteriums zur Verfügung. Wie in Kapitel 2 noch detaillierter beschrieben wird, ist die Auflösung der Spannungen und Dehnungen bei einer derzeit üblichen Elementgröße von 4 mm jedoch vielfach zu gering, um mit Hilfe dieses Verfahrens die weitere Rissausbreitung zu prognostizieren. So wird nach der Rissinitiierung die Resttragfähigkeit des Bauteils in der Simulation vielfach überschätzt, d.h. nicht konservativ prognostiziert.

Für die Phase 1 (Rissinitiierung) wurden bereits Methoden für unterschiedliche Verbindungstechniken realisiert und in [41], [43] und [42] veröffentlicht. Die vorliegende Arbeit widmet sich daher der Phase 2 (Rissfortschritt). Ziel der Arbeit ist es, eine Methode auf Basis bruchmechanischer Ansätze zu finden, die eine hohe Prognosegüte ermöglicht und nur eine geringe Netzabhängigkeit aufweist. Diese Simulationsmethode soll im Zuge der Arbeit auch prototypisch in einem kommerziellen Crash-Solver implementiert werden, um mit diesem Demonstrator das Potential der Simulationsmethode zu belegen.

1.3. Aufbau dieser Arbeit

Nach diesem einleitenden Kapitel wird in Kapitel 2 der aktuelle Stand der Technik zur Simulation des Material- und Bauteilversagens in der Crashesimulation beschrieben. Dabei werden auch die Einschränkungen und Probleme der aktuell verwendeten Methoden und Modelle bei den derzeit üblichen Netzdiskretisierungen aufgezeigt. Da die in der vorliegenden Arbeit behandelten Methoden auf Konzepten der Bruchmechanik basieren, werden in Kapitel 3 die wichtigsten Grundlagen dieser Ingenieurwissenschaft umrissen. Kapitel 4 beschreibt die Herleitung analytischer Ansätze für die Spannungs- und Verschiebungsfelder in der Umgebung der Risspitze, die einerseits zu einer verbesserten Auflösung dieser Felder und andererseits die Verwendung von bruchmechanischen Kennwerten in Rissfortschrittskriterien ermöglichen. Diese analytischen Ansätze werden dann in Kapitel 5 mit der Finiten Elemente Methode kombiniert. Dabei werden die drei folgenden Methoden betrachtet:

- Hybride Trefftz Methode (HTM),
- Analytische Submodelltechnik (ASM),
- Extended Finite Element Method (XFEM).

Die in Kapitel 4 gefundenen mathematischen Lösungen werden entsprechend dieser drei Formalismen adaptiert und prototypisch in MATLAB[®] implementiert. Anhand eines einfachen stationären Rissproblems an einer streifenförmigen Zugprobe werden die analytischen Ergebnisse verifiziert. Kapitel 6 beschreibt die Ermittlung der geeigneten Kenngrößen für die Bruchzähigkeit mit Hilfe bruchmechanischer Proben am Beispiel des Warmumformstahls 22MnB5. In Kapitel 7 wird die Simulation des Rissfortschritts mit Hilfe eines analytischen Submodells (ASM) beschrieben. Mit Hilfe eines Methodendemonstrators auf Basis einer gekoppelten Simulation von LS-DYNA[®] mit MATLAB[®] werden die in Kapitel 6 untersuchten einseitig gekerbten Zugproben simuliert und die numerischen und experimentellen Ergebnisse verglichen. Abschließend wird die Methode noch mit Hilfe eines Bauteilversuchs (Dreipunkt-Biegeprobe eines einseitig geschwächten Türaufprallträgers) validiert. Kapitel 8 fasst die wichtigsten Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit zusammen und beschreibt die nächsten notwendigen Schritte, um die Methode in die industrielle Nutzung überzuführen. Der Anhang dieser Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Während in

Anhang A noch die Ergebnisse ergänzender Untersuchungen zur Netzabhängigkeit und Robustheit der in Kapitel 5 implementierten Methoden beschrieben werden, sind in Kapitel B der entwickelte MATLAB[®]-Code und die Kopplung zwischen MATLAB[®] und LS-DYNA[®] über eine TCP/IP Schnittstelle dokumentiert.

2. Stand der Technik

In diesem Kapitel wird der derzeitige Stand der Technik zur Beschreibung des Bauteilversagens in der funktionalen Auslegung von Karosseriekomponenten beschrieben. Die Auswahl der hier angeführten Verfahren und Modelle beschränkt sich dabei auf jene, die aktuell in der industriellen Anwendung der expliziten Finite Element Methode weit verbreitet sind. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass neben Finite Elemente Methoden auch alternative Ansätze existieren, die für Rissprobleme geeignet und auch schon teilweise in kommerziellen Software-Paketen verfügbar sind. Beispiele für diese alternativen Ansätze sind die Boundary Element Method (BEM), Partikel-Methoden und netzfreie Methoden, wie die Element Free Galerkin (EFG). Den Vorteilen dieser Ansätze, beispielsweise bei der Beschreibung großer Verzerrungen oder der einfacheren Realisierung der Materialseparation, stehen die Nachteile eines höheren Rechenaufwandes und Schwierigkeiten bei der Parallelisierung gegenüber, sodass sich diese Methoden in der Crash-Simulation bis dato noch nicht etablieren konnten. Aus diesem Grund werden diese alternativen Ansätze in der vorliegenden Arbeit auch nicht weiter verfolgt.

2.1. Explizite Zeitschrittverfahren

Das Verfahren, das praktisch in allen Crash-Codes verwendet wird, ist die explizite Finite Elemente Methode, deren wesentliche Eigenschaften hier kurz umrissen werden. Den Ausgangspunkt bildet die Bewegungsgleichung, die man als Ergebnis einer Finite Elemente Diskretisierung eines dynamischen strukturellen Problems erhält (siehe beispielsweise [13, S. 183–197]). In Matrixschreibweise besitzt die Bewegungsgleichung die Form

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R. \quad (2.1)$$

Dabei ist M die Massenmatrix, C die Dämpfungsmatrix und K die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems. U , \dot{U} und \ddot{U} bezeichnen die Vektoren der Knotenverschiebungen, Knotengeschwindigkeiten und Knotenbeschleunigungen. R fasst Volumenkräfte, Oberflächenkräfte, thermische Kräfte und Kräfte durch Eigenspannungen in einem Gesamtknotenlastvektor zusammen. Gemeinsam mit zusätzlichen Anfangswerten $U^{(0)}$ bzw. $\dot{U}^{(0)}$ bildet diese Gleichung ein Anfangswertproblem.

Zur Lösung dieses Anfangswertproblems existieren zwei unterschiedliche Klassen von Methoden. Die erste Klasse bilden die direkten Integrationsverfahren, bei denen die Lösung in einem schrittweisen Verfahren zu diskreten Zeitpunkten gesucht wird. Der Ausdruck „direkt“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Gleichungen vor der Integration nicht in eine andere Form überführt

werden. Im Gegensatz dazu wird bei der zweiten Klasse, den indirekten Integrationsverfahren, zunächst eine Transformation durchgeführt mit dem Ziel, eine möglichst kleine Bandbreite des Gleichungssystems zu erhalten. Ein typisches Beispiel für ein indirektes Zeitintegrationsverfahren ist die Methode der Modenüberlagerung [13, S. 935–954], die besonders für periodische Lösungen geeignet ist.

2.1.1. Zentrale Differenzenmethode

In Crash-Codes wird aufgrund numerischer Effizienz vorrangig die sogenannte zentrale Differenzenmethode verwendet. Die Lösungen werden bei diesem Verfahren zu diskreten, durch ein Zeitintervall Δt getrennten Zeitpunkten ermittelt. Die Zeitableitungen des Knotenverschiebungsvektors in (2.1) werden bei diesem Verfahren durch Differenzenquotienten der Form

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(t)} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\mathbf{U}^{(t-\Delta t)} - 2\mathbf{U}^{(t)} + \mathbf{U}^{(t+\Delta t)} \right) \quad (2.2)$$

und

$$\dot{\mathbf{U}}^{(t)} = \frac{1}{2\Delta t} \left(-\mathbf{U}^{(t-\Delta t)} + \mathbf{U}^{(t+\Delta t)} \right) \quad (2.3)$$

ersetzt. Setzt man diese Differenzenquotienten in (2.1) für einen Zeitpunkt t ein und ordnet die Terme nach den diskreten Zeitpunkten, so erhält man

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{R}^{(t)} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{(t)} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{(t-\Delta t)}, \quad (2.4)$$

d.h. die Lösung zur Zeit $t + \Delta t$ lässt sich aus den Lösungen zu den Zeiten $t - \Delta t$ und t berechnen. Damit das Verfahren mit den Anfangswerten $\mathbf{U}^{(0)}$ und $\dot{\mathbf{U}}^{(0)}$ starten kann, benötigt man somit auch noch den Verschiebungsvektor \mathbf{U} zur Zeit $-\Delta t$. Dieser Vektor kann durch Kombination von (2.2) und (2.3) mit (2.1) gemäß

$$\mathbf{U}^{(-\Delta t)} = \mathbf{U}^{(0)} - \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(0)} \quad (2.5)$$

gefunden werden. Vernachlässigt man in (2.4) die Dämpfung und führt weiters die Näherung ein, dass die Massenmatrix \mathbf{M} eine Diagonalform besitzt, d.h. die Masse auf die Knotenpunkte konzentriert ist¹, so lässt sich (2.4) explizit nach $\mathbf{U}^{(t+\Delta t)}$ auflösen, ohne dass eine aufwendige Matrizeninvertierung nötig ist, wodurch die Methode ihre Effizienz erhält. Ein weiterer Vorteil des Verfahrens ist, dass die Berechnungen auf der rechten Seite der Gl. (2.4) für

¹Diese Näherung wird bei Anwendung der zentralen Differenzenmethode aus Gründen der Effizienz praktisch immer eingeführt. Generell besitzt man unter dem Aspekt der Ergebnisqualität in der Crashsimulation bei der Festlegung des Massenterms einen gewissen Spielraum. So wird die Masse vielfach künstlich vergrößert (engl. mass scaling), weil sich dadurch der stabile Integrationszeitschritt erhöht und sich die Rechenzeiten verkürzen.

jeden Zeitschritt auf Elementebene durchgeführt werden können und keine Gesamtsteifigkeitsmatrix gebildet werden muss. Dies macht die Methode auch aus Sicht des Speicherbedarfs sehr effizient. Aufgrund der Tatsache, dass für die numerische Stabilität der Lösungen die Zeitschrittweite Δt sehr klein sein muss und damit die Berechnungen für sehr viele Zeitschritte durchgeführt werden müssen, ist die Effizienz eine wichtige Voraussetzung.

2.1.2. Stabilität der Lösung und kritischer Integrationszeitschritt

Die zentrale Differenzenmethode besitzt die Eigenschaft, dass die Lösung nur dann stabil ist, d.h. kleine Störungen nicht über alle Grenzen anwachsen, wenn die Integrationsschrittweite Δt kleiner als eine kritische Schrittweite Δt_{krit} ist. Das Verfahren wird daher als „bedingt stabil“ bezeichnet. Dies wird im Folgenden näher erläutert.

Modenüberlagerung

Dazu betrachte man im ersten Schritt die Methode der Modenüberlagerung. Wie beispielsweise in [13, S. 955–958] beschrieben, wird vor Anwendung eines Integrationsschemas ein Wechsel des Koordinatensystems ins System der Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenproblems

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \quad (2.6)$$

durchgeführt. Mit der Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi}$, die als Spalten der bezüglich \mathbf{M} orthonormierten Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$ enthält, lässt sich diese Transformation gemäß

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}(t) \quad (2.7)$$

darstellen. Multiplikation der Bewegungsgleichung (2.1) mit $\boldsymbol{\Phi}^T$ von links liefert unter Vernachlässigung des Dämpfungsterms die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{R}(t). \quad (2.8)$$

Zur Lösung von (2.8) wird nun die zentrale Differenzenmethode angewendet. Da (2.8) ein System entkoppelter linearer Differentialgleichungen darstellt, wird im weiteren nur ein einzelner Freiheitsgrad betrachtet. Die zeitlich diskretisierte Bewegungsgleichung für einen Freiheitsgrad lautet

$$\ddot{x}^{(t)} + \omega^2 x^{(t)} = r^{(t)}, \quad (2.9)$$

wobei $\ddot{x}^{(t)}$ durch den Differenzenquotienten

$$\ddot{x}^{(t)} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(x^{(t-\Delta t)} - 2x^{(t)} + x^{(t+\Delta t)} \right) \quad (2.10)$$

repräsentiert wird.

Kombinieren der Gleichungen (2.9) und (2.10) und Auflösen nach $x^{(t+\Delta t)}$ ergibt

$$x^{(t+\Delta t)} = (2 - \omega^2 \Delta t^2) x^{(t)} - x^{(t-\Delta t)} + \Delta t^2 r^{(t)}. \quad (2.11)$$

Diese Gleichung kann als Iterationsschema der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x^{(t+\Delta t)} \\ x^{(t)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{X}}^{(t+\Delta t)}} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x^{(t)} \\ x^{(t-\Delta t)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{X}}^{(t)}} + \mathbf{L}r^{(t)} \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

und

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \Delta t^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

dargestellt werden.

Stabilität der Zeitintegrationsmethode

Zur Charakterisierung der Stabilität betrachte man nun den Fall eines allgemeinen diskreten dynamischen Systems, das sich ohne äußere Last ($r = 0$) zu gegebenen Anfangsbedingungen $\hat{\mathbf{X}}^{(0)}$ durch die (konstante) Zeitentwicklungsmatrix \mathbf{A} entwickeln kann. Nach n Iterationen ergibt sich die Lösung für $\hat{\mathbf{X}}^{(n\Delta t)}$ zu

$$\hat{\mathbf{X}}^{(n\Delta t)} = \mathbf{A}^n \hat{\mathbf{X}}^{(0)}. \quad (2.15)$$

Nun führt man eine Spektraldarstellung der Zeitentwicklungsmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ ein, wobei \mathbf{P} die Matrix der zugehörigen Eigenvektoren ist. \mathbf{J} ist die sogenannte kanonische Jordansche Form der Matrix \mathbf{A} und enthält in ihrer Diagonale die Eigenwerte λ_i . Für n Schritte der Zeitentwicklung gilt für die Zeitentwicklungsmatrix

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{J}^n\mathbf{P}^{-1}. \quad (2.16)$$

In dieser Form lässt sich nun die Stabilität der Zeitintegrationsmethode untersuchen. Dazu wird der sogenannte spektrale Radius der Matrix \mathbf{A} durch

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2,\dots} |\lambda_i| \quad (2.17)$$

definiert. Damit die Stabilität der Zeitintegrationsmethode gewährleistet ist, muss \mathbf{J}^n für $n \rightarrow \infty$ beschränkt sein. Falls alle Eigenwerte λ_i verschieden sind, so ist diese Forderung gleichbedeutend mit $\rho(\mathbf{A}) \leq 0$. Im Falle des Auftretens mehrfacher Eigenwerte muss $\rho(\mathbf{A}) < 0$ gelten, damit die Methode stabil ist (siehe [13, S. 964]).

Bei der Anwendung dieses Stabilitätskriteriums auf die Zeitentwicklungsmatrix

trix \mathbf{A} für die einzelne Mode in (2.13) erhält man für die Eigenwerte von \mathbf{A}

$$\lambda_1 = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} + \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}, \quad (2.18a)$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} - \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}. \quad (2.18b)$$

Mit diesen Eigenwerten ergibt sich die kritische Integrationsschrittweite zu

$$\Delta t_{krit} = \frac{T}{\pi}, \quad (2.19)$$

wobei T die zur Kreisfrequenz ω zugehörige Periodendauer ist. Über diese Periodendauer T ist der kritische Zeitschritt für ein einzelnes Element mit der Elementkantenlänge l_e in einem Medium mit der Schallgeschwindigkeit c_s über

$$\Delta t_{krit} \leq \frac{l_e}{c_s} \quad (2.20)$$

verknüpft. Diese auch als Courant-Friedrich-Lewy-Kriterium [20] bekannte Forderung kann mit der Ausbreitung einer mechanischen Welle in einem räumlich diskretisiert modellierten Körper folgendermaßen veranschaulicht werden: Damit eine Auslenkung in einem Knoten im nächsten Zeitschritt im Nachbarknoten mit dem Abstand l_e registriert wird, muss die Integrationsschrittweite kleiner als die Laufzeit der mechanischen Welle zwischen den beiden Knoten sein. Aus dieser Beziehung erkennt man, dass sich mit höherer Netzfeinheit die Integrationsschrittweite verringert und dadurch die Rechenzeit ansteigt. Da sich die Integrationsschrittweite auf alle Elemente im FE-Netz bezieht, bestimmt das kleinste Element den erforderlichen Rechenaufwand. In der Serienentwicklung sind die Rechenzeiten je Variante und Lastfall meist auf ca. 12 h zu beschränken, um einen optimalen Arbeitszyklus bezüglich Modellanpassung, Simulation und Ergebnisanalyse zu ermöglichen. Die damit einhergehenden Elementgrößen liegen aktuell im Bereich von ca. 4 mm. Durch diese relativ grobe Vernetzung wird lokalisiertes Materialversagen in vielen Fällen nur unzureichend abgebildet, wie im nächsten Abschnitt erläutert wird.

2.2. Materialversagen in der Crash-Simulation

Beim Bruch eines Bauteils handelt es sich um einen physikalisch sehr komplexen Vorgang, zu dessen Verständnis auch mikroskopische Prozesse mit einbezogen werden müssen. Je nach Werkstoffkategorien (Metalle, Kunststoffe, keramische Werkstoffe oder biologische Materialien) können sich die mikroskopischen Mechanismen, die zum Bruch führen, stark unterscheiden. Die maßgeblichen mikroskopischen Prozesse bei metallischen Werkstoffen sind die Bewegung und gegenseitige Wechselwirkung von Versetzungen, deren Wechselwirkung mit Korngrenzen und Ausscheidungen sowie die Entstehung und Entwicklung von Poren und Mikrorissen und anderen Heterogenitäten im Werkstoff. Abhängig

vom Gefüge können diese Prozesse zu sprödem oder duktilem Bruchverhalten führen. Bei den im Karosseriebau eingesetzten Blechwerkstoffen geht man im Allgemeinen von einem (vorwiegend) duktilen Versagensverhalten aus. Daher wird hier näher auf die Konzepte und Modelle zur Beschreibung dieses duktilen Versagensverhaltens eingegangen.

2.2.1. Duktilbruch

Der Duktilbruch basiert auf einer plastischen Verformung des Werkstoffs, die durch die Wirkung von Materialinhomogenitäten zu einer irreversiblen Schädigung führt. Wie in Abb. 2.1 dargestellt, läuft dieser Prozess in mehreren Phasen ab.

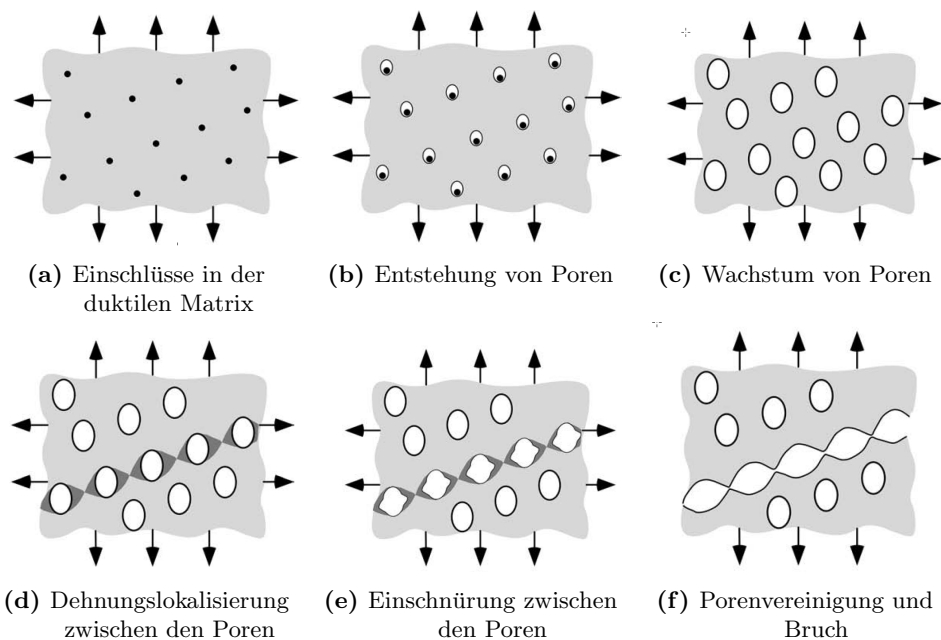
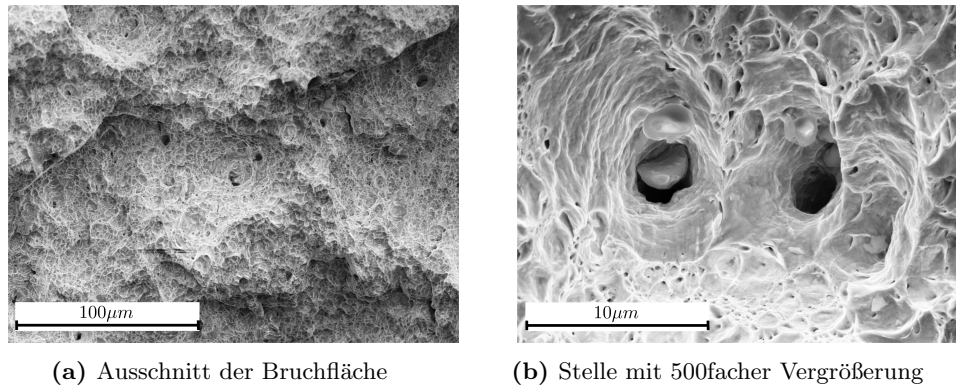


Abbildung 2.1.: Phasen des Duktilbruchs, Abbildungen stammen aus [1, S. 224]

In der ersten Phase werden durch eine mehrachsige Zugbeanspruchung an spröden Einschlüssen Poren initiiert, die danach unter steigender Beanspruchung weiter wachsen. Durch das Wachstum werden die Abstände zwischen den Poren zunehmend geringer und es kommt zu einer Lokalisierung der Dehnungen. Diese Lokalisierung führt zur Einschnürung und schließlich zu einer Vereinigung (Koaleszenz) der Poren und damit zum Bruch des Bauteils. Durch diesen Prozess entstehen die typischen rauen wabenartigen Strukturen in der der Bruchfläche, wie in Abb. 2.2 zu sehen ist.

Für die Entwicklung und Auslegung von makroskopischen Bauteilen ist eine Abbildung dieser mikroskopischen Prozesse in der Simulation nicht direkt möglich. Zur Beschreibung des Materialversagens gibt es nun zwei unterschiedliche Ansätze:



(a) Ausschnitt der Bruchfläche

(b) Stelle mit 500facher Vergrößerung

Abbildung 2.2.: Rasterelektronenaufnahme der Bruchfläche eines häufig verwendeten höherfesten Karosseriebaustahls des Typs H340LAD (Bezeichnung nach DIN/EN)

- Bruchmechanischer Ansatz
- Lokale Versagenshypothesen und Schädigungsmechanik

Die Bruchmechanik geht von einem bereits existierenden Makroriss aus und behandelt dann die Frage, ob der Riss bei den gegebenen Bauteil-Randbedingungen weiter wächst. Die Werkzeuge der Bruchmechanik sind Kenngrößen, die zwar die Beanspruchungen an der Rissspitze charakterisieren, haben aber eher globalen Charakter. Die tatsächlich ablaufenden mikroskopischen Prozesse werden in der Bruchmechanik nicht beschrieben. Demgegenüber steht die Schädigungsmechanik, in der das Materialversagen lokal, d.h. in jedem Volumenelement des Bauteils als Folge der durchlaufenen Spannungs- und Dehnungshistorie, beschrieben wird.

Da in der industriellen Anwendung das Bauteilversagen derzeit vorrangig mit Hilfe von Versagenshypothesen und schädigungsmechanischen Modellen simuliert wird, werden hier einige der aktuell verwendeten Schädigungsmodelle kurz umrissen.

2.2.2. Einfache Versagenshypothesen

Das einfachste Kriterium zur Bewertung des Versagensrisikos ist der Vergleich der auftretenden äquivalenten plastischen Dehnung mit einem maximal vom Werkstoff ertragbaren Dehnungswert (Bruchdehnung). Bei diesem Kriterium bleibt allerdings die Art der Deformation unberücksichtigt, was für die meisten technischen Werkstoffe keine gültige Annahme darstellt. Die Berücksichtigung des Deformationszustandes kann durch die Abhängigkeit der Bruchdehnung von der Spannungsmehrachsigkeit berücksichtigt werden. Die Abhängigkeit der Bruchdehnung von der Spannungsmehrachsigkeit erhält man im Allgemeinen aus mehreren Versuchen mit spezieller Geometrie unter proportionaler Verformung, d.h. konstanter Mehrachsigkeit bei der Versuchsführung. Da die Deformationspfade im Crash aber vielfach stark nichtproportional verlaufen, besitzt die experimentell ermittelte Bruchdehnungskurve zur Bewertung der real auftretenden Umformung nur eine eingeschränkte Gültigkeit.

2.2.3. Schädigungsmechanik

Schädigungsmechanische Modelle benutzen innere Variablen, d.h. Feldgrößen, die den Zustand der Schädigung im Materialpunkt charakterisieren. Je nach Werkstoffverhalten kann diese Schädigungsvariable ein skalares Feld (isotropes Schädigungsverhalten) oder auch ein Vektor- oder Tensorfeld sein (anisotropes Schädigungsverhalten). Die Entwicklung der Schädigungsvariable mit der Dehnung wird in Form einer Evolutionsgleichung modelliert. Da der Zustand der Schädigung auch einen Einfluss auf die Fließeigenschaften des Werkstoffs hat, geht sie bei einigen Ansätzen in die Fließfläche ein. Bei den Schädigungsmodellen existieren im Wesentlichen zwei Varianten. Bei der ersten Variante werden mikromechanische Modellvorstellungen zugrunde gelegt, bei denen die Schädigungsvariable physikalisch interpretiert werden kann. In vielen Fällen wird die Schädigung durch die Porosität, d.h. die Dichte und das Volumen der Poren, die den effektiv tragenden Querschnitt verringern, charakterisiert. Als bekanntestes mikromechanisches Schädigungsmodell wird hier das Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell angeführt. Die zweite Variante beruht auf einer rein phänomenologischen Beschreibung. Einige Vertreter dieser Klasse, die aktuell in der Crash-Simulation eingesetzt werden, sind das Schädigungsmodell von Johnson-Cook [61], das ESI-Wilkins-Kamoulakos-Modell (EWK) [63], das Modified Mohr-Coulomb-Versagensmodell (MMC) [6] sowie das Generalized Incremental Stress State dependent Model (GISSMO). Diese Modelle werden im folgenden kurz umrissen. Bezugnehmend auf die Verwendung von Tensorgrößen in Koordinatenschreibweise gelte in der gesamten Arbeit die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über benachbarte gleiche Indizes wird summiert.

Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell (GTN)

Das GTN-Modell ist das am weitesten verbreitete mikromechanische Schädigungsmodell. Es besteht in einer Weiterentwicklung des Gurson-Modells [35], das von einem Porenwachstum in einem starr-idealplastischen Material unter hoher Mehrachsigkeit η ausgeht. Die Mehrachsigkeit ist durch

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_v}, \quad (2.21)$$

d.h. dem Verhältnis der hydrostatischen Spannung $\sigma_m = 1/3\sigma_{kk}$ und der Vergleichsspannung nach von Mises σ_v definiert. In den Vorarbeiten von Rice und Tracey [98], in denen das Wachstum einer einzelnen sphärischen Pore mit dem Radius R in einem unendlich ausgedehnten starr-ideal-plastischem Medium mit der Fließgrenze σ_y unter wachsender uniaxialer Zugdehnung $\dot{\epsilon}_v$ (Fernfeld) analytisch untersucht wurde, konnte die folgende Näherung für die relative Wachstumsgeschwindigkeit der Pore abgeleitet werden:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \alpha \dot{\epsilon}_v \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_y}\right). \quad (2.22)$$

Dabei ist σ_{kk} die Spur des Spannungstensors und α ein dimensionsloser Parameter, der in der ursprünglichen Arbeit für hohe Mehrachsigkeiten einen Wert

von 0, 283 einnimmt. Auf Basis dieser Arbeit wurde von Gurson [35] eine Schädigungsvariable in Form der Porosität definiert. Diese Porosität f wird durch den Volumenbruchteil der sphärischen Probe, bezogen auf ein maximal zulässiges Volumen, bei dem Versagen einsetzt, gebildet. Damit erhält man eine Fließfläche Φ , in welche die Porosität f gemäß

$$\Phi = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2} + 2f \cosh\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_y}\right) - 1 - f^2 \quad (2.23)$$

eingeht. Unter reiner Druckspannung, d.h. $\sigma_v = 0$, kann das Material fließen, sofern $f > 0$ ist. Das Materialversagen tritt ein, wenn f den Wert 1 erreicht. Für die Evolutionsgleichung der Porosität f wurde von Gurson die Beziehung

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk} \quad (2.24)$$

abgeleitet, wobei $\dot{\epsilon}_{kk}$ die Spur des plastischen Dehnratentensors ist. Im experimentellen Vergleich zeigte sich, dass dieses Modell in dieser ursprünglichen Form das Materialverhalten zu optimistisch beurteilt. Gründe dafür sind die fehlende Berücksichtigung von Porenneubildung, Porenreinigung sowie auch eine zu ungenaue Abschätzung der Porenwachstumsgeschwindigkeit. Um eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen zu erhalten, wurde von Tvergaard und Needleman [116] eine phänomenologische Modifikation der Fließfläche gemäß

$$\Phi = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2} + 2q_1 f_* \cosh\left(\frac{1}{2} q_2 \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_y}\right) - 1 - q_1^2 f_*^2 \quad (2.25)$$

vorgeschlagen. Die Parameter q_1 und q_2 erlauben eine genauere Beschreibung der Wachstumsgeschwindigkeit, wie mit Hilfe von einfachen Simulationen gezeigt wurde. Um die Porenkoaleszenz zu berücksichtigen, tritt an die Stelle der ursprünglich definierten Porosität f eine effektive Porosität f_* der Form

$$f_* = \begin{cases} f & \text{falls } f \leq f_c \\ f_c + \left(\frac{1}{q_1} - f_c\right) \frac{f - f_c}{f_R - f_c} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ab einer kritischen Porosität f_c ist die Schädigungsrate aufgrund der Porenkoaleszenz erhöht. Wenn f schließlich den Wert f_R erreicht, wird Materialversagen vorhergesagt und die effektive Porosität nimmt den Wert $1/q_1$ an.

Die Porenneubildung wird in der Evolutionsgleichung (2.24) durch die folgende Modifikation berücksichtigt:

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk} + A \dot{\epsilon}_v. \quad (2.26)$$

Der Proportionalitätsfaktor A berücksichtigt die Porenneubildung in Form der Normalverteilung

$$A = \frac{f_n}{\sqrt{2\pi} s_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\epsilon_v - \epsilon_n}{s_n}\right). \quad (2.27)$$

Die Porenneubildungsrate streut damit mit der Standardabweichung s_n um

eine Vergleichsdehnung ϵ_n . In Summe besitzt das GTN-Modell einen Satz aus sieben Parametern ($q_1, q_2, f_c, f_R, f_n, \epsilon_n, s_n$), die mit Hilfe entsprechender Versuche und Simulationen angepasst werden. Durch die Grundannahme eines kugelförmigen Porenwachstums bildet das GTN-Modell nur das Versagen unter hoher Mehrachsigkeit korrekt ab. Zur Beschreibung des Versagens bei anderen Werten der Mehrachsigkeit existieren mikromechanische Erweiterungen des GTN-Modells, die eine geänderte Form des Porenwachstums bei anderen Verformungszuständen berücksichtigen (siehe beispielsweise [30]). In der industriellen Anwendung werden für die kleineren Mehrachsigkeiten (d.h. eher schubdominierten Bereiche) allerdings meist alternative Schädigungsmodelle verwendet, in welchen die Abhängigkeit des Schädigungsverhaltens von der Mehrachsigkeit phänomenologisch berücksichtigt wird.

Johnson-Cook-Modell (JC)

Ein typischer Vertreter der phänomenologischen Schädigungsmodelle ist das Modell von Johnson-Cook [61]. Dieses Materialmodell berücksichtigt den Einfluss von Temperatur und Dehnrates auf die Fließ-Vergleichsspannung σ_y durch folgende Gleichung:

$$\sigma_y = (A + B\epsilon^n) (1 + C \ln \dot{\epsilon}^*) (1 - T^{*m}) . \quad (2.28)$$

Die Größe $\dot{\epsilon}^*$ bezeichnet die dimensionslose, auf eine Referenzdehnrates bezogene, relative Dehnrates und T^* die relative Temperatur, gegeben durch $T^* = (T - T_{Umgebung}) / (T_{Schmelz} - T_{Umgebung})$. Die Evolution der Schädigung D ist in diesem Modell als Akkumulation von relativen plastischen Dehnungsincrementen $d\epsilon$, bezogen auf eine von der Mehrachsigkeit η abhängigen äquivalenten Bruchdehnung ϵ_f durch

$$D = \int_t \frac{d\epsilon}{\epsilon_f} \quad (2.29)$$

gegeben, wobei die Bruchdehnung ϵ_f mit der Gleichung

$$\epsilon_f = (d_1 + d_2 \exp(d_3 \eta)) (1 + d_4 \ln \dot{\epsilon}^*) (1 - d_5 T^{*m}) \quad (2.30)$$

modelliert wird. Die Parameter A, B, C und d_i für $i = 1..5$ werden durch entsprechende Versuche festgelegt, wobei je nach Anwendung bzw. erwartetem Einfluss von Temperatur oder Dehnrates auf das Versagensverhalten die entsprechenden Terme in den Gleichungen (2.28) und (2.30) auch vernachlässigt werden können. Für die Anwendung des JC-Modells in der Crash-Simulation wird üblicherweise der Temperatur-Term nicht berücksichtigt. Bei Werkstoffen, die nur eine geringe Dehnratesabhängigkeit aufweisen, wie beispielsweise die im Automobilbau eingesetzten Aluminiumlegierungen, wird auch der Dehnrates-term vernachlässigt. Durch diese Vereinfachungen kann sich die Zahl der Parameter und der benötigten Versuche stark verringern.

ESI-Wilkins-Kamoulakos-Modell (EWK)

Ein weiteres phänomenologisches Schädigungsmodell ist das EWK-Modell (ESI-Wilkins-Kamoulakos [63]). Die Schädigungsentwicklung wird durch eine gewichtete Integration der plastischen Vergleichsdehnung gemäß

$$D = \int w_1 w_2 d\epsilon_v \quad (2.31)$$

dargestellt. Der Gewichtungsterm w_1 berücksichtigt den Einfluss der hydrostatischen Zugspannung σ_m auf das Porenwachstum durch

$$w_1 = \left(\frac{1}{1 + a\sigma_m} \right)^\alpha, \quad (2.32)$$

wobei $a = 1/\sigma_{\text{lim}}$ durch die max. hydrostatische Zugspannung definiert ist und α ein empirischer Modellparameter ist. Der zweite Gewichtungsterm w_2 ist gegeben durch

$$w_2 = (2 - A)^\beta \quad (2.33)$$

und berücksichtigt die Asymmetrie der Dehnung durch den Parameter A mit

$$A = \max \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3}, \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right), \quad (2.34)$$

wobei $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$ die der Größe nach geordneten Hauptdehnungen sind und β ein weiterer empirischer Modellparameter ist. Durch w_2 wird die Ausbildung von Scherbändern durch Lokalisierung zwischen den Poren und Porenvereinigung, wie in Abb. 2.1d bis 2.1f dargestellt, beschrieben. Wenn die Schädigung D in einem Bereich mit Radius $r > r_c$ einen kritischen Wert D_c übersteigt, so setzt das Materialversagen ein. Die charakteristische Länge r_c , innerhalb derer $D > D_c$ sein muss, hängt vom Gefüge ab und berücksichtigt die Verteilung der Einschlüsse für die Porenbildung im Werkstoff.

Modified Mohr-Coulomb-Modell (MMC)

Aufbauend auf den umfassenden experimentellen und theoretischen Untersuchungen des Versagensverhaltens von Aluminium 2024-T351 von Bao und Wierzbicki ([7], [8] und [9]) wurde in [6] ein Schädigungsmodell vorgeschlagen, das sowohl den Einfluss kleiner bzw. negativer Mehrachsigkeiten (Druckbereich) als auch den Einfluss der dritten Invarianten des Deviators $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ in Form des sogenannten Lode-Winkel-Parameters $\bar{\theta}$ berücksichtigt. Dieses Versagensmodell beruht auf einer Anwendung bzw. Erweiterung des Mohr-Coulomb-schen-Versagensmodells auf duktile Werkstoffe. In seiner ursprünglichen Form ist dieses Modell spannungsbasiert. Es besagt, dass Bruch eintritt, wenn bei einem durch die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, definierten Spannungszustand in einer kritischen Schnittebene, definiert durch den Normalenvektor (ν_1, ν_2, ν_3) , die gewichtete Kombination aus Normalspannung σ_n und Schubspannung τ der

Form

$$(\tau + c_1 \sigma_n)_f = c_2 \quad (2.35)$$

einen kritischen Wert c_2 erreicht. Die kritische Schnittebene ist dabei diejenige, in der die linke Seite von (2.35) maximal wird. Aus dieser Forderung erhält man das Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb, ausgedrückt in Form der Hauptspannungen zu

$$\left(\sqrt{1 + c_1^2} + c_1 \right) \sigma_1 - \left(\sqrt{1 + c_1^2} - c_1 \right) \sigma_3 = 2c_2. \quad (2.36)$$

Anstelle der Hauptspannungen kann dieses Modell mit Hilfe der Spannungsmehrachsigkeit η und des Lode-Winkels θ umformuliert werden. Diese Parameter erhält man aus den drei grundlegenden Spannungsinvarianten I_1 , J_2 und J_3 , die gegeben sind durch

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad (2.37a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad (2.37b)$$

$$J_3 = \det(s_{ij}), \quad (2.37c)$$

wobei s_{ij} der Spannungsdeviator ist. Die Spannungsmehrachsigkeit ist wieder definiert durch

$$\eta = \frac{I_1}{3\sqrt{3}J_2}. \quad (2.38)$$

Mit der Normierung der dritten Invariante ξ gemäß

$$\xi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \cos(\theta) \quad (2.39)$$

erhält man den Lode-Winkel θ . Anstelle des Lode-Winkels wird vielfach der Lode-Winkel-Parameter $\bar{\theta}$, definiert durch

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \xi, \quad (2.40)$$

verwendet. Durch die Einführung des Lode-Winkels bzw. des Lode-Winkel-Parameters kann zwischen axialsymmetrischem Zug ($\bar{\theta} = 1$), reinem Schub ($\bar{\theta} = 0$) und axialsymmetrischem Druck bzw. äquibiaxialem Zug ($\bar{\theta} = -1$) unterschieden werden. Wie in [6] beschrieben, lässt sich (2.36) mit Einführung von η und θ überführen auf

$$\sigma_v = c_2 \left[\sqrt{\frac{1 + c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + c_1 \left(\eta + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right) \right]^{-1}. \quad (2.41)$$

Für die Anwendung ist die spannungsbasierte Form des Versagenskriteriums

nur sehr schlecht geeignet. Dies liegt einerseits daran, dass sich die Spannung vor allem bei duktilem Materialversagen im Versagensbereich nur gering ändert, wohingegen die Dehnung eine große Änderung durchläuft. Zudem lassen sich die Spannungskomponenten und damit verbunden die Vergleichsspannung nicht direkt in einem größeren Bereich messen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, Gleichung (2.41) mit Hilfe eines geeigneten Plastizitätsmodells in eine dehnungsbaasierte Form überzuführen. In [5] wird dazu das Verfestigungsgesetzes

$$\sigma_v = A \epsilon_v^n [1 - c_\eta (\eta - \eta_o)] [c_\theta^s + (c\theta^{ax} - c_\theta^s) \gamma] \quad (2.42)$$

mit

$$c_\theta^{ax} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{\theta} \geq 0 \\ c_\theta^c & \text{falls } \bar{\theta} < 0 \end{cases}$$

vorgeschlagen. A ist eine Materialkonstante, n ist der Verfestigungsexponent, und die Parameter c_η , η_o , c_θ^s , c_θ^c beschreiben die Abhängigkeit von der Mehrachsigkeit η und vom Lode-Winkel θ . Der Parameter γ ist dabei eine Abkürzung für den vom Lode-Winkel θ abhängigen Term

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \left[\sec \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right]. \quad (2.43)$$

Man erkennt, dass (2.42) bei geeigneter Wahl der Parameter c_η , c_θ^c und c_θ^s sowohl die von-Mises-Fließbedingung als auch die Tresca-Fließbedingung als Grenzfälle enthält. Durch Gleichsetzen von (2.42) und (2.41) und Auflösen nach der Bruch-Vergleichsspannung ϵ_f erhält man

$$\epsilon_f = \left\{ \frac{A}{c_2} [1 - c_\eta (\eta - \eta_o)] \left[c_\theta^s + \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} (c_\theta^{ax} - c_\theta^s) \left(\sec \left(\frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) - 1 \right) \right] \right. \\ \left. \left[\sqrt{\frac{1 + c_1^2}{3}} \cos \left(\frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) + c_1 \left(\eta + \frac{1}{3} \sin \left(\frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) \right) \right] \right\}^{-1/n}. \quad (2.44)$$

Insgesamt sind in diesem Modell acht Parameter (A , n , c_η , η_o , c_θ^c , c_θ^s , c_1 , c_2) enthalten, die über geeignete Versuche bestimmt werden müssen, wobei zwei Parameter (c_1 , c_2) das Versagensmodell definieren. Die übrigen Parameter beschreiben das Plastizitätsmodell. Durch diese große Zahl an Parametern ist dieses Versagensmodell sehr flexibel und kann das Materialversagen in einem weiten Bereich unterschiedlicher Verformungszustände abbilden. Allerdings bedingt diese große Zahl an Parametern auch einen entsprechend hohen Versuchsaufwand zur Kalibrierung des Modells. Berücksichtigt man die statistischen Streuungen der Versuche, sowie den Chargeneinfluss der Blechwerkstoffe, so führt dies zu einem erheblichen Kosten- und Zeitaufwand, der in vielen Fällen die praktische Anwendbarkeit einschränkt.

Generalized Incremental Stress State dependent damage Model (GISSMO)

Bei GISSMO handelt es sich um ein sehr flexibles, in LS-DYNA[®] verfügbares phänomenologisches Schädigungsmodell. Da eine umfassendere Beschreibung dieses Modells den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werden hier nur die drei wesentlichen Aspekte des Modells GISSMO beleuchtet:

1. Durchgängigkeit in der Beschreibung der Schädigung in der Prozesskette (Forming to Crash)
2. Flexibilität in der Formulierung des Versagensmodells in $\epsilon_f(\eta, \theta)$ je nach Genauigkeitsanforderung, Werkstoffverhalten bzw. Verfügbarkeit entsprechender Versuchsergebnisse
3. Modell zur Beschreibung der Lokalisierung zum Zwecke der Minimierung der Netzabhängigkeit im postkritischen Bereich

Eine umfassendere Beschreibung von GISSMO ist in der Dissertation von Neukamm [83] zu finden. Die in Punkt 1. angeführte Berücksichtigung der Prozesskette in der Schädigungsbewertung legt die Annahme zugrunde, dass ein Teil der Blechschädigung bereits im Umformprozess in das Bauteil eingebracht wird und so die Restverformbarkeit im Crash verringert. Da sich die Anforderungen bezüglich Netzgröße, Plastizitätsmodell, Bewertung der Umformbarkeit und Gesamtgröße des FE-Modells zwischen Umform- und Crash-Simulation aber stark unterscheiden, ist eine einheitliche FE-Modellierung nicht optimal. Wie in [84] beschrieben, ist die in der Umformsimulation verwendete Fließortskurve vielfach nicht mit dem in der Crash-Simulation verwendeten Schädigungsmodell ohne Anpassungen kompatibel. So können beispielsweise die Dehnraten im isochoren anisotropen Materialmodell nach Barlat [11] nicht direkt im GTN-Schädigungsmodell verwendet werden. Um diese Inkompatibilitäten zu vermeiden, wird im GISSMO das Schädigungsmodell vom Plastizitätsmodell entkoppelt. Die Schadensakkumulation wird in diesem Modell durch die folgende, einfachere Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable D beschrieben:

$$\dot{D} = \frac{n}{\epsilon_f} D^{1-1/n} \dot{\epsilon}, \quad (2.45)$$

wobei ϵ_f die Bruchspannung und ϵ die plastische Vergleichsspannung darstellen. Mit dem Exponenten n kann die Nichtlinearität der Schädigungsevolution abgebildet werden. Für $n = 1$ würde diese Evolutionsgleichung mit der Schädigungsakkumulation nach Johnson-Cook identisch sein.

Die in Punkt 2. angesprochene Flexibilität des Versagensmodells greift die bereits im MMC-Modell beschriebene Abhängigkeit des Materialversagens von der Mehrachsigkeit η und vom Lode-Winkel θ auf. Während aber in [6] für diese Abhängigkeit eine Modellgleichung (2.44) verwendet wird, ist in GISSMO die Abhängigkeit der Bruchdehnung ϵ_f von der Mehrachsigkeit η und vom Lode-Winkel θ punktweise mit Hilfe experimenteller Ergebnisse definiert. Zwischen diesen Punkten findet im GISSMO eine lineare Interpolation statt.

Punkt 3. beschreibt die Behandlung der Lokalisierung der Dehnungen vor Eintreten des Duktilbruchs. Die Konzentration der Dehnungen auf einen lokal sehr engen Bereich wird durch entfestigende Prozesse, die zu einer Einschnürung und Rissbildung führen, verursacht. Diese physikalische Prozesszone ist bei Crash-Simulationen in der Regel deutlich kleiner als die nominale Elementgröße. Das führt dazu, dass nach Erreichen der Gleichmaßdehnung die Elementgröße die weitere Deformation in der Simulation bestimmt. Zur Behebung dieser unerwünschten Netzgrößenabhängigkeit wurde in GISSMO die Strategie gewählt, zuerst den Punkt der beginnenden Lokalisierung vorherzusagen um nach diesem Punkt Maßnahmen zur Behebung der Netzgrößenabhängigkeit (Regularisierung) zu ergreifen. Dazu wird das Maß der sogenannten Umformschwere F eingeführt, für das die folgende, der Schädigung analoge Evolutionsgleichung gilt:

$$dF = \frac{n}{\epsilon_{loc}} F^{1-1/n} d\epsilon. \quad (2.46)$$

ϵ_{loc} ist dabei die von der Mehrachsigkeit η abhängige Lokalisierungsdehnung und n ist ein Exponent zur Abbildung des nichtlinearen Verlaufs der Evolution der plastischen Dehnung ϵ . Wenn F den Wert 1 erreicht, beginnt der postkritische Bereich und eine beginnende Netzgrößenabhängigkeit ist zu erwarten. Im nächsten Schritt wird zur Kompensation der Netzgrößenabhängigkeit eine Größe benötigt, welche die lokale Energiedissipation durch die plastische Deformation bei der Einschnürung und die Bruchenergie widerspiegelt. Im GISSMO wird dazu die Schädigung D verwendet. Im Konzept der effektiven Spannung nach Lemaitre [75] verringert die Schädigung D den effektiven resttragenden Querschnitt, was sich auch auf die Materialtangente, d.h. auf die Steifigkeit auswirkt, da die effektive Spannung σ^* nur mehr im resttragenden Querschnitt wirkt und sich die auf die Querschnittsfläche bezogene Spannung σ um den Faktor $1 - D$ verringert. Da die Kopplung der Steifigkeit mit der Schädigungsvariable erst bei der Lokalisierung ($F = 1$) einsetzt, wird im GISSMO die Abnahme der Steifigkeit durch den Ausdruck

$$\sigma = \sigma^* \left[1 - \left(\frac{D - D_{crit}}{1 - D_{crit}} \right)^m \right] \quad (2.47)$$

gebildet. D_{crit} ist die Schädigung bei Einsetzen der Lokalisierung ($F = 1$) und m ist ein Exponent, mit dem die Regularisierung justiert werden kann. Um auch im makroskopischen Bereich eine vollständige Regularisierung zu erreichen, ist es sinnvoll, zusätzlich eine Netzgrößenabhängigkeit der Bruchdehnung ϵ_f einzuführen. Abschließend sei noch erwähnt, dass sich die Lokalisierung bei metallischen Werkstoffen hauptsächlich auf zugdominierte Belastungen im Bereich $1/3 < \eta < 2/3$ beschränkt. Zur Abgrenzung dieses Bereichs bietet sich in GISSMO die Möglichkeit, die Regularisierung zusätzlich mit zwei Parametern $SHRF$ und $BIAXF$ anzupassen.

2.3. Grenzen der Prognosequalität

In Abschnitt 2.1 wurde bereits erläutert, dass die erreichbare Auflösung der Spannungen und Dehnungen in der expliziten Crash-Simulation aufgrund der kritischen Integrationsschrittweite limitiert ist. Dies hat weitreichende Konsequenzen auf die Vorhersage von Versagensphänomenen, die einen stark lokalisierten Charakter haben.

2.3.1. Lokalisierung der Beanspruchungen

Eine Lokalisierung in einem Deformationsprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass in einem kleinen Gebiet sehr hohe Beanspruchungen auftreten, während die globale Struktur deutlich weniger beansprucht wird oder die globalen Beanspruchungen infolge der lokalen Entlastungsvorgängen sogar sinken. Im Lokalisierungsgebiet treten sehr hohe Gradienten der Beanspruchungen auf, wodurch die korrekte Prädiktion in diesem Gebiet eine sehr hohe Netzauflösung erfordern würde. Aber selbst bei hoher Netzauflösung kann es in diesen Bereichen zu einer starken Netzabhängigkeit kommen. Die Ursache für diese Netzabhängigkeit ist der Mittelungseffekt, den die FE-Diskretisierung mit sich bringt. Wie in [60] anhand eines eindimensionalen Beispiels gezeigt wird, hängt die Dehnung, die ein Element in einem Bereich mit großer Lokalisierung erfährt, sehr stark von der Elementgröße ab. Während ein kleines Element die lokale Dehnung genauer abbilden kann, wird bei einem großen Element durch den Mittelungseffekt die Dehnung oft unterschätzt. Aus diesem Grund versagen in Bereichen mit starker Lokalisierung kleine Elemente tendenziell zuerst.

2.3.2. Ursachen der Lokalisierung

Die Lokalisierung in Blechbauteilen kann einerseits in homogenen Bereichen der Struktur infolge materieller Entfestigung bei hohen globalen Dehnungen auftreten. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.2.3 näher erläutert. Sie kann aber andererseits bereits bei deutlich geringeren globalen Dehnungen in Form von Spannungskonzentrationen an geometrischen Inhomogenitäten der Struktur oder durch Dehnungskonzentrationen an materiellen Inhomogenitäten auftreten. Beispiele für geometrische Inhomogenitäten im Karosseriebau sind Verbindungstechniken (Schweißpunkte, Nietverbindungen, Fließformschrauben usw.) oder Bereiche am Bauteilrand, die aufgrund kleiner Radien eine starke Kerbwirkung aufweisen. Eine materielle Inhomogenität kann beispielsweise durch einen Wärmeeintrag (z.B. lokale Entfestigungen durch Schweißprozesse) oder durch lokal eingebrachte Kaltverfestigung (z.B. bei Stanznietprozessen) im Zuge von Fügeprozessen verursacht werden. In allen Fällen führt eine zu grobe Netzdiskretisierung zu Problemen bei der Prognose.

2.3.3. Methoden zur Reduktion der Netzabhängigkeit

Zur Vermeidung von unphysikalischen Artefakten existieren mehrere Ansätze, die hier kurz diskutiert werden:

- Netzverfeinerung und nichtlokale Schädigungsbewertung
- Berücksichtigung der Netzgrößenabhängigkeit im Versagensmodell (Regularisierung)
- Versagensbewertung mit Hilfe eines Ersatzmodells zur Berücksichtigung von Geometrie- oder Materialinhomogenitäten

Nichtlokale Schädigungsbewertung

Die Verwendung einer nichtlokalen Schädigungsbewertung setzt eine Netzgröße voraus, die deutlich unter der Größe des lokalisierten Bereichs liegt. Zur Bewertung des Versagensrisikos werden die relevanten lokalen Größen (z.B. Schädigungsrate \dot{D}), die in die Schädigungsbewertung einfließen, durch radial gewichtete Mittelwerte ersetzt. Durch diesen Prozess wird der Einfluss von unterschiedlichen Elementgrößen kompensiert. Durch die radiale Gewichtungsfunktion wird jedoch eine neue charakteristische Länge eingeführt. Damit die Versagensbewertung mit Hilfe nichtlokaler Größen zu korrekten Ergebnissen führt, muss daher diese radiale Gewichtung bereits bei der Parametrierung der Versagensmodelle berücksichtigt werden. Für die Anwendung in der Crash-Simulation spielt die nichtlokale Schädigungsbewertung aufgrund der erforderlichen Netzfeinheit auf Gesamtfahrzeugebene eine eher untergeordnete Rolle.

Regularisierung

Da jedes Versagensmodell eine inhärente Elementgrößenabhängigkeit besitzt, muss eine Regularisierung, wie im zweiten Punkt angeführt, immer durchgeführt werden. Dazu werden bei der Erstellung der Materialkarten die Parametrierungsversuche mit unterschiedlichen Elementgrößen simuliert, um auf diese Weise die Netzgrößenabhängigkeit der Parameter des Schädigungsmodells im Reverse-Engineering Prozess zu ermitteln. Neben dieser Regularisierung besitzen einige Schädigungsmodelle noch intelligentere Ansätze zur Kompensation der Netzabhängigkeit. Ein typisches Beispiel ist das in Abschnitt 2.2.3 beschriebene Schädigungsmodell GISSMO, das ein Modell zur Vorhersage der Lokalisierung beinhaltet und die materielle Entfestigung durch eine Verringerung der Steifigkeit berücksichtigt (Konzept der effektiven Spannung).

Ersatzmodellierung

Während diese Regularisierungsmaßnahmen zu einer Verbesserung der Netzgrößenabhängigkeit bei der Prognose des Materialversagens durch Lokalisierung infolge materieller Entfestigung (postkritischer Bereich) führen, bleibt ein grundsätzliches Problem der groben Netzdiskretisierung für geometrie- und materialbedingte Lokalisierung an Inhomogenitäten bestehen: Lokale Geometrie- und Materialdetails, die im FE-Modell zu grob abgebildet werden, führen zu einer falschen Prognose des Materialversagens, da die Bewertung von Beginn an auf nicht korrekten Beanspruchungen beruht. Da infolge einer zu groben Modellierung die real auftretenden Beanspruchungen tendenziell unterschätzt

werden, ist die Prognose meist nicht konservativ, d.h. viele Bauteile versagen in der Realität früher als in der Simulation prognostiziert. Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Prognosequalität bietet die Methode der Ersatzmodellierung. Hier wird das durch lokale Geometrie- oder Materialdetails beeinflusste Versagen experimentell und theoretisch mit Hilfe von analytischen Modellen oder mit FE-Detailmodellen vorab untersucht. Das Ergebnis dieser Analysen sind Versagensflächen im Raum der Haupteinflussparameter (Ersatzmodelle). Während der Crashsimulation werden an den kritischen Stellen (Verbindungstechniken, Kerben usw.) die jeweiligen Haupteinflussparameter ermittelt und mit Hilfe der Ersatzmodelle bewertet. Typische Haupteinflussparameter sind beispielsweise die nominale Spannung außerhalb des Lokalisierungsbereichs und das lokale Dehnungsmaximum, das mit Hilfe approximierter stetiger Dehnungsfelder berechnet wird.

Die geometrisch bedingte Unterschätzung lokal auftretender Beanspruchungen an kritischen Stellen im Bauteil trifft insbesondere auf die Bewertung des Ausbreitungsrisikos von Rissen zu. Wird ein Riss, wie derzeit üblich, lediglich durch eine zusammenhängende Reihe von gelöschten Schalen-Elementen mit Kantenlängen im Bereich von 4 mm repräsentiert, so führt die falsche Abbildung der Risspitzengeometrie zu einer starken Unterschätzung der Spannungen und Dehnungen in den Elementen im Bereich der Risspitze und das Versagen wird vielfach zu spät prognostiziert. Aus diesem Grund besteht das Ziel dieser Arbeit in der Entwicklung bzw. Anwendung alternativer Ansätze zur verbesserten Prognose der Rissausbreitung in der Crashsimulation.

3. Bruchmechanische Grundlagen

Da die im Rahmen der vorliegenden Arbeit beschriebenen Simulationen auf bruchmechanischen Ansätzen basieren, werden in diesem Kapitel die wichtigsten Konzepte und Begriffe dieser Disziplin zusammengefasst. Eine umfangreichere Einführung in die Bruchmechanik findet man beispielsweise in [1], [34], [67], [36] und [106].

In der klassischen Festigkeitslehre geht man von einem idealen, fehlerfreien Bauteil aus und ermittelt die durch das Einwirken der äußeren Kräfte hervorgerufenen Bauteilbeanspruchungen in Form von Spannungen oder Dehnungen. Diese Beanspruchungen werden mit Hilfe von geeigneten Festigkeitshypothesen auf eine fiktive Referenzspannung umgerechnet und mit einem materialspezifischen Kennwert verglichen. Der Kennwert charakterisiert den Bruch bzw. den Funktionsverlust des Bauteils durch eine bleibende Verformung.

Im Gegensatz dazu wird in der Bruchmechanik immer von einem fehlerbehafteten Bauteil ausgegangen. Diese Fehler können in Form von herstellungsbedingten Anrissen, Poren oder anderen Materialinhomogenitäten bereits im Bauteil vorliegen oder auch erst im Betrieb durch äußere Einwirkungen entstehen. Mit Hilfe der Bruchmechanik lässt sich dann beurteilen, ob ein vorhandener Riss oder Defekt bei einer gegebenen äußeren Belastung weiter wächst oder stationär bleibt. Dazu wird eine für das jeweilige Werkstoffverhalten geeignete Kenngröße für die Rissspitzenbeanspruchung, die oft auch als risstreibende Kraft bezeichnet wird, definiert. Die risstreibende Kraft wird dann in einem Fortschrittskriterium mit einem vom Werkstoff ertragbaren Wert für die risstreibende Kraft verglichen. Der ertragbare Wert wird auch Risswiderstand oder Bruchzähigkeit genannt und wird meist durch einen Bauteilversuch an einer Probe mit definiertem Anriss bestimmt.

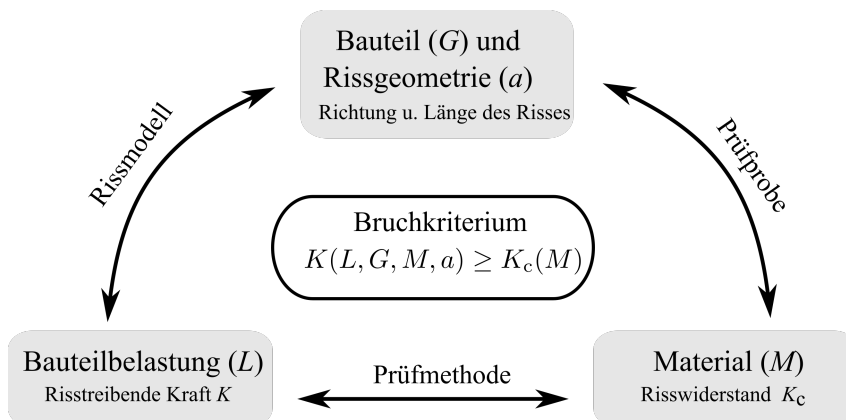


Abbildung 3.1.: Bruchmechanisches Bewertungskonzept

In Abb. 3.1 ist dieses Bewertungskonzept schematisch dargestellt. Es ist zu beachten, dass im Gegensatz zur Festigkeitsbewertung eines Bauteils bei der bruchmechanischen Bewertung die Länge des Risses eine große Rolle spielt. Die rissstreibende Kraft K hängt also von der äußeren Last L , der Bauteilgeometrie G , vom Materialverhalten M sowie von der Risslänge a ab. Für den Risswiderstand K_c wäre ein reiner, probenunabhängiger Werkstoffkennwert wünschenswert. Dies ist leider nur näherungsweise möglich. Wie in Kapitel 6 noch ausführlicher beschrieben wird, müssen sowohl für die Messung der Kennwerte für den Risswiderstand als auch bei der Verwendung des Rissfortschrittskriteriums immer die entsprechenden Randbedingungen für die jeweilige Gültigkeit eingehalten werden.

3.1. Beschreibung und Einteilung von Bruchvorgängen

Je nach wissenschaftlicher Fragestellung gibt es unterschiedliche Kriterien, nach denen sich die Bruchvorgänge einteilen lassen. Die wichtigsten zu berücksichtigenden Aspekte die dabei berücksichtigt werden müssen sind:

- Zeitlicher Verlauf der Beanspruchung,
- Verformungs- und Versagensverhalten des Werkstoffs,
- Rissöffnungsmodi.

Die Beanspruchungsart des Bauteils wird durch die zeitliche Entwicklung der äußeren Bauteillast bestimmt. Finden die Bruchvorgänge durch Einwirkung einer konstanten oder nur langsam veränderlichen Last statt (statischer oder quasistatischer Fall), so spricht man von einem Gewaltbruch. Ändert sich die äußere Last sehr schnell, sodass die Ausbreitung von mechanischen Wellen im Bauteil nicht mehr vernachlässigt werden kann, so hat diese einen starken Einfluss auf die Rissausbreitung. In diesem Fall spricht man von dynamischer Rissausbreitung. Diese Effekte können beispielsweise bei Stoß- und Schlagbelastungen auftreten. Für viele technische Anwendungen ist die Rissausbreitung durch zyklische Bauteillasten sehr wichtig. Bei dieser Belastungsart kann das Risswachstum auch erfolgen, obwohl kritische (statische) Bruchkennwerte noch nicht erreicht sind. Man spricht bei dieser Belastung von Ermüdungsrisswachstum oder von Schwingbruch. Für diese Arbeit sind in erster Linie quasistatische Bauteillasten relevant, da die lokalen Deformationsgeschwindigkeiten im Crashlastfall noch deutlich unter der Schallgeschwindigkeit liegen und man im Crash von monoton ansteigenden Lasten ausgeht.

Neben der Belastungsart hat das mechanische Verformungs- und Versagensverhalten des Werkstoffs einen wesentlichen Einfluss auf die Rissausbreitung. Man unterscheidet dabei zwischen Sprödbbruch, Duktilbruch und Kriechbruch. Beim Sprödbbruch treten keine oder nur sehr kleine plastische Deformationen vor der Risspitze auf. Typische Werkstoffe, die dieses Bruchverhalten aufweisen, sind Glas und Keramiken aber auch einige metallische Werkstoffe, wie α -Eisen, Chrom, Molybdän, Wolfram, ansonsten duktile, metallische Werkstoffe

bei sehr niedrigen Temperaturen ein Spröbruchverhalten. Bei den automotiven Blechwerkstoffen geht man in der Regel von duktilem Bruchverhalten aus, wobei die Größe der plastischen Zone stark von der Festigkeit und vom Fließvermögen des betrachteten Werkstoffs abhängt.

Ein weiteres wichtiges Einteilungsmerkmal ist die Richtung der Beanspruchung an der Rissspitze. Dafür unterscheidet man die drei in in Abb. 3.2 dargestellten grundlegenden Rissöffnungsmodi.

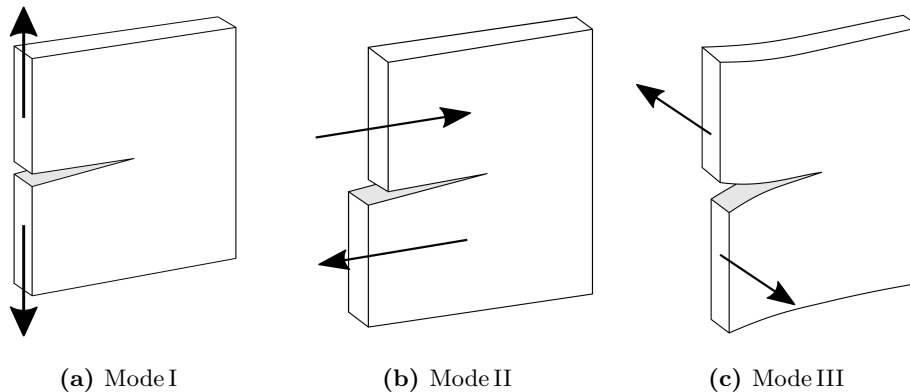


Abbildung 3.2.: Grundlegende Rissöffnungsmodi in der Bruchmechanik

In dieser Arbeit wird vor allem der wichtige Mode I, d.h. die Rissöffnung unter dominanter ebener Zugbelastung betrachtet, da von der Annahme ausgegangen wird, dass sich im Zuge der Rissausbreitung die Rissrichtung immer so ändert, dass ein Mode II-Anteil verschwindet. Dies entspricht auch dem Richtungskriterium der maximalen Umlaufspannung [27]. Die Rissausbreitung in höchstfesten Blechwerkstoffen unter Mode III wurde bereits in [39] und [38] umfassend untersucht und lässt sich mit den in dieser Arbeit behandelten Ansätzen nahtlos kombinieren.

3.2. Linear elastische Bruchmechanik (LEBM)

Eine große Rolle bei der Beschreibung von Bruchvorgängen spielt die Größe der sogenannten Bruchprozesszone. Darunter versteht man den Bereich vor der Rissspitze, in dem durch irreversible mikroskopische Prozesse der Werkstoff so geschädigt wird, dass es zur Auflösung der Bindungen kommt. Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, besteht dieser Prozess bei duktilen Metallen in erster Linie aus Porenbildung, -wachstum und -vereinigung. Die Prozesszone lässt sich in der Regel nicht mit kontinuumsmechanischen Ansätzen beschreiben. Um dennoch die klassische Kontinuumsmechanik auf den Bruchprozess anwenden zu können, muss diese Bruchprozessgröße bezogen auf die geometrischen Abmessungen des Bauteils vernachlässigbar klein sein, d.h. der Bruchvorgang muss sehr stark lokalisiert sein. Bei der LEBM wird im gesamten Bauteil linear elastisches Materialverhalten angenommen, d.h. auch plastische Verformungen müssen stark auf die Rissspitzenumgebung konzentriert sein.

3.2.1. Griffith-Kriterium

Eine der ersten Arbeiten, die den Weg zur Bruchmechanik bereiteten, stammt von Griffith [33]. Die Grundidee besteht in der Anwendung des Energieerhaltungssatzes (1. Hauptsatz der Thermodynamik) auf ein Rissproblem.

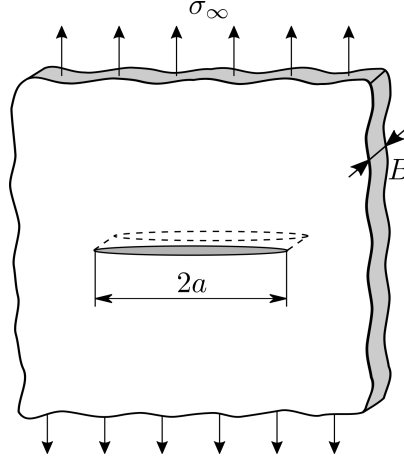


Abbildung 3.3.: Innenriss in einer unendlich ausgedehnten Platte unter uniaxialer Zugspannung (Griffith-Riss)

Man betrachte, wie in Abb. 3.3 dargestellt, eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke B mit einem endlichen Innenriss der Länge $2a$ unter uniaxialer Zugspannung σ_∞ in großem Abstand der Risspitze (Fernfeld-Spannung). Die Platte sei dünn, d.h.: $B \ll a$. Ein Wachstum der Rissfläche um ein infinitesimales Inkrement dA ist mit dem Aufbrechen von Bindungen und der Erzeugung einer neuen Oberfläche an den Rissflanken verbunden. Die dafür nötige Oberflächenenergie wird mit W_o bezeichnet und wird von der potenziellen Energie des Körpers Π geliefert. Die Energiebilanz bei einem infinitesimalen Risswachstum lautet damit

$$\frac{dW_{\text{ges}}}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_o}{dA} = 0. \quad (3.1)$$

Mit dem Spannungsansatz von Inglis [47] erhält man für diese Risskonfiguration im ebenen Spannungszustand den Ausdruck für die potenzielle Energie zu

$$\Pi = \Pi_o - \frac{\pi\sigma_\infty^2 a^2 B}{E}, \quad (3.2)$$

wobei Π_o die potenzielle Energie der Platte ohne Riss und E den Elastizitätsmodul bezeichnen. Mit der spezifischen Oberflächenenergie γ_s kann die Energie zur Erzeugung eines Risses der Länge $2a$ in einer Platte der Dicke B mit

$$W_o = 4aB\gamma_s \quad (3.3)$$

angegeben werden. Einsetzen von (3.2) und (3.3) in (3.1) liefert nach Umfor-

mung einen Ausdruck für die Bruchspannung σ_f gemäß

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Diese Idee von Griffith wurde 1956 von Irwin [48] aufgegriffen und in eine etwas andere Form gebracht. Dazu definierte er die sogenannte Energiefreisetzungsrate G gemäß

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}. \quad (3.5)$$

Für den Griffith-Riss erhält man für die Energiefreisetzungsrate G aus (3.2) den Ausdruck

$$G = \frac{\pi\sigma_\infty^2 a}{E}. \quad (3.6)$$

Erreicht die Energiefreisetzungsrate einen kritischen Wert G_c , so setzt das Risswachstum ein. Dieser kritische Wert ergibt sich beim idealen Spröbruch nach Griffith zu

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (3.7)$$

und ist ein Maß für die Bruchzähigkeit bzw. den Risswiderstand des Werkstoffs. Da sich die Energiefreisetzungsrate als Ableitung eines Potentials berechnet und damit physikalisch als Kraft deuten lässt, wird sie auch vielfach als risstreibende Kraft bezeichnet.

Mit diesen einfachen Überlegungen erhält man somit das grundlegende Rissfortschrittskriterium der Bruchmechanik, wonach das Risswachstum einsetzt, sobald die risstreibende Kraft den Risswiderstand des Werkstoffs erreicht.

3.2.2. K -Konzept

Mit dem Spannungsintensitätsfaktor existiert in der LEBM eine zweite Kenngröße, die noch wesentlich weiter verbreitet ist als die Energiefreisetzungsrate. Diese Kenngröße leitet sich aus der Analyse der lokalen Spannungen im Bereich der Risspitze in einem mechanisch beanspruchten Körper ab. Für bestimmte einfache Konfigurationen mit einem unendlich scharfen Riss existieren für einfache Geometrien, wie dem Griffith-Riss, unter homogenen Randbedingungen analytische Spannungslösungen¹, siehe beispielsweise [119], [110] und [120]. Diese gefundenen Spannungslösungen lassen sich in Polarkoordinatendarstellung in

¹Die zur Herleitung dieser Lösungen verwendeten Methoden beruhen wie die in Kapitel 4 vorgestellten Ansätze auf der Theorie komplexer Funktionen. Sie unterscheiden sich beim Innenriss jedoch in den komplexen Potentialen, da die Lösungen für den Innenriss auf einer konformen Abbildung auf eine entartete Ellipse beruhen, bzw. die Airy'sche Spannungsfunktion verwenden.

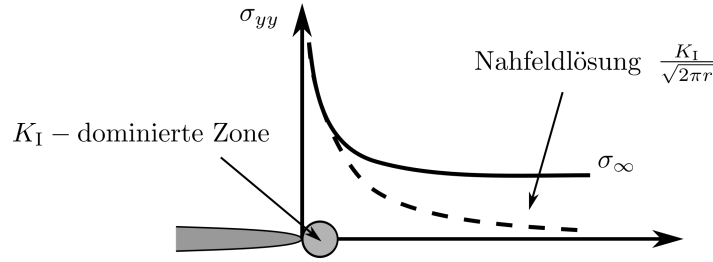


Abbildung 3.4.: Zur Erläuterung der K -dominierten Zone für einen Mode I Riss

der Form

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{m/2} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (3.8)$$

angeben, wobei r den Abstand eines Punktes von der Risspitze und θ den Winkel zur Rissrichtung bezeichnen. Während die Terme höherer Ordnung von der Geometrie des Körpers abhängig sind, enthält jede Risskonfiguration einen führenden Spannungsterm mit einer $1/\sqrt{r}$ Abhängigkeit. Die Spannungen besitzen somit an der Risspitze eine Singularität, d.h. sie nähern sich asymptotisch ∞ . Diese Charakteristik existiert für alle drei Rissöffnungsmodi (siehe Abb. 3.2), wobei die Konstante k und die dimensionslose Winkelabhängigkeit f_{ij} jedoch vom jeweiligen Rissöffnungsmodus abhängen. Es ist üblich, die Konstante k mit dem Faktor $\sqrt{2\pi}$ zu normieren und den jeweiligen Rissöffnungsmodus als tiefgestellten Index einzuführen. Die Konstanten K_I , K_{II} und K_{III} werden als Spannungsintensitätsfaktoren für die einzelnen Rissöffnungsmodi bezeichnet und bestimmen den Verlauf der Spannungen in der Umgebung der Risspitze (siehe Abb. 3.4).

Die Gültigkeit der K_I -dominierten Zone ist aufgrund der Tatsache, dass kein Material unendlich hohe Spannungen aushalten kann (bzw. sich plastisch verformt) auch nach innen begrenzt. Sofern jedoch angenommen wird, dass sowohl die Prozesszone als auch die plastische Zone klein gegenüber der K -dominierten Zone sind und somit vernachlässigbaren Einfluss auf die Nahfeldlösung haben, beschreibt der Spannungsintensitätsfaktor den Bruchprozess eindeutig und kann somit analog zur Energiefreisetzungsrates G in einem Bruchkriterium verwendet werden. Mit Hilfe der Westergaard'schen Spannungsfunktion [119] erhält man für den Griffith-Riss der Länge $2a$ unter Mode I das Ergebnis

$$K_I = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a}. \quad (3.9)$$

Kombiniert man (3.9) mit (3.6), so sieht man, dass der Spannungsintensitätsfaktor K_I mit der Energiefreisetzungsrates G über

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.10)$$

in eindeutiger Beziehung steht. Streng genommen gilt die LEBM nur für ideal spröde Körper. Sie lässt sich jedoch, wie bereits angedeutet, auch auf den

Bereich des sogenannten Kleinbereichsfließens, d.h. auf Risse mit einer kleinen plastischen Zone vor der Risspitze anwenden. Für diesen Fall existieren Korrekturen auf der Basis einfacher Modellvorstellungen für die Rissspitzenplastizität wie beispielsweise die Risslängenkorrektur nach Irwin [49] oder das Modell der streifenförmigen Rissspitzenplastizität (engl. strip yield model) nach Dugdale [25]. Diese Korrekturen führen zu einer besseren Abschätzung des effektiven Spannungsintensitätsfaktors K_{eff} .

3.3. Elastoplastische Bruchmechanik (EPBM)

Bei vielen Werkstoffen gelten die Rahmenbedingung der LEBM nicht mehr, da es vor Einsetzen des Risswachstums zunächst zu einer Plastifizierung vor der Risspitze kommt, die nicht mehr vernachlässigbar ist. Da ein erheblicher Teil des elastischen Potentials im Zuge des Rissfortschritts in die Plastifizierung fließt, muss diese auch korrekt in den bruchmechanischen Kenngrößen berücksichtigt werden.

3.3.1. J -Integral

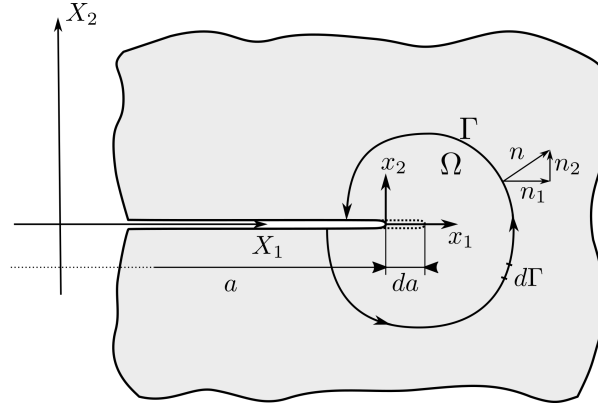
Eine große Bedeutung innerhalb der EPBM besitzt das sogenannte J -Integral. Diese Größe wurde erstmals von Rice [99] vorgeschlagen und ist seitdem eines der wichtigsten Werkzeuge der Bruchmechanik. Gleichzeitig ist das J -Integral auch ein Spezialfall der verallgemeinerten Energiebilanzintegrale. Diese verallgemeinerten Energiebilanzintegrale basieren auf den Arbeiten von Eshelby und werden auch als Konzept der Material- oder Konfigurationskräfte bezeichnet. Diese Theorie ermöglicht es, die Wechselwirkungen von Defekten (Rissen, Hohlräumen und anderen Inhomogenitäten) untereinander bzw. mit einem inhomogenen Medium, wie beispielsweise einem mehrlagig geschichteten Werkstoff zu untersuchen. Somit besitzt dieses Konzept auch eine hohe Relevanz beim Design bzw. der Entwicklung neuer Werkstoffe.

Energiefreisetzungsrates im nichtlinear-elastischen Fall

Den Ausgangspunkt für die Herleitung des J -Integrals bildet die Definition der Energiefreisetzungsrates nach Griffith (3.5), wobei zusätzlich die folgenden Annahmen getroffen werden:

- nichtlinear-elastisches Materialverhalten,
- keine Entlastungsvorgänge,
- keine Volumskräfte,
- ebener Spannungs- oder ebener Dehnungszustand.

Zur Herleitung des J -Integrals betrachte man nun einen Bereich Ω um die Risspitze, der von der Kontur Γ begrenzt ist, wie in Abb. 3.5 dargestellt. Die auf Γ wirkenden Schnittspannungen $t_i = \sigma_{ij}n_j$ sollen bei einem Risswachstum

Abbildung 3.5.: Zur Definition des J -Integrals

um da konstant bleiben. Das Gebiet Ω wird zusammen mit dem Risspitzen-Koordinatensystem (x_1, x_2) mit der Risspitze verschoben. Für die totale Ableitung einer Größe nach da , d.h. die Änderung einer Größe mit dem Risswachstum, gilt:

$$\frac{d(\cdot)}{da} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial a} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial a}}_{=-1} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial a} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}. \quad (3.11)$$

Die potenzielle Energie im Gebiet Ω ist gegeben durch:

$$\Pi = \int_{\Omega} U d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma, \quad (3.12)$$

wobei U die elastische Energiedichte, t_i die Schnittspannungen und u_i die Verschiebungen auf der Schnittkurve Γ bezeichnen.

Für die Energiefreisetzungsrate nach (3.5) erhält man damit

$$\begin{aligned} -\frac{d\Pi}{da} &= \frac{d}{da} \left(\int_{\Gamma} t_i u_i ds - \int_{\Omega} U d\Omega \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma + \left(- \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial a} d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die partielle Ableitung der elastischen Energiedichte $\partial U / \partial a$ ergibt

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a}, \quad (3.14)$$

wobei $u_{i,j}$ die partielle Ableitung $\partial u_i / \partial x_j$ bezeichnet. Nach Einsetzen von (3.14) in (3.13) und Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes auf die Gebietsintegrale in (3.13) verschwindet der Klammerausdruck und es verbleibt das mit J bezeichnete Linienintegral

$$J = \int_{\Gamma} \left(U dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right). \quad (3.15)$$

Unter den oben angeführten Bedingungen ist diese Größe wegunabhängig und beschreibt, wie schon aus der Herleitung zu erkennen ist, die Änderung der potenziellen Energie mit der Rissverlängerung. Somit erweitert das J die Energiefreisetzungsrate G für den nichtlinear elastischen Fall bzw. auch für den plastischen Fall bis zu dem Punkt, wo eine Entlastung in Form einer abfallenden Last oder durch Rissfortschritt stattfindet. Ab diesem Punkt verliert J seine Wegunabhängigkeit und beschreibt die Rissspitzenbeanspruchung nicht mehr eindeutig. Eine Erweiterung für plastisch verformte Gebiete ist zwar im Rahmen der inkrementellen Theorie formal möglich, dieses Integral ist dann jedoch von der lokalen Verformungsgeschichte der Punkte auf dem Integrationsweg abhängig und somit nicht mehr wegunabhängig. Damit büßt es in dieser Form seine praktische Relevanz ein. Mittlerweile gibt es viele modifizierte Ansätze für Energiebilanzintegrale unter Berücksichtigung von dynamischen und plastischen Effekten, um die Anwendbarkeit dieser Randintegrale zu erweitern. Eine Übersicht findet sich beispielsweise in [79] und [109].

Lokale Bedeutung des J -Integrals

Analog zur LEBM existiert auch noch eine zweite Deutung des J -Integrals. Dazu werden die Spannungen an der Risspitze eines Risses in einem nichtlinear elastischen Material (oder elastoplastischem Material ohne Entfestigung) untersucht. Die einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurven vieler verfestigender Werkstoffe lassen sich gut mit dem Ramberg-Osgood-Gesetz,

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (3.16)$$

beschreiben. Die Werkstoffgrößen α und n (Verfestigungsexponent) werden durch die Anpassung an Fließkurven aus geeigneten Zugversuchen gefunden. Für hinreichend kleine Werte von α entspricht σ_0 der Spannung und ϵ_0 der zugehörigen Dehnung, bei der Fließen einsetzt. Die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.16) repräsentieren die linearen und plastischen Anteile der Dehnungen. Da im Bereich der Risspitze die linearen Dehnungen klein gegenüber den plastischen Dehnungen sind, kann dieser Anteil vernachlässigt werden. In den Arbeiten von Rice, Rosengren [101] und Hutchinson [46] wurde das asymptotische Verhalten der Spannungen und Dehnungen im Bereich der Risspitze für diese Näherung untersucht. Die gefundenen Lösungen werden aufgrund dieser Arbeiten in der Bruchmechanik vielfach als HRR-Feld (Hutchinson-Rice-Rosengren) bezeichnet. Es wurde gezeigt, dass auch unter der Annahme einer Verfestigung nach einem Potenzgesetz Singularitäten in den Spannungsfeldern auftreten. Die Stärke der Singularität hängt hier aber vom Verfestigungsexponenten n ab. Während im linear elastischen Fall eine $1/\sqrt{r}$ -Abhängigkeit vom Rissspitzenabstand r auftritt, besitzt das HRR-Feld für die Spannungen eine $1/\sqrt[n+1]{r}$ -Charakteristik. Das J -Integral bestimmt im HRR-Feld die Stärke dieser Singularität und besitzt damit in der EPBM eine ähnliche Bedeutung wie der Spannungsintensitätsfaktor K in der LEBM.

3.3.2. Rissspitzenöffnungsverschiebung (CTOD)

Bei Werkstoffen mit duktilem Verhalten tritt durch die plastische Verformung bei einer Öffnung des Anfangsrisses vor Einsetzen des Risswachstums eine Abstumpfung der Rissspitze ein. Wie erstmals von Wells [118] vorgeschlagen, motiviert dies die Einführung der Rissöffnungsverschiebung (engl. Crack Tip Opening Displacement CTOD) δ_t als Maß für diese Abstumpfung (siehe Abb. 3.6).

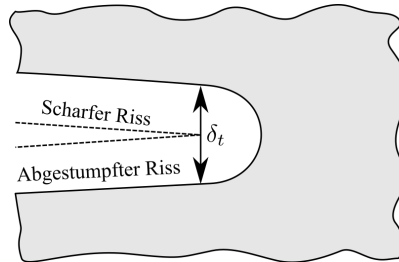


Abbildung 3.6.: Zur Definition der Rissöffnungsverschiebung δ_t

Für die exakte Definition dieser Kenngröße gibt es mehrere Varianten, die beispielsweise in [1], [34], [107], [85] übersichtlich dargestellt sind. Die jeweilige Definition ist stark mit der zugrundeliegenden Modellvorstellung für die Rissspitzenplastizität verbunden.

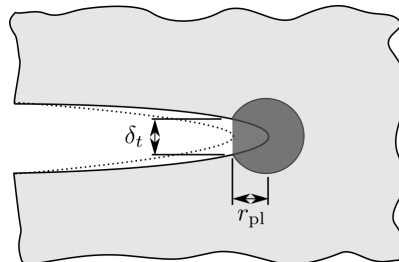


Abbildung 3.7.: Rissöffnungsverschiebung für Kleinbereichsfließen nach dem Modell der Risslängenkorrektur nach Irwin

Auf Basis der Risslängenkorrektur nach Irwin [49] lässt sich, wie in Abb. 3.7 dargestellt, die Rissöffnungsverschiebung δ_t aus der Rissuferverschiebung u_y an der Position der physikalischen Rissspitze unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes mit

$$\delta_t = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_y E} \quad (3.17)$$

berechnen. σ_y ist dabei die Fließspannung des Werkstoffs. Ähnlich lässt sich auch für das strip yield model nach Dugdale ein eindeutig definierter Wert für die Rissöffnungsverschiebung an der physikalischen Rissspitze definieren, wie in Abb. 3.8 gezeigt wird. Aus der analytischen Lösung für den Innenriss (Griffith-Riss) der Länge $2a$ unter der Annahme einer konstanten rissschließenden Randspannung in der Höhe der Fließspannung σ_y ergibt sich diese Rissöffnungsver-

schiebung nach [16] zu

$$\delta_t = \frac{8\sigma_y a}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_y} \right), \quad (3.18)$$

wobei σ_∞ wieder die homogene uniaxiale Fernfeld-Spannung ist und ein ebener Spannungszustand angenommen wird. Eine Approximation dieses Ausdrucks für kleine σ_∞/σ_y führt zu

$$\delta_t \approx \frac{K_I^2}{\sigma_y E} \quad (3.19)$$

und unterscheidet sich damit nur geringfügig von (3.17).

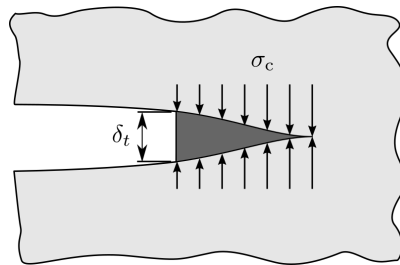


Abbildung 3.8.: Rissöffnungsverschiebung für das Modell einer streifenförmigen plastischen Zone (strip yield model)

Eine weitere Definition für die Rissöffnungsverschiebung, die auch häufig in numerischen Analysen mit der FEM verwendet wird, ist in Abb. 3.9 gezeigt. Diese von Rice [99] vorgeschlagene Definition ermittelt sich aus der Rissspitzenöffnungsverschiebung der gegenüberliegenden Schnittpunkte der Rissufer mit zwei Geraden, die mit der Rissrichtung Winkel von $\pm 45^\circ$ einschließen.

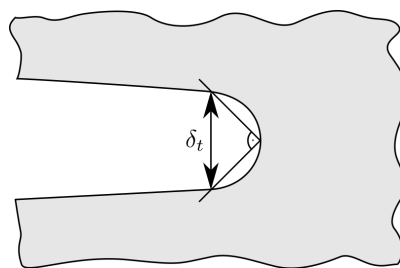


Abbildung 3.9.: Zur Definition der Rissspitzenöffnungsverschiebung (CTOD)

Falls die Abstumpfung des Risses in Form eines Halbkreises stattfinden würde, wäre die Position in Rissrichtung, an der die Rissspitzenöffnungsverschiebung gemessen wird, analog zu den oben angeführten Definitionen auf der Position der ursprünglichen (unbelasteten) Risspitze. Mit dieser Definition ergibt sich auf Basis des HRR-Feldes ein eindeutiger Zusammenhang zwischen CTOD und dem J -Integral, wodurch unter den getroffenen Annahmen diese beiden Bruchkenngrößen äquivalent sind.

3.3.3. Rissspitzenöffnungswinkel ψ_c und Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5

Wie bereits oben erläutert, verliert das J-Integral mit Einsetzen des Risswachstums seine für den Bruchvorgang charakteristische Bedeutung. Der Grund dafür liegt im Verlust der Wegunabhängigkeit durch Entlastungsvorgänge in Folge des Risswachstums. Die Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_t unterliegt dieser Einschränkung grundsätzlich nicht. Allerdings muss, wie in Abb. 3.10 illustriert, zwischen der Rissspitze des laufenden Risses an der Position a und der Rissspitze an der Position des Anfangsrisses a_0 unterschieden werden. Während die Rissspitze an der Position des Anfangsrisses vor dem Einsetzen des Risswachstums deutlich abstumpft (Rissspitzenöffnungsverschiebung $\delta(a_0)$), beobachtet man dieses Abstumpfen an der Spitze des laufenden Risses nur in sehr geringem Maße (Rissöffnung $\delta(a)$). Daher ist diese Rissöffnung an der Spitze des laufenden Risses keine geeignete Bruchkenngröße.

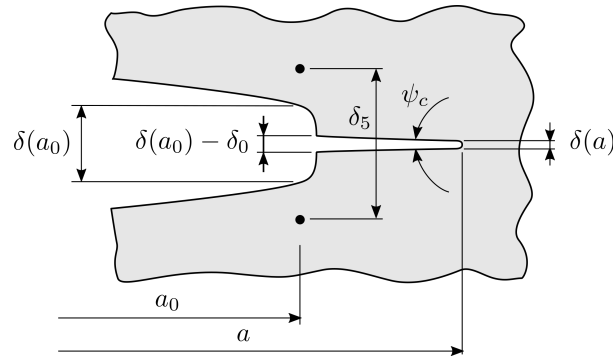


Abbildung 3.10.: Zur Definition der Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 und des Rissspitzenöffnungswinkels ψ_{CTOA}

In vielen experimentellen und numerischen Untersuchungen (siehe beispielsweise [64], [32], [85]) wurde beobachtet, dass das stabile Risswachstum in duktilen Materialien nach der Initiierungsphase durch eine selbstähnliche Rissspitzengeometrie gekennzeichnet ist. Diese Eigenschaft motiviert, den Rissöffnungswinkel (engl. Crack Tip Opening Angle) ψ_{CTOA} als Bruchkenngröße für die stabile Rissausbreitung zu definieren. Die direkte optische Messung von ψ_{CTOA} und ebenso die Ermittlung aus der Analyse des Dehnungsfeldes im Rahmen von bruchmechanischen Versuchen gestaltet sich jedoch sehr aufwändig. Einen pragmatischen Ansatz zur Ermittlung des Rissspitzenöffnungswinkels bietet die Messung der sogenannten Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 [107]. Diese Größe ist durch die Verschiebung zweier Punkte, die in der Anfangsposition exakt $\pm 2.5\text{ mm}$ über bzw. unter der Rissspitze liegen, definiert. Die Messung von δ_5 während eines bruchmechanischen Versuchs ist technisch wesentlich einfacher realisierbar und ermöglicht die Berechnung des kritischen Rissöffnungswinkels aus der Ableitung dieser Kurve im linear ansteigenden Bereich [100], [40] der δ_5 - Δa -R-Kurve:

$$\psi_{CTOA} = \frac{d\delta_5}{d\Delta a}. \quad (3.20)$$

3.3.4. Kohäsivzonenmodelle

Bei vielen Bruchvorgängen ist die plastische Zone auf einem schmalen streifenförmigen Bereich vor der Risspitze lokalisiert. Dies gilt insbesondere für dünnwandige Blechstrukturen, da die Rissausbreitung (zumindest im Fall des konstanten Risswachstums) bei vielen metallischen Werkstoffen im Wesentlichen durch ein Gleiten in Ebenen unter 45° zur Plattenebene bestimmt wird und die Zone somit im Bereich der Plattendicke liegt. Beim bereits eingeführten Dugdale-Modell [25] wird dieses Phänomen mittels einer virtuellen Verlängerung des Risses durch eine Zone der Länge r_D modelliert, in der auf die Rissufer eine rissschließende Randspannung in der Höhe der Fließspannung σ_Y wirkt. Die Länge r_D wird so gewählt, dass die Spannungs-Singularität an der virtuellen Risspitze verschwindet. Aufgrund der Annahme einer konstanten Randspannung gilt diese Modellierung besonders für elastisch-ideal-plastisches Werkstoffverhalten. Das grundlegende Konzept der streifenförmigen plastischen Zone lässt sich aber auch auf anderes Werkstoffverhalten übertragen.

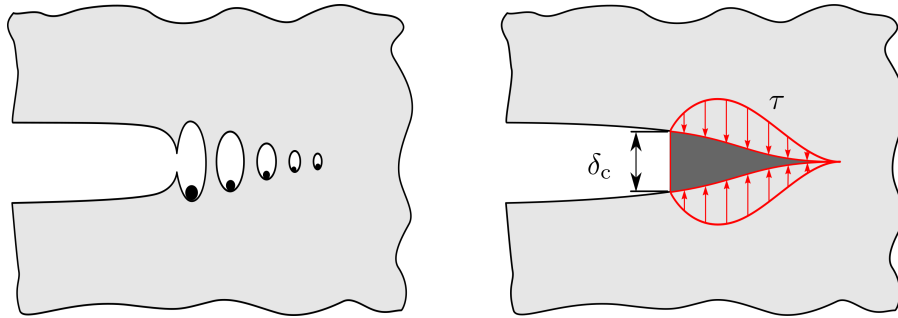


Abbildung 3.11.: Beschreibung des Duktilbruchs mit Hilfe des Kohäsivzonenmodells

Dafür wird eine rissschließende Randkraftdichte τ als Funktion der Rissufer-Separation δ definiert. Diese Funktion wird auch Kohäsivgesetz genannt und bildet sowohl das elastoplastische als auch das Versagensverhalten des Werkstoffs ab. In Abb. 3.11 ist am Beispiel des Duktilbruchs die Modellierung des Rissspitzenverhaltens veranschaulicht. Zu Beginn der Rissöffnung kommt es an der Risspitze zu elastoplastischen Deformationen und zu einer Verfestigung des Werkstoffs, die in einem ansteigenden Bereich des Kohäsivgesetzes abgebildet ist. Mit dem Einsetzen der plastischen Verformung beginnt jedoch auch die Entstehung, das Wachstum und schließlich die Vereinigung von Poren. Diese Prozesse führen zu einer Abnahme des effektiven Querschnitts vor der Risspitze und damit zu einer Entfestigung. Im Kohäsivgesetz wird dies durch den abfallenden Zweig des Randspannungsverlaufs beschrieben. Die spezifische Separationsarbeit ergibt sich aus der Fläche unter dem Kohäsivgesetz,

$$G = J = \int_0^{\delta_c} \tau d\delta, \quad (3.21)$$

und entspricht der Energiefreisetzungsrate G , bzw. dem J -Integral. Die Länge der Kohäsivzone muss, wie beim Dugdale-Modell, so gewählt werden, dass die Spannungssingularität an der virtuellen Risspitze verschwindet. In Abb. 3.12

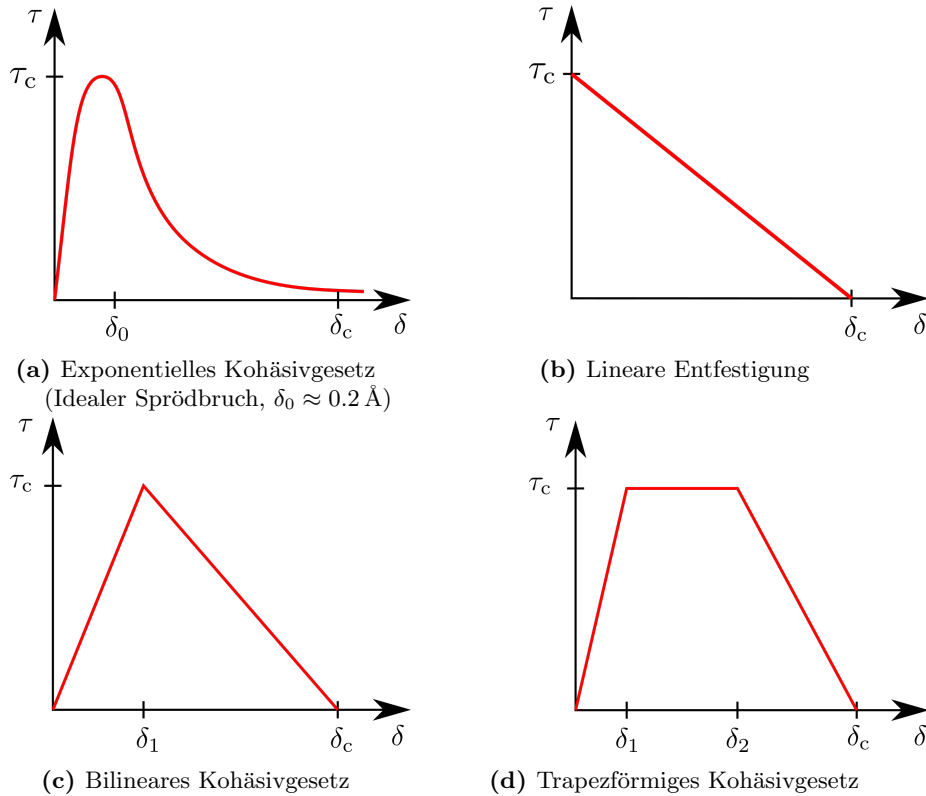


Abbildung 3.12.: Beispiele für Kohäsivgesetze

sind einige Beispiele von häufig verwendeten Kohäsivgesetzen abgebildet. Wie schon eingangs erwähnt, bildet die Form des Kohäsivgesetzes das Bruchverhalten des Werkstoffs ab. Wie beispielsweise in [34, S. 156–160] dargestellt, liegen einigen Kohäsivgesetzen mikromechanische Modellvorstellungen zugrunde, während andere rein phänomenologischen Ursprungs sind. Das in Abb. 3.12a dargestellte Kohäsivgesetz wird durch die Kohäsionskräfte auf Atomebene, die beim Trennvorgang überwunden werden, motiviert und wird besonders für spröde Materialien verwendet. Abb. 3.12b entspricht eher einem steifen bzw. starren Verhalten mit anschließender Degradation, wie es beispielsweise beim Bruch von Gesteinen oder Beton zu finden ist. Die Gesetze in Abb. 3.12c und 3.12d sind dagegen einfache Beispiele für Kohäsivgesetze, die für den Bruch duktiler Werkstoffe verwendet werden können.

Ein großer Vorteil der Kohäsivzonenmodelle liegt in der Einfachheit der Anwendung in der numerischen FE-Simulation. Da die plastischen Verformungen und die Bruchprozesse durch die Randspannungsverläufe auf den virtuell verlängerten Rissufer abgebildet werden, kann das Materialverhalten linear-elastisch beschrieben werden. Für die Kohäsivzone kommen bei der klassischen FEM eigene Kohäsivzonenelemente zum Einsatz, die entlang der erwarteten Rissausbreitung zwischen den Schalen- oder Volumenelementen liegen und im undeformierten Zustand keine Ausdehnung besitzen. Diese Elemente übertragen gemäß zugrundeliegendem Kohäsivgesetz die Kräfte zwischen den Rissufern in der Kohäsivzone. Der Nachteil dieser Modellierungsvariante besteht in der star-

ken Netzabhängigkeit, da die Genauigkeit der Rissspitzenöffnungsverschiebung durch die Diskretisierung maßgeblich beeinflusst wird. Außerdem muss entweder der Risspfad schon a priori bekannt sein, um die Kohäsivelemente entlang der entsprechenden Elementkanten zwischen die Elemente zu setzen, oder man platziert die Kohäsivelemente in einem größeren, risskritischen Bereich des FE-Netzes zwischen allen Elementkanten. In diesem Fall kann es aber insbesondere bei Kohäsivgesetzen mit einem bei 0 beginnenden ansteigenden Bereich zu einer künstlich eingebrachten Absenkung der Steifigkeit in der modellierten Struktur kommen. In dieser Arbeit wird daher ein Ansatz verfolgt, der auf analytischen, mit dem Kohäsivgesetz verträglichen Lösungen für die Spannungen und Dehnungen beruht und die Kohäsivzone innerhalb eines speziellen Elements abbilden kann.

4. Konstruktion analytischer Rissspitzenfelder

In diesem Kapitel werden die mathematischen Ansätze für die mechanischen Rissspitzenfelder auf Basis der klassischen ebenen Elastizitätstheorie hergeleitet. Da das Ziel dieser Arbeit in der Beschreibung der Rissausbreitung in dünnen Blechen besteht, werden die Betrachtungen auf dünnwandige Körper und das Vorliegen eines ebenen Spannungszustandes eingeschränkt. Basierend auf den ersten Arbeiten von Goursat [31] und Kolosov [69] und den Erweiterungen von Muskelishvili [81] kann das Problem der zweidimensionalen Elastizität sehr elegant und kompakt mit Hilfe der Theorie komplexer Funktionen behandelt werden. Ein guter Überblick dazu findet sich beispielsweise in [81], [26] und [102]. Nach einer kurzen Einführung werden in dieser Arbeit Lösungsansätze für zweidimensionale Rissprobleme erarbeitet. Dabei wird eine durchgängige Strategie zur Konstruktion von Lösungen für ebene Rissprobleme unter Berücksichtigung einer streifenförmigen plastischen Zone vor der physikalischen Rissspitze (Kohäsivzonenmodell) skizziert und die Rissspitzenfelder für einfache Kohäsivgesetze hergeleitet. Die so konstruierten Funktionen sind exakte Lösungen der zugrunde liegenden Differentialgleichung sowie der Neumann-Teilrandbedingung an den Rissufern. Die Lösungsfolgen mit ihren zugehörigen freien Koeffizienten können daraufhin, wie im nächsten Kapitel beschrieben, mit der konventionellen Finite Elemente Methode über verschiedene Methoden gekoppelt oder in einer mitlaufenden Postprocessing-Routine zur Bewertung des Rissausbreitungsrisikos verwendet werden.

4.1. Ebene Elastizitätstheorie

Wie in Abb. 4.1 dargestellt, wird im Folgenden ein ebener homogener isotroper elastischer Körper mit konstanter Dicke t angenommen, wobei t sehr viel kleiner als die anderen Ausdehnungen des Körpers sei. Das Lösungsgebiet, d.h. die Menge aller Referenzkoordinaten der Materialpunkte des Körpers wird mit Ω bezeichnet. Vereinfachend wird angenommen, dass Ω ein einfach zusammenhängendes Lösungsgebiet darstellt. Diese Vereinfachung wird eingeführt, da in dieser Arbeit nur einseitig offene Risse und keine Lösungsgebiete mit Löchern oder Innenrissen behandelt werden¹. Der Körper ist an einem Teilrand Γ_0 über eine Dirichlet-Randbedingung eingespannt, während auf dem übrigen Rand Γ_1 eine Neumann-Randbedingung wirkt.

¹Die Theorie lässt sich auch für Lösungsgebiete, die nicht einfach zusammenhängend sind, anwenden. In diesem Fall müssen jedoch mögliche Polstellen in den nicht zum Lösungsgebiet gehörenden eingeschlossenen Gebieten berücksichtigt werden.

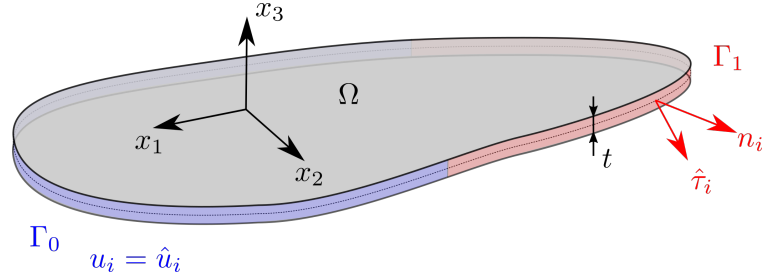


Abbildung 4.1.: Zweidimensionaler elastischer Körper im ebenen Spannungszustand (Lösungsgebiet Ω). Die Dirichlet-Randbedingung auf Γ_0 und Neumann-Randbedingung auf Γ_1 wirken nur in der Ebene, d.h. die Komponenten in x_3 -Richtung verschwinden.

4.1.1. Die Navier-Cauchysche Differentialgleichung

Zur Definition der Dehnung gehen wir von kleinen Verformungen aus, d.h. es wird angenommen, dass ein Materialpunkt des Körpers mit der Position x_i ($i, j = 1, 2$) in kartesischen Koordinaten nur infinitesimale Verschiebungen u_i erfährt. Die Dehnung ϵ_{ij} ist dann definiert durch

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.1)$$

Als Materialgesetz gelte das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz, das für isotrope Materialien in der Schreibweise mit den Lamé-Konstanten μ und λ durch

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (4.2)$$

gegeben ist, wobei δ_{ij} das Kronecker delta mit $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ darstellt. Es gelte die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über benachbarte gleiche Indizes ist zu summieren.

Der Körper befindet sich im mechanischen Gleichgewicht, sofern die Summe der Kräfte für jedes durch die Fläche Γ_T eingeschlossene Volumen Ω_T im Inneren des Körpers verschwindet, d.h.:

$$\int_{\Gamma_T} \sigma_{ij} n_j d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} \rho \hat{b}_i d\Omega_T = 0, \quad (4.3)$$

wobei ρ die Massendichte und \hat{b}_i , die auf den Körper wirkende äußere Kraftdichte darstellen. Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes und aufgrund der Beliebigkeit des Teilgebietes Ω_i erhält man die Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \hat{b}_i = 0. \quad (4.4)$$

Die Kombination der kinematischen Beziehung (4.1) mit dem Materialgesetz (4.2) und der Gleichgewichtsbeziehung (4.4) führt schließlich zu den Navier-

Cauchy-Gleichungen

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_r \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_r^2} + \rho \hat{b}_i = 0. \quad (4.5)$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage der linearen Elastizität. Gemeinsam mit den Randbedingungen

$$u_i = \hat{u}_i \text{ auf } \Gamma_0, \quad (4.6a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{\tau}_i \text{ auf } \Gamma_1, \quad (4.6b)$$

wie exemplarisch in Abb. 4.1 dargestellt, bilden sie ein ebenes elastisches Randwertproblem. Dabei ist \hat{u}_i eine vorgegebene Randverschiebung und $\hat{\tau}_i$ eine von außen aufgeprägte Randspannung.

4.1.2. Komplexe Darstellung

Für die weitere mathematische Behandlung wird für (4.5) nun die komplexe Darstellung eingeführt, wobei ab nun die kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 mit x und y bezeichnet werden. Die Positionen der Massenpunkte werden durch die komplexe Variable z und die zugehörige konjugiert komplexe Variable \bar{z} gemäß

$$\begin{aligned} z &= x + i y, \\ \bar{z} &= x - i y \end{aligned} \quad (4.7)$$

repräsentiert. Analog wird mit

$$q = u_x + i u_y \quad (4.8)$$

eine komplexe Verschiebungsgröße q und mit

$$b = \hat{b}_x + i \hat{b}_y \quad (4.9)$$

eine komplexe Volumskraft b definiert. Mit der Einführung der partiellen Differentialoperatoren (Wirtinger-Operatoren)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.10b)$$

erhält man die folgende komplexe Darstellung der Navier-Cauchy'schen Differentialgleichung

$$2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + 4\mu \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{z} \partial z} + \rho b = 0. \quad (4.11)$$

Falls sich die Volumskraft b als Ableitung eines reellen Potentials darstellen lässt oder, wie hier angenommen, auf Ω identisch verschwindet, kann die partielle Ableitung nach \bar{z} auf der linken Seite von (4.11) herausgezogen werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\underbrace{2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + 4\mu \frac{\partial q}{\partial z}}_{=:\theta'} \right] = 0. \quad (4.12)$$

Das Verschwinden der Ableitung $\partial\theta'/\partial\bar{z}$ bedeutet, dass θ' auf dem Definitionsbereich Ω eine holomorphe Funktion ist. Durch Auflösen von (4.12) in Real- und Imaginärteil gemäß

$$4(\lambda + 2\mu) \Re\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(\theta'(z) + \bar{\theta}'(z)) \quad (4.13a)$$

$$4\mu \Im\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) = \frac{1}{2i}(\theta'(z) - \bar{\theta}'(z)) \quad (4.13b)$$

erhält man die explizite Darstellung der Differentialgleichung

$$8\mu(\lambda + 2\mu) \frac{\partial q}{\partial z} = (\lambda + 3\mu)\theta'(z) - (\lambda + \mu)\bar{\theta}'(z). \quad (4.14)$$

Da $\partial q/\partial z$ ein linearer Differentialoperator ist, besteht die allgemeine Lösung für q der Gl. (4.14) aus der Summe aller homogenen und einer partikulären Lösung, d.h.:

$$q = q_h + q_p. \quad (4.15)$$

Aus $\partial q_h/\partial z = 0$ folgt $\partial \bar{q}_h/\partial \bar{z} = 0$, was bedeutet, dass die konjugiert komplexe homogene Lösung \bar{q}_h durch eine weitere beliebige holomorphe Funktion $\omega(z)$ repräsentiert werden kann. Zur Bestimmung der partikulären Lösung kann (4.14) einfach integriert werden und führt nach einer Umformung zu

$$2\mu q_p = \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}\theta(z) - \frac{\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)}z\bar{\theta}'(z). \quad (4.16)$$

Mit den Substitutionen

$$\phi(z) = \frac{\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)}\theta(z), \quad (4.17a)$$

$$\psi(z) = 2\mu\omega(z) \quad \text{und} \quad (4.17b)$$

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \quad (4.17c)$$

erhält man schließlich die folgende sehr kompakte Form der allgemeinen Lösung der Navier-Cauchy Gleichung in komplexer Darstellung

$$2\mu q = \kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(z) - \bar{\psi}(z). \quad (4.18)$$

Um auch Lösungen für die Spannungen angeben zu können, kombiniert man

(4.1) mit (4.2) und erhält mit den komplexen Differentialoperatoren in (4.10) und den oben eingeführten komplexen Potentialen ϕ und ψ die folgenden, zuerst von Kolosov [69] eingeführten Beziehungen

$$\sigma_h = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{z}} \right) = \phi'(z) + \overline{\phi'}(z), \quad (4.19a)$$

$$\sigma_d = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) - i\tau_{xy} = \mu \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = z\overline{\phi''}(z) + \overline{\psi'}(z). \quad (4.19b)$$

Aus diesen Gleichungen können alle Komponenten des Spannungstensors berechnet werden. Insbesondere ergibt sich aus den Größen σ_h und σ_d die auf ein infinitesimales Linienelement mit dem Normalenvektor n wirkende Randkraft

$$\tau = \sigma_h n + \sigma_d \bar{n}. \quad (4.20)$$

Damit wurde gezeigt, dass sich die Lösung des Problems der Elastizität in der Ebene auf das Auffinden zweier holomorpher Potentiale $\phi(z)$ und $\psi(z)$ zurückführen lässt. Sind diese Potentiale festgelegt, so können die Verschiebungen und Spannungen in jedem Punkt des Körpers aus den Potentialen und ihren Ableitungen gemäß (4.18) und (4.19) berechnet werden. Unter der bereits vorhin getroffenen Annahme, dass das Lösungsgebiet einfach zusammenhängend ist und keine Löcher oder sonstige innere Berandungen enthält, sind die beiden Potentiale auf Ω eindeutig und können durch Laurent-Reihen mit ausschließlich positiven Exponenten, d.h. durch Potenzreihen der Form

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad (4.21a)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad (4.21b)$$

dargestellt werden. Ohne weitere Einschränkung durch Randbedingungen würden beliebige komplexe Koeffizienten A_n und B_n zu Potentialen führen, die über (4.18) und (4.19) mit der Navier-Cauchy'schen Differentialgleichung verträglich sind. Erst durch die Randbedingungen werden die Koeffizienten festgelegt und führen zu einer eindeutigen Lösung des ebenen Randwertproblems. Je nach vorliegender Geometrie des Lösungsgebietes kann sich die Berücksichtigung der Randbedingung als sehr schwierig gestalten. Bevor im nächsten Schritt die Randbedingung in den Potentialen für ein konkretes Rissproblem berücksichtigt wird, wird noch eine Vereinfachung eingeführt. Dazu betrachte man die Kraft, die auf ein Liniensegment ds im elastisch verformten Körper wirkt. An einem infinitesimalen Dreieck mit den Seiten dx , dy und ds gilt für die auf ds

wirkende Kraftdichte τ die Gleichung

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_x + i\tau_y = \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} - \sigma_{xy} \frac{dx}{ds} + i \left(\sigma_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_{yy} \frac{dx}{ds} \right) \\ &= \underbrace{(\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})}_{\stackrel{(4.19)}{=} \phi' + \bar{\phi}' - z\bar{\phi}'' - \bar{\psi}'} \frac{dy}{ds} - i \underbrace{(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})}_{\stackrel{(4.19)}{=} \phi' + \bar{\phi}' + z\bar{\phi}'' + \bar{\psi}'} \frac{dx}{ds}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Nach Substituieren der Spannungsterme durch die elastischen Potentiale, anschließender Umformung und Herausziehen der Ableitung d/ds , erhält man für die Kraftdichte

$$\tau = -i \frac{d}{ds} (\phi(z) + z\bar{\phi}'(z) + \bar{\psi}(z)). \quad (4.23)$$

Die Kraft f_S auf ein Liniensegment S zwischen den Punkten z_0 und z_1 ergibt sich damit sehr einfach durch Integration zu

$$f_S = -i [\phi(z) + z\bar{\phi}'(z) + \bar{\psi}(z)]_{z_0}^{z_1} \quad (4.24)$$

Aufgrund der kompakten Form und der Eigenschaft, dass nur eine Ableitung erster Ordnung in den Potentialtermen auftritt, wird diese Gleichung bevorzugt zur Berücksichtigung von Kraft-Randbedingungen verwendet. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Randbedingungen zur Festlegung der Potentiale anhand eines einseitig offenen Rissproblems berücksichtigen lassen.

4.2. Risspitzenmodelle

Wir betrachten nun ein ∞ -großes Lösungsgebiet Ω , das einen Riss auf der negativen reellen Achse und der Risspitze im Koordinatenursprung enthält. Als Randbedingung dieses Problems wird nur die Kräftefreiheit an den Rissufern berücksichtigt. Die Spannungen in unendlichem Abstand von der Risspitze bleiben vorerst unberücksichtigt. Eine Möglichkeit, Geometrien in der komplexen Ebene zu vereinfachen, bietet die Methode der Konformen Abbildungen. Eine gute Einführung in diese Theorie findet man beispielsweise in [103], [23] und [28]. Wie in Abb. 4.2 gezeigt, lässt sich mit Hilfe der Abbildung

$$f(\zeta) = -\zeta^2 \quad (4.25)$$

die Rissgeometrie aus der oberen Halbebene erzeugen. Zur klaren Unterscheidung wird die Ebene, die das Lösungsgebiet Ω mit der physikalischen Rissgeometrie enthält, mit z -Ebene und diejenige, in der das vereinfachte Lösungsgebiet Ω^+ liegt, mit ζ -Ebene bezeichnet. Die Rissufer werden durch die konforme Abbildung $f(\zeta)$ von der gesamten reellen ξ -Achse in der ζ -Ebene auf die negative x -Achse in der z -Ebene abgebildet. Mit Einführung dieser Abbildung wird das Problem nun in die obere Halbebene verlagert, in der am Rissufer wirkende Kräfte bzw. Kraftdichteverläufe leichter zu berücksichtigen sind, da die im ursprünglichen physikalischen Raum infinitesimal aneinander liegenden Rissufer

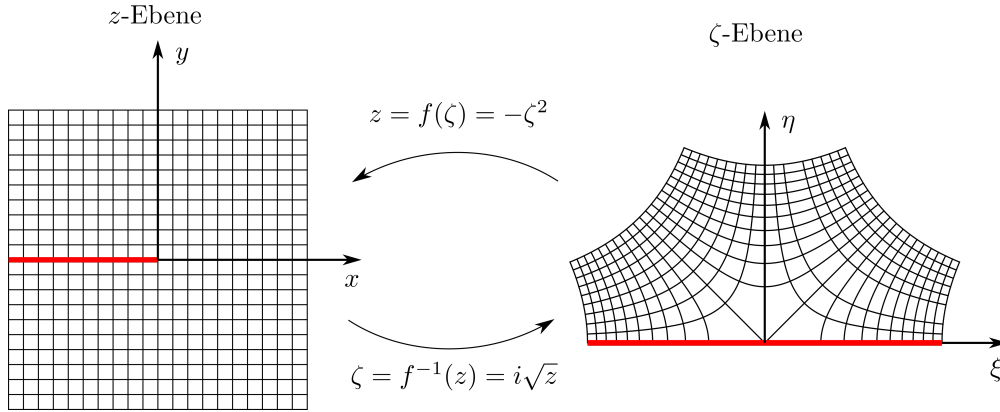


Abbildung 4.2.: Erzeugung einer halbseitig offenen Rissgeometrie in der komplexen z -Ebene durch Faltung mit Hilfe einer konformen Abbildung $f(\zeta) = -\zeta^2$ aus der oberen Halbebene.

in der ζ -Ebene die reelle Achse bilden und klar getrennt sind. Durch Einführung der konformen Abbildung in den Verschiebungs- und Spannungslösungen in (4.18) und (4.19) in der ζ -Ebene erhält man für die Verschiebungslösung in der ζ -Ebene

$$2\mu q(\zeta) = \kappa \phi(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)} \bar{\phi}(\zeta) - \bar{\psi}(\zeta), \quad (4.26)$$

und für die Spannungslösungen die Gleichungen

$$\sigma_h = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{\dot{\phi}(\zeta)}{f(\zeta)} + \frac{\bar{\dot{\phi}}(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)}, \quad (4.27a)$$

$$\sigma_d = \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) - i\sigma_{xy} = f(\zeta) \left(\frac{\bar{\ddot{\phi}}(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)^2} - \frac{\ddot{f}(\zeta)}{f(\zeta)^3} \bar{\phi}(\zeta) \right) + \frac{\bar{\dot{\psi}}(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)}, \quad (4.27b)$$

wobei der Überpunkt die komplexe Ableitung nach der Variable ζ bezeichnet.

4.2.1. Linear-elastisches Rissmodell

Zur Konstruktion von Lösungen können in der oberen ζ -Halbebene für die Potentiale die Potenzreihenansätze gemäß (4.21) verwendet werden, da das Lösungsgebiet einfach zusammenhängend ist und keinerlei Löcher oder Polstellen enthält. Die Randbedingung der Kräftefreiheit am Rissufer wird über das Verschwinden der Kraft auf ein Liniensegment, wie in (4.24) angegeben, auf der reellen ξ -Achse berücksichtigt, d.h. es gilt

$$\phi(\xi) + \frac{f(\xi)}{\bar{f}(\xi)} \bar{\phi}(\xi) + \bar{\psi}(\xi) = 0, \quad (4.28)$$

wobei $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq \mathbb{R}$. Zum Auffinden eines Ansatzes für die Funktion $\psi(\zeta)$,

der die obige Gleichung in $[\xi_1, \xi_2]$ auf der reellen Achse erfüllt, wird für $\phi(\zeta)$ und $f(\zeta)$ das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip verwendet. Auf dieses Prinzip wird an dieser Stelle näher eingegangen, da die Erfüllung der Teilrandbedingung (auch im später behandelten inhomogenen Fall) in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielt. Zuerst wird (4.28) nach $\psi(\xi)$ aufgelöst und liefert

$$\psi(\xi) = -\bar{\phi}(\xi) + \frac{\bar{f}(\xi)}{f(\xi)} \dot{\phi}(\xi). \quad (4.29)$$

Falls die Funktionen $\phi(\zeta)$ und $f(\zeta)$ nicht nur im Bereich Ω^+ , sondern auch in dem an der reellen Achse gespiegelten Lösungsbereich Ω^- holomorph und im Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ eindeutig sind, so sind auch die Funktionen $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$ und $\bar{f}(\bar{\zeta})$ in Ω^+ holomorph. Dies folgt direkt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, wie hier beispielhaft für $\phi(\zeta)$ gezeigt wird. Für die holomorphe Funktion $\phi(\zeta) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)$ mit $\zeta = \xi + i \eta \in \Omega^+$ gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei $u, v, \xi, \eta \in \mathbb{R}$. Betrachtet man nun den Real- und Imaginärteil der Funktion $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$, so ist dieser durch

$$\begin{aligned} \Re[\bar{\phi}(\bar{\zeta})] &=: \hat{u}(\xi, \eta) = u(\xi, -\eta), \\ \Im[\bar{\phi}(\bar{\zeta})] &=: \hat{v}(\xi, \eta) = -v(\xi, -\eta), \end{aligned} \quad (4.31)$$

gegeben, falls der Definitionsbereich von $u(\xi, \eta)$ und $v(\xi, \eta)$ auf den gespiegelten Lösungsbereich Ω^- erweitert wird. Die partiellen Ableitungen von $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$ sind dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \hat{u}(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \hat{v}(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \hat{v}(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (4.30) auch im erweiterten Bereich Ω^- , so folgt wegen (4.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\partial \hat{v}(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \hat{u}(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \hat{v}(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

und damit die Holomorphie von $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$ in Ω^+ . Betrachtet man nun den Grenzübergang von $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$ in Richtung der reellen Achse aus der oberen Halbebene,

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \bar{\phi}(\bar{\zeta}) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \hat{u}(\xi, \eta) + i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \hat{v}(\xi, \eta) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} u(\xi, -\eta) - i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} v(\xi, -\eta) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} u(\xi, \eta) - i \lim_{\eta \rightarrow 0^-} v(\xi, \eta) \\
&= u(\xi, 0) - i v(\xi, 0),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

so sieht man, dass auf der reellen Achse $\zeta = \xi \in \mathbb{R}$ die Funktion $\phi(\zeta) = \bar{\phi}(\bar{\zeta})$ ist, sofern $v(\xi) \equiv 0$, d.h. $\phi(\zeta)$ auf der reellen Achse reellwertig ist. Dieselben Überlegungen gelten auch für die konforme Abbildung $f(\zeta)$. Somit lassen sich in (4.29) die holomorphen Funktionen $\phi(\zeta)$ und $f(\zeta)$ durch die entsprechenden Funktionen $\bar{\phi}(\bar{\zeta})$ und $\bar{f}(\bar{\zeta})$ ersetzen und man erhält den gesuchten Ansatz für $\psi(\zeta)$ mit

$$\psi(\zeta) = -\bar{\phi}(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{f}(\bar{\zeta})}{f(\zeta)} \dot{\phi}(\zeta). \tag{4.35}$$

Durch Einsetzen von (4.35) in (4.26) erhält man mit

$$2\mu q = \kappa \phi(\zeta) + \phi(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\phi}(\bar{\zeta})}{\bar{f}(\bar{\zeta})} (f(\zeta) - f(\bar{\zeta})) \tag{4.36}$$

die Verschiebungslösung, die der Neumann-Randbedingung (4.28) genügt und nur mehr vom komplexen Potential ϕ und dessen Ableitung abhängt. Da das Potential $\phi(\zeta)$ auf Ω^+ holomorph ist, lässt es sich als Potenzreihe

$$\phi(\zeta) = \sum_{k=0}^K A_k \zeta^k, \tag{4.37}$$

darstellen. Setzt man nun (4.37) in Gl. (4.36) ein, so erhält man die Reihendarstellung der Verschiebungslösungen von Gl. (4.12):

$$q(\zeta) = \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{k=0}^K \kappa A_k \zeta^k + \sum_{k=0}^K \bar{A}_k \bar{\zeta}^k - \frac{f(\zeta) - f(\bar{\zeta})}{\bar{f}(\bar{\zeta})} \sum_{k=1}^K k \bar{A}_k \bar{\zeta}^{k-1} \right). \tag{4.38}$$

Ebenso erhält man durch Einsetzen von (4.35) und (4.37) in die Gln. (4.27a)

und (4.27b) die Lösungsfolgen für die Spannungsterme:

$$\sigma_h = \frac{1}{f(\zeta)} \sum_{k=0}^K k A_k \zeta^{k-1} + \frac{1}{\bar{f}(\zeta)} \sum_{k=0}^K k \bar{A}_k \bar{\zeta}^{k-1}, \quad (4.39a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_d = & \frac{f(\zeta) - f(\bar{\zeta})}{\bar{f}(\zeta)^2} \left(\sum_{k=0}^K k(k-1) \bar{A}_k \bar{\zeta}^{k-2} - \frac{\bar{f}(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)} \sum_{k=0}^K k \bar{A}_k \bar{\zeta}^{k-1} \right) \\ & - \frac{1}{\bar{f}(\zeta)} \sum_{k=0}^K k A_k \bar{\zeta}^{k-1}. \end{aligned} \quad (4.39b)$$

Starrkörpermoden

In der Reihendarstellung, Gl. (4.38), sind auch Terme enthalten, die zu verschwindenden Spannungen bzw. Dehnungen führen und somit lediglich Freiheitsgrade der Starrkörpertranslation und Starrkörperrotation beschreiben. Die Identifikation dieser Terme ist wichtig, wenn, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, die Lösungsfolgen zur Herleitung der Steifigkeitsmatrix eines hybriden Elements benutzt werden. Da diese Terme Nullenergiemoden darstellen, führen sie bei der Minimierung des elastischen Potentials zum Auftreten einer singulären Matrix und müssen daher vorher aus dem obigen Reihenansatz entfernt werden. Während die Translationsfreiheitsgrade sehr einfach durch die komplexe Konstante A_0 in der Gl. (4.38) zu identifizieren sind, ist das Auffinden des rotatorischen Freiheitsgrades etwas schwieriger. Analysiert man die Spannungsterme in den Gln. (4.39a) und (4.39b) und löst die Gln. nach den Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} auf, so findet man, dass die Invariante im Imaginärteil des zu A_2 gehörigen Spannungsterms liegt und die zugehörigen Terme aus den Reihen für die Verschiebungen und Spannungen entfernt werden müssen.

Spannungsintensitätsfaktoren

Betrachtet man die zum Koeffizienten A_1 gehörigen Spannungsterme unter Berücksichtigung der inversen konformen Abbildung $\zeta = i\sqrt{z}$, so sieht man, dass dieser Koeffizient die Stärke der $1/\sqrt{r}$ -Singularität bestimmt und mit den Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} gemäß

$$K_I = -\sqrt{2\pi} \Im(A_1), \quad (4.40a)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \Re(A_1), \quad (4.40b)$$

in Beziehung steht. In Kapitel 5 werden verschiedene Methoden beschrieben, wie die Lösungsfolgen im Rahmen der Finite Elemente Simulation eingesetzt werden können. Allen Methoden gemein ist, dass die Koeffizienten A_k an die umgebenden Finiten Elemente angepasst werden. Somit können die Spannungsintensitätsfaktoren nach dieser Anpassung direkt ausgewertet werden.

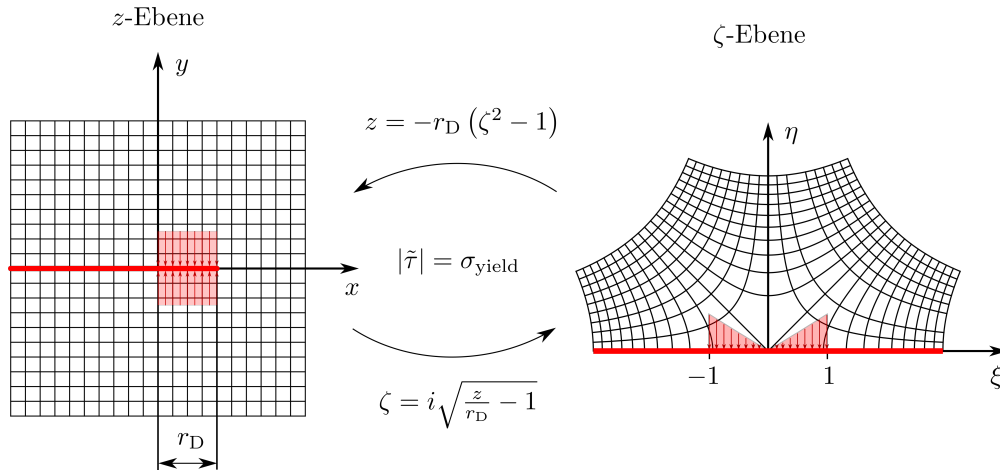


Abbildung 4.3.: Dugdale Modell: Durch die konforme Abbildung $z = -r_D(\zeta^2 - 1)$ wird die Rissgeometrie aus der oberen komplexen Halbebene erzeugt. Die streifenförmige plastische Zone nimmt in der ursprünglichen Konfiguration das Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen Achse ein.

4.2.2. Kohäsivzonenmodell nach Dugdale

Die ersten Ansätze für Kohäsivzonenformulierungen gehen zurück auf Dugdale und Barenblatt ([25],[10]) und wurden für einen inneren Riss in einer unendlich großen Scheibe für ein nicht verfestigendes Materialverhalten im ebenen Spannungszustand formuliert. Das elastisch-plastische Materialverhalten wird durch eine Überlagerung der linear-elastischen Lösung für einen kräftefreien Riss und einer Lösung für eine rissschließende Randkraftdichte in einer streifenförmigen Zone vor der eigentlichen Rissspitze modelliert. Durch diese Modellierung bleibt das Materialverhalten linear-elastisch und kann mit den Methoden der ebenen Elastizitätstheorie behandelt werden. Das Modell wird hier für Mixed-Mode (I und II) verallgemeinert, indem die konstante Randkraftdichte $\hat{\tau}_D$ im Falle einer Mode II-Komponente nicht mehr senkrecht zum Riss steht, d.h. im Rahmen der komplexen Notation ist $\hat{\tau}_D \in \mathbb{C}$. Die Länge der Dugdale-Zone r_D und die Randkraftdichte $\hat{\tau}_D$ werden bestimmt, indem gefordert wird, dass die Spannungssingularität an $z = r_D$ bzw. $\zeta = 0$ verschwindet.

Bestimmung der komplexen Potentiale ϕ und ψ

Zur Konstruktion der analytischen Lösung unter Berücksichtigung einer Kohäsivzone wird die konforme Abbildung in (4.25) durch Einführung einer charakteristischen Länge r_D der streifenförmigen plastischen Zone (Dugdale-Zone) gemäß

$$f(\zeta) = -r_D(\zeta^2 - 1) \quad (4.41)$$

modifiziert. Wie in Abb. 4.3 dargestellt, bildet die konforme Abbildung (4.41) wieder die obere komplexe Halbebene in der ζ -Ebene auf die gesamte z -Ebene ab. Die Besonderheit dieser Modifikation besteht darin, dass die Dugdale-Zone mit der Länge r_D auf der reellen x -Achse in der z -Ebene nach Transformation

über die inverse konforme Abbildung $\zeta = f^{-1}(z)$ in der zugehörigen ζ -Ebene das Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen Achse einnimmt. Wie beim kräftefreien Riss wird wieder die integrierte Randkraft mit fixierter unterer und variabler oberer Integrationsgrenze als kompaktere Form der Neumann-Randbedingung [91] gewählt. Da nun im Intervall $(-1, 1)$ auf der ξ -Achse eine Randkraftdichte $\hat{\tau}_D$ wirkt, erhält man als Randbedingung nun

$$\phi(\xi) + \frac{f(\xi)\bar{f}(\xi)}{\bar{f}(\xi)}\bar{\phi}(\xi) + \bar{\psi}(\xi) = \begin{cases} \hat{\tau}_D f(\xi) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{für } |\xi| \geq 1 \end{cases} .$$

Setzt man wie beim kräftefreien Riss den Ansatz für ψ (4.35) in (4.42) ein, so ergibt sich

$$\left[\phi(\zeta) - \phi(\bar{\zeta}) + \frac{f(\zeta) - f(\bar{\zeta})\bar{f}(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)}\bar{\phi}(\zeta) \right]_{\zeta=\xi^+} = \begin{cases} \hat{\tau}_D f(\xi) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{für } |\xi| \geq 1 \end{cases} , \quad (4.42)$$

wobei $\zeta = \xi^+$ den Grenzübergang von ζ und $\bar{\zeta}$ in Richtung der reellen ξ -Achse aus der oberen bzw. unteren Halbebene bedeutet. Da $f(\zeta)$ eine in der gesamten ζ -Ebene eindeutige Funktion darstellt und der Ausdruck $[f(\zeta) - f(\bar{\zeta})\bar{f}(\zeta)]_{\zeta=\xi^+}$ in (4.42) verschwindet, erhält man als Randbedingung die Gleichung

$$[\phi(\zeta) - \phi(\bar{\zeta})]_{\zeta=\xi^+} = \begin{cases} \hat{\tau}_D f(\xi) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{für } |\xi| \geq 1 \end{cases} . \quad (4.43)$$

Es wird nun eine Funktion $\phi(\zeta)$ gesucht, die in der oberen Halbebene Ω^+ der ζ -Ebene holomorph ist. Die Funktion muss zudem im Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen ξ -Achse einen Verzweigungsschnitt aufweisen, um die Randbedingung (4.43) zu erfüllen. Dazu wird für das Potential $\phi(\zeta)$ der Ansatz

$$\phi(\zeta) = \underbrace{\sum_{k=0}^K A_k \zeta^k}_{=: \phi_h} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{W}_n(\zeta)}_{=: \phi_p} , \quad (4.44)$$

gewählt, wobei der homogene Teil $\phi_h(\zeta)$ durch eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten A_k repräsentiert wird. Für den inhomogenen Teil wird ein Reihenansatz mit speziellen Basisfunktionen der Form

$$\hat{W}_n(\zeta) = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^n \quad (4.45)$$

mit komplexen Koeffizienten a_n gewählt.

Aufgrund des mehrdeutigen Wurzel-Ausdrucks in (4.45) besteht \hat{W}_n für jede Ordnung n aus zwei Riemannschen Blättern, wie exemplarisch in Abb. 4.4 für die erste Ordnung \hat{W}_1 dargestellt. Aus diesen Blättern wird jenes Blatt ausgewählt, für welches $\hat{W}_n \rightarrow 0$ bei $|\zeta| \rightarrow \infty$. Außerdem besitzt jede Basisfunktion \hat{W}_n zwei Verzweigungspunkte bei $\xi = \pm 1$. Zur Konstruktion der inhomogenen Lösung wird im Weiteren der Verzweigungsschnitt auf der reellen Achse gewählt, der beide Punkte verbindet. Für $|\xi| \geq 1$ wird die Randbedingung in (4.43) durch (4.44) mit (4.45) bereits erfüllt. Um die Randbedingung

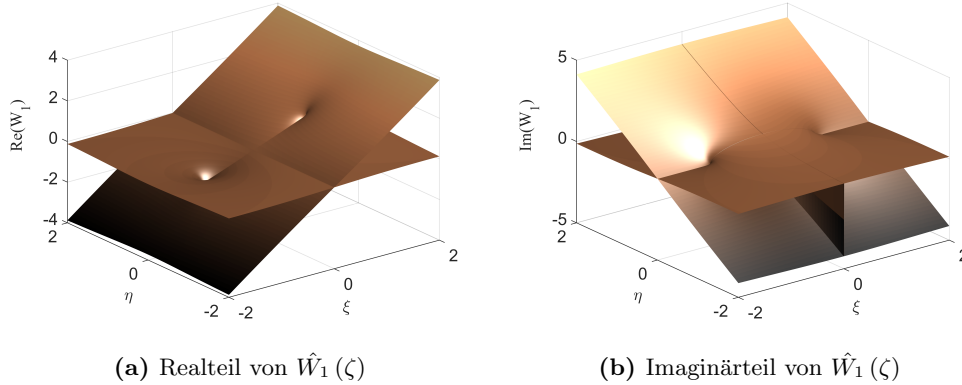


Abbildung 4.4.: Real- und Imaginärteile der ersten Ordnung der Funktionenbasis $\hat{W}_n(\zeta)$ mit beiden Riemannschen Blättern. Es ist zu erkennen, dass nur ein Blatt in der komplexen Ebene beschränkt bleibt, während für das andere Blatt sowohl Real- als auch Imaginärteil für $\xi, \eta \rightarrow \pm\infty$ gegen $\pm\infty$ streben. Diese Beschränktheit auf \mathbb{C} ist eine notwendige Eigenschaft der Basisfunktionen, aufgrund derer nur diese Blätter zur Approximation der Randbedingungen herangezogen werden.

auch für $|\xi| < 1$ zu erfüllen, müssen die komplexen Koeffizienten a_n passend gewählt werden. Einsetzen von (4.44) in (4.43) liefert im Intervall $|\xi| < 1$ die Gleichung

$$[\phi_p(\zeta) - \phi_p(\bar{\zeta})]_{\zeta=\xi+} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(\xi - i\sqrt{1-\xi^2})^n - (\xi + i\sqrt{1-\xi^2})^n \right]. \quad (4.46)$$

Im nächsten Schritt wird die reelle Variable ξ durch $\xi = \cos(\varphi)$ substituiert und in (4.43) und (4.46) eingesetzt. Durch Anwenden der Euler-Formel auf $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ erhält man mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\varphi) = \frac{i}{2} \hat{\tau}_{DrD} \sin^2(\varphi), \quad (4.47)$$

die Randbedingung in der neuen Variablen φ im Intervall $(0, \pi)$. Die linke Seite von (4.47) ist eine Fourier-Sinus-Reihe, die im Intervall $(0, \pi)$ eine vollständige Funktionenbasis bildet. Da die Cosinusfunktion das Intervall $(0, \pi)$ bijektiv auf das Intervall $(-1, 1)$ abbildet, ist auch die Funktionenbasis $\hat{W}_n(\zeta)$ auf der reellen Achse im Intervall $(-1, 1)$ vollständig. Mit anderen Worten: jede stetige Randkraft, die nur im Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen Achse ungleich 0 ist, lässt sich mit Hilfe der Funktionenbasis $\hat{W}_n(\zeta)$ beliebig genau approximieren. Aufgrund der Holomorphie der Basis $\hat{W}_n(\zeta)$ ist gleichzeitig gewährleistet, dass die zugehörigen Verschiebungen (4.26) und Spannungen gemäß (4.27a) und (4.27b) mit der Navier-Cauchy'schen Differentialgleichung (4.11) verträglich sind. Zur Illustration der Approximation der Randbedingung sind Real- und Imaginärteil der ersten drei Ordnungen der Funktionenbasis $\hat{W}_n(\zeta)$ in Abb. 4.5 dargestellt.

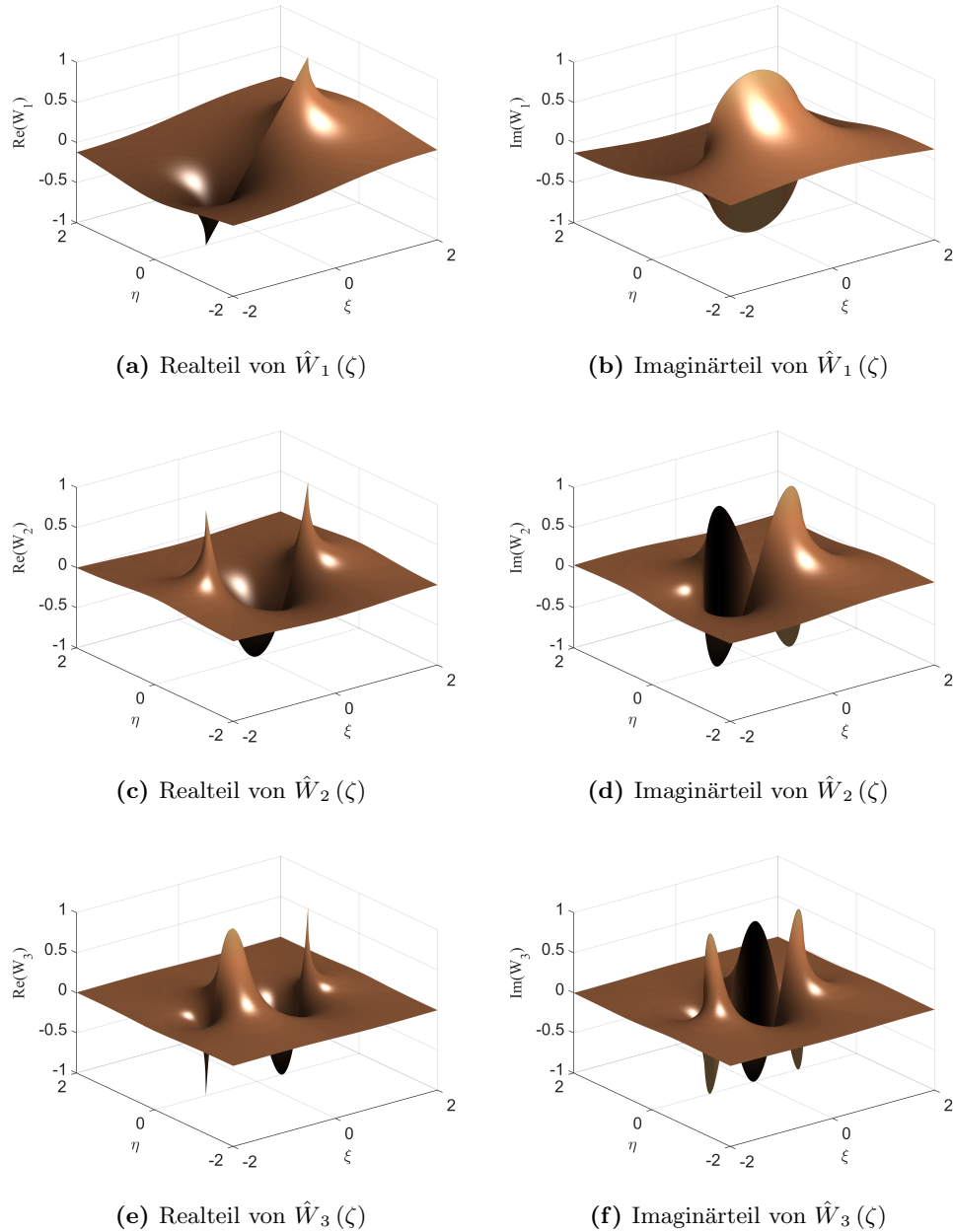


Abbildung 4.5.: Real- und Imaginärteile der ersten drei Ordnungen der holomorphen Basisfunktionen $\hat{W}_n(\zeta)$, wobei $\zeta = \xi + i\eta$ das konform abgebildete Lösungsgebiet ist.

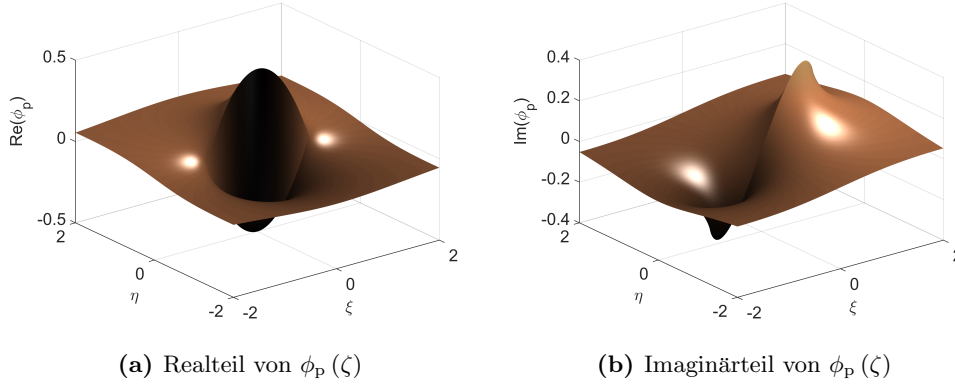


Abbildung 4.6.: Real- und Imaginärteil des inhomogenen Anteils des Potentials $\phi_p(\zeta)$ zur Befriedigung der konstanten Krastranddichte am Rissufer (Dugdale-Modell)

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n bildet man das Skalarprodukt von (4.47) mit der Fourierbasis $\sin(m\varphi)$ im Intervall $\varphi \in (0, \pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi}_{=\frac{\pi}{2} \delta_{mn}} = \frac{i}{2} \hat{\tau}_D r_D \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi}_{=\frac{2((-1)^m - 1)}{m(m^2 - 4)}} , \quad (4.48)$$

wobei $m \in \mathbb{N}$. Diese Integrale können analytisch ausgewertet werden und liefern die Koeffizienten

$$a_m = -\frac{4i}{\pi} \hat{\tau}_D r_D \begin{cases} \frac{1}{m(m^2 - 4)} & \text{für ungerade } m \\ 0 & \text{für gerade } m \end{cases} . \quad (4.49)$$

Durch Einsetzen der Koeffizienten (4.49) in (4.44) erhält man den inhomogenen Teil $\phi_p(\zeta)$ des gesuchten Potentials $\phi(\zeta)$,

$$\phi_p = -\frac{4i}{\pi} \hat{\tau}_D r_D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)(2n + 3)} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^n , \quad (4.50)$$

der sich in geschlossener Form gemäß

$$\phi_p(\zeta) = \frac{i}{\pi} \hat{\tau}_D r_D \left(\zeta - 2(\zeta^2 - 1) \tanh^{-1} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right) , \quad (4.51)$$

darstellen lässt.

Länge der Dugdale-Zone r_D und Richtung der Randkraftdichte $\hat{\tau}_D$

Aus der Forderung, dass die Spannungssingularität an der Rissspitze durch die Dugdale-Zone kompensiert werden soll, lässt sich aus dem Verschwinden der

von Mises-Vergleichsspannung im Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$ die Gleichung

$$r_D = \frac{i\pi}{2\hat{\tau}_D} A_1 \quad (4.52)$$

ableiten. Falls eine reine Mode I Belastung an der Rissspitze vorherrscht, so ist der Koeffizient A_1 negativ imaginär. Somit muss die komplexe Randkraftdichte $\hat{\tau}_D$ positiv reell sein, damit r_D einen positiven reellen Wert erhält. Im Falle einer zusätzlichen Mode II-Komponente müssen $\hat{\tau}_D$ und A_1 einen Winkel von $\pi/2$ einschließen, damit r_D reell wird.

Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_t

Die Rissspitzenöffnungsverschiebung (engl. Crack Tip Opening Displacement) δ_t ergibt sich im Rahmen des Dugdale-Modells direkt aus der Rissaufweitung an der physikalischen Rissspitze bei $z = 0$. Die zugehörigen Werte bei $z = 0$ für das obere und untere Rissufer liegen in der ζ -Ebene bei $\zeta = \pm 1$. Somit lässt sich CTOD aus den Verschiebungen durch

$$\delta_t = \delta(z = 0) = q(-1) - q(1) = \frac{\kappa + 1}{2\mu} |\phi(-1) - \phi(1)| \quad (4.53)$$

berechnen.

Rissspitzenöffnungswinkel (CTOA) ψ_c

In ähnlicher Weise lässt sich auch der Rissöffnungswinkel aus den analytischen Verschiebungen berechnen. Wie bei den Untersuchungen am laufenden Riss in Kapitel 7 noch näher erläutert wird, existieren unterschiedliche Möglichkeiten, den Rissöffnungswinkel bei Vorhandensein einer Kohäsivzone zu definieren. Bei der Vierpunktmethode werden die Rissufer hinter der physikalischen Rissspitze durch Sekanten, die durch die Verschiebungen an der physikalischen Rissspitze ($q(z = 0)$) und durch die Rissuferverschiebungen $q(z = -s)$ im Abstand s hinter der Rissspitze definiert sind, approximiert. Der eingeschlossene Winkel dieser Sekanten liefert dann den Rissspitzenöffnungswinkel. Unter symmetrischer Belastung (Mode I) ergibt sich für den Rissöffnungswinkel nach der Vierpunktmethode $\psi_{c,4P}$ die Gl.

$$\psi_{c,4P} = 2 \arctan \frac{q(f^{-1}(-s)) - q(-1)}{s}, \quad (4.54)$$

wobei angenommen wird, dass die physikalische Rissspitze im Ursprung der z -Ebene und die zugehörigen Punkte der beiden Rissufer in der ζ -Ebene bei $\zeta = \pm 1$ liegen.

4.2.3. Kohäsivzonenmodell mit linearer Entfestigung

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, ist es möglich mit Hilfe der holomorphen Funktionenbasis \hat{W}_n beliebige stetige Randkraftdichteverläufe zu approximieren. Eine konstante Randkraftdichte stellt dabei den einfachsten Fall dar und es wurde gezeigt, dass für diesen Fall eine exakte geschlossene Lösung

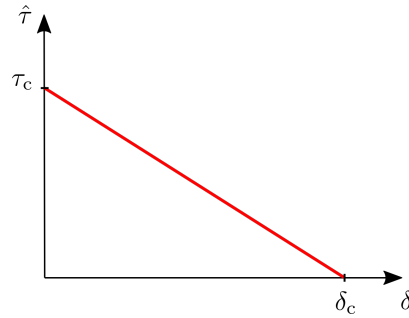


Abbildung 4.7.: Kohäsivgesetz mit linearer Entfestigung, ausgehend von einer maximalen Randkraftdichte τ_c nimmt die Randkraftdichte mit zunehmender Rissaufweitung bis zur Dekohärenzlänge δ_c linear auf 0 ab.

für die Spannungen und Verschiebungen existiert. In diesem Abschnitt wird nun das etwas allgemeinere Kohäsivzonenmodell mit linearer Entfestigung behandelt. Bei diesem Modell ist die rissschließende Randkraftdichte $\hat{\tau}$, wie in Abb. 4.7 ersichtlich, eine von der Separation der Rissufer δ abhängige Funktion. In Abhängigkeit des Fernfeldes, das vorwiegend durch die homogenen Koeffizienten A_k bestimmt ist, stellt sich im Gleichgewichtszustand eine Rissuferverschiebung mit zugehöriger Randkraftdichte ein. Im Gegensatz zum vorherigen Fall ist die Randkraftdichte nicht mehr konstant, und das Auffinden der Koeffizienten der inhomogenen Lösung gestaltet sich nun etwas aufwendiger.

Abhängigkeit der Koeffizienten a_n von den Koeffizienten A_k

Wie oben beschrieben, sind Rissuferverschiebung und Randkraftdichte über das Kohäsivgesetz gekoppelt. Außerdem stehen die mit der Cauchy-Navierschen Differentialgleichung verträglichen Verschiebungen und Spannungen über die Potentiale $\phi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ in Beziehung. Wie im Folgenden gezeigt wird, lässt sich damit eine lineare Beziehung zwischen den Koeffizientenvektoren a_n und A_k herleiten. Dazu startet man beim Ansatz für das lineare Entfestigungsgesetz, wobei wie beim vorherigen Ansatz nach Dugdale wieder der allgemeine ebene Mixed-Mode-Fall betrachtet wird, d.h. $\hat{\tau} \in \mathbb{C}$. Analog zu (4.41) wird wieder die Kohäsivzone auf den Bereich $(-1, 1)$ auf der reellen ξ -Achse abgebildet, wobei zur Unterscheidung mit der konstanten Randkraftdichte des Dugdale-Modells nun die Länge der Kohäsivzone mit r_c bezeichnet wird. Das Kohäsivgesetz lautet damit

$$\hat{\tau}(\delta(\xi)) = \operatorname{sgn}(\xi) \tau_c - \frac{\tau_c}{\delta_c} (-i)\delta(\xi), \quad (4.55)$$

wobei für die Konstanten δ_c und τ_c gilt, $\delta_c \in \mathbb{R}$ und $\tau_c \in \mathbb{C}$. Im reinen Mode I ist $\tau_c \in \mathbb{R}$). Die Funktion $\operatorname{sgn}(\xi)$ gewährleistet die zusätzliche Bedingung, dass in gegenüberliegenden Punkten in der Kohäsivzone entgegengesetzte Kräfte wirken und somit Gleichgewicht herrscht. Das bedeutet, $\hat{\tau}_c(\delta(-\xi)) = -\hat{\tau}_c(\delta(\xi))$, da auch $\delta(\xi)$ in (4.55) schiefssymmetrisch bezüglich ξ ist. Mit diesem Kohäsivgesetz

lautet die Randbedingung für die Rissufer

$$-\frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{2r_c\xi} \left[\dot{\phi}_p(\zeta) - \dot{\phi}_p(\bar{\zeta}) \right]_{\zeta=\xi^+} = \begin{cases} \hat{\tau}_c(\delta(\xi)) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{für } |\xi| \geq 1 \end{cases}, \quad (4.56)$$

wobei $r_c \in \mathbb{R}$. Die Rissuferverschiebung ergibt sich aus der Kombination von (4.26) mit $\psi(\zeta)$ aus (4.35) auf der reellen Achse

$$q(\xi) = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \phi(\xi), \quad (4.57)$$

woraus die Rissaufweitung mit

$$\delta(\xi) = q(-\xi) - q(\xi) = \frac{\kappa + 1}{2\mu} [\phi(-\xi) - \phi(\xi)] \quad (4.58)$$

folgt, wobei im allgemeinen Mixed-Mode Fall $\delta(\xi) \in \mathbb{C}$ gilt. Mit dem Ansatz für $\phi(\zeta)$ (4.44) ergibt sich die linke Seite der Randbedingung (4.56) zu

$$-\frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{2r_c\xi} \left[\dot{\phi}_p(\zeta) - \dot{\phi}_p(\bar{\zeta}) \right]_{\zeta=\xi^+} = -\frac{i \operatorname{sgn}(\xi)}{r_c \xi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Im[\dot{W}_n(\xi)]. \quad (4.59)$$

Da das Kohäsivgesetz eine schiefsymmetrische Funktion von ξ ist, muss auch die linke Seite eine schiefsymmetrische Funktion von ξ sein. Damit ergibt sich, dass in der Summe in (4.59) nur die ungeraden Terme übrigbleiben,

$$-\frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{2r_c\xi} \left[\dot{\phi}_p(\zeta) - \dot{\phi}_p(\bar{\zeta}) \right]_{\zeta=\xi^+} = -\frac{i \operatorname{sgn}(\xi)}{r_c \xi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n \Im[\dot{W}_n(\xi)], \quad (4.60)$$

wenn man berücksichtigt, dass der nach außen gerichtete Normalenvektor am Rissufer beim Übergang von negativem zu positivem ξ auch das Vorzeichen umkehrt. Einsetzen von (4.44) und (4.58) in die Gleichungen für die linke und rechte Seite der Randbedingung, (4.60) und (4.55), ergibt nach Zusammenführen

$$\begin{aligned} -\frac{i \operatorname{sgn}(\xi)}{r_c \xi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n \Im[\dot{W}_n(\xi)] &= \operatorname{sgn}(\xi) \tau_c - i \frac{\tau_c}{\delta_c} \frac{\kappa + 1}{\mu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^K A_k \xi^k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n \Re[W_n(\xi)] + i \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} a_n \Im[W_n(\xi)] \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus (4.61) folgt zunächst

$$a_n = 0, \quad \text{falls } n \text{ gerade}, \quad (4.62)$$

und (4.61) reduziert sich zu

$$\begin{aligned} & -\frac{i \operatorname{sgn}(\xi)}{r_c \xi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n \Im[\dot{W}_n(\xi)] = \\ & = \operatorname{sgn}(\xi) \tau_c - i \frac{\tau_c}{\delta_c} \frac{\kappa + 1}{\mu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^K A_k \xi^k + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} a_n \Re[W_n(\xi)] \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n mit ungeradem n wird $\xi = \cos \varphi$ gesetzt, und man erhält

$$\begin{aligned} & -\frac{i \operatorname{sgn}(\pi - 2\varphi)}{r_c \cos \varphi \sin \varphi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} a_n n \cos(n\varphi) = \\ & \operatorname{sgn}(\pi - 2\varphi) \tau_c - i \frac{\tau_c}{\delta_c} \frac{\kappa + 1}{\mu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K A_k \cos^k \varphi + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Multiplikation mit $(\cos \varphi \sin \varphi) \cos m\varphi$, und anschließende Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ liefert ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_n in Abhängigkeit von A_k , wobei man die Ordnungen $k > K$, $n > N$ und $m > M$ vernachlässigt,

$$-\frac{i}{r_c} P_{mn} a_n = \tau_c s_m - i \frac{\tau_c}{\delta_c} \frac{\kappa + 1}{\mu} [R_{mk} A_k + Q_{mn} a_n], \quad (4.65)$$

mit

$$P_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade oder } m \text{ ungerade,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2n^2}{m^2 - n^2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.66)$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade oder } m \text{ ungerade,} \\ \frac{2(n^2 + m^2 - 4)}{4n^2 m^2 - (n^2 + m^2 - 4)^2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.67)$$

$$R_{mk} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade oder } m \text{ ungerade,} \\ 2^{2-k} \sum_{l=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{l} \frac{m^2 + (k-2l)^2 - 4}{4m^2(k-2l)^2 - (m^2 + (k-2l)^2 - 4)^2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.68)$$

und

$$s_m = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{4}} & \text{falls } m \pmod{4} = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.69)$$

Nebenbedingung 1: Verschwinden der Spannungssingularität

Die Spannungssingularität an der Rissspitze verschwindet, wenn die Steigung der Rissaufweitung an der virtuellen Rissspitze gleich 0 wird, d.h. es muss

$$\dot{\delta}(\xi = 0) = 0 \quad (4.70)$$

werden. Mit (4.58), (4.44) und (4.45) ergibt sich weiter

$$\dot{\delta}(\xi = 0) = \frac{\kappa + 1}{\mu} \left[A_1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^N (-1)^{\frac{n-1}{2}} n a_n \right] = 0, \quad (4.71)$$

und somit

$$A_1 = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N (-1)^{\frac{n-1}{2}} n a_n. \quad (4.72)$$

Nebenbedingung 2: Rissaufweitung an der physikalischen Rissspitze gleich der Dekohärenzlänge δ_c

Für den Imaginärteil der Rissaufweitung muss an der physikalischen Rissspitze bei $z = 0$ bzw. $\zeta = \pm 1$ dem Kohäsivgesetz gemäß gelten, dass

$$\Im[\delta(\xi = 1)] = -\frac{\kappa + 1}{\mu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K \Im[A_k] + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^N \Im[a_n] \right] = \delta_c. \quad (4.73)$$

Aus den letzten beiden Nebenbedingungen lassen sich Werte für r_c (oder τ_c) ($\in \mathbb{C}$) und δ_c ($\in \mathbb{R}$) bestimmen.

Lösungsstrategie und Diskussion

Aus mathematischer Sicht erhält man somit das folgende nichtlineare Optimierungsproblem mit zwei Gleichheitsnebenbedingungen und zwei weiteren Ungleichheitsnebenbedingungen:

$$\min_{a_n, \delta_c, r_c} \left\| \frac{i}{r_c} P_{mn} a_n + \tau_c s_m - i \frac{\tau_c}{\delta_c} \frac{\kappa + 1}{\mu} [R_{mk} A_k + Q_{mn} a_n] \right\|, \quad (4.74a)$$

$$A_1 = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N (-1)^{\frac{n-1}{2}} n a_n, \quad (4.74b)$$

$$\delta_c = -\frac{\kappa + 1}{\mu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K \Im[A_k] + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^N \Im[a_n] \right], \quad (4.74c)$$

$$\delta_c > 0, \quad r_c > 0. \quad (4.74d)$$

Alle in Kapitel 5 vorgestellten Methoden basieren auf einer Berechnung der

homogenen Koeffizienten A_k durch Minimierung eines Funktionals. Im gesamten Ablauf wird somit beim Aufsuchen des Gleichgewichts in jeder Iteration der Vektor der homogenen Koeffizienten vorgegeben. Durch Lösen des in Gl. (4.74a) bis Gl. (4.74d) angegebenen Optimierungsproblems werden die inhomogenen Koeffizienten a_n , die Länge der Kohäsivzone r_c und die Rissaufweitung δ_c ermittelt. Bei einer testweisen Behandlung des Problems im Rahmen der Arbeit wird zur Lösung dieses Optimierungsproblems mit Gleichheitsnebenbedingungen das sogenannte Innere-Punkte-Verfahren verwendet. Es zeigt sich, dass es zwar möglich ist, bei guten Startwerten für den Vektor a_n eine Lösung des Problems zu finden, diese Lösung allerdings mit sehr hohem numerischen Aufwand erkauft wird. Da diese Arbeit in erster Linie die gesamte Konzeption einer anwendbaren Simulationmethode im Fokus hat, wird die Umsetzung des Kohäsivgesetzes mit linearer Entfestigung hier nicht weiter verfolgt. Die obigen Betrachtungen können jedoch als Ausgangspunkt für weiterführende Arbeiten dienen.

5. Anwendung analytischer Rissspitzenfelder in der FEM

In diesem Kapitel werden mehrere Methoden zur Integration der analytischen Rissspitzenfelder in der konventionellen Finite Elemente Methode beschrieben. Die Auswahl der näher betrachteten Methoden wird dabei unter dem Aspekt einer möglichen Implementierung in Finite Elemente Crash-Codes getroffen. Im ersten Schritt werden die verschiedenen Ansätze zur Kombination der analytischen Rissspitzenlösungen mit konventionellen polynomialen Finiten Elementen theoretisch behandelt. Alle hier beschriebenen Methoden werden gemeinsam mit den Rissspitzenlösungen prototypisch in Matlab[®] in einer einfachen impliziten FE-Testumgebung [74] implementiert. Anhand der Ergebnisse an einer Flachzugprobe mit einseitigem Riss werden die Ergebnisse der jeweiligen Methode für einen stationären Riss verifiziert. Am Ende des Kapitels werden die unterschiedlichen Methoden zusammenfassend diskutiert und in Hinblick auf die Anwendung in der Crashesimulation evaluiert.

5.1. Ebenes elastisches Rissproblem

Man betrachte ein allgemeines zweidimensionales Lösungsgebiet Ω mit einem Rand Γ , das einen scharfen Riss enthält (siehe Abb. 5.2). Auf dem Rand existieren zwei verschiedene Randbedingungen. Der Rand Γ_0 entspricht einer Einspannung auf der eine Dirichlet-Randbedingung herrscht. Auf dem übrigen äußeren Rand Γ_1 , der auch die Rissufer inkludiert, wirkt eine Neumann-Randbedingung. Wie bereits in Abschnitt 4.1 ausgeführt, bilden die Navier-Cauchy-Differentialgleichungen (4.11) gemeinsam mit den entsprechenden Randbedingungen das Randwertproblem, das mit Hilfe der Finiten Elemente Simulation näherungsweise gelöst werden soll.

Wie in Abb. 5.1 dargestellt, wird das Lösungsgebiet in zwei verschiedene Gebiete aufgeteilt, die unterschiedlich behandelt werden. Während im unkritischen Bereich Ω_0 ein eher grobes FE-Netz mit Standard-Elementen verwendet werden kann, kommen im Bereich der Rissspitze die im letzten Kapitel beschriebenen analytischen Rissspitzenlösungen zum Einsatz. Durch die erreichte höhere Auflösung können zur Prognose des Rissausbreitungsrisikos lokale Rissfortschrittskriterien verwendet werden. Bevor auf die in dieser Arbeit näher betrachteten Methoden zur Kopplung dieser Teilgebiete eingegangen wird, soll noch ein kurzer Abschnitt zur Einführung der verwendeten mathematischen Methoden vorangestellt werden.

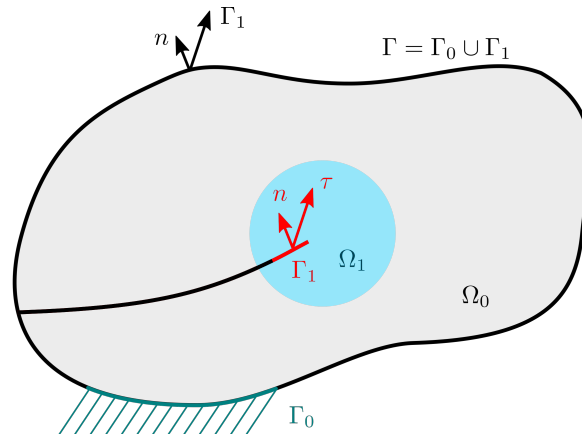


Abbildung 5.1.: Lösungsgebiet Ω mit einer Aufteilung in zwei Teilgebiete Ω_0 und Ω_1 . In der Umgebung der Rissspitze Ω_1 werden die analytischen Rissspitzenfelder verwendet. Das übrige Gebiet Ω_0 bleibt vom Riss unbeeinflusst.

5.2. Variationsprinzipien

Die Variationsprinzipien bilden die Basis der näherungsweise Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Finite Element Methode (FEM). An die Stelle der lokalen, punktwweisen Beschreibung des physikalischen Systems durch partielle Differentialgleichungen tritt ein zugeordnetes, auf dem gesamten Lösungsgebiet definiertes Funktional, das für die gesuchte Lösung der beschriebenen Feldgröße stationär wird. Entsprechend dem großen praktischen Stellenwert gibt es eine Vielzahl an Lehrbüchern wie [128], [12], [45], [44], [86], [87] u.v.m, in denen die Grundlagen der Finite Elemente Methode ausführlich beschrieben werden. Da für die Verwendung von analytischen Rissspitzenfunktionen der klassische Einfeld-Ansatz für Verschiebungselemente mit der potentiellen Energie als zu minimierendem Funktional aufgrund der Inkompatibilität der Rissspitzenlösungen mit den polynomialen Standard-Elementansätzen nicht geeignet ist, wird hier besonders auf die erweiterten Variationsprinzipien eingegangen, die für diese inkompatiblen Elemente benötigt werden. Der Einfachheit halber wird nur der statische Fall betrachtet und Volumskräfte bleiben unberücksichtigt. Die folgende Betrachtung folgt in groben Teilen [70, S. 156-165] und [89, S. 4-17], ist jedoch an die hier verwendete Nomenklatur angepasst. Tab. 5.1 liefert eine Übersicht der in dieser Arbeit verwendeten Variationsprinzipien.

5.2.1. Prinzip der minimalen potenziellen Energie

Der Startpunkt der Herleitung ist der Arbeitssatz der Mechanik, angewendet auf einen Körper mit linear-elastischem Materialverhalten. Nach diesem Satz ist die innere Arbeit eines statisch zulässigen, d.h. mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht befindlichen Spannungsfelds σ_{ij} über zugehörige kinematisch zulässige Dehnungen ϵ_{ij} eines linear-elastischen Körpers, wie in Abb. 5.1 darge-

Tabelle 5.1.: Einteilung der verwendeten Variationsprinzipien

Konventionelle Variationsprinzipien		Erweiterte (hybride) Variationsprinzipien
Prinzip der minimalen potenziellen Energie		Erweitertes Prinzip der potenziellen Energie
$\Pi_p(u_i)$	\Rightarrow	$\Pi_{pe}(u_i, \tau_i, \tilde{u}_i)$
Kompatible Verschiebungselemente		Hybride Verschiebungselemente
Prinzip der minimalen Komplementärenergie		Erweitertes Prinzip der Komplementärenergie
$\Pi_c(\sigma_{ij})$	\Rightarrow	$\Pi_{ce}(\sigma_{ij}, \tilde{u}_i)$
Kompatible Spannungselemente		Hybride Spannungselemente

stellt, gleich der Arbeit der äußeren Randspannung $\hat{\tau}_i$, d.h.:

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij} n_j \hat{u}_i d\Gamma = W_{\text{ext}}. \quad (5.1)$$

Durch Einführung einer sogenannten virtuellen Verschiebung δu_i mit folgenden Eigenschaften:

- infinitesimal klein,
- kinematisch zulässig, d.h. $\delta u_i = 0$ auf Γ_0 ,
- virtuell, d.h. nicht real existent,

kann (5.1) in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen,

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i \delta u_i d\Gamma = 0, \quad (5.2)$$

übergeführt werden. Nach diesem Prinzip ist ein deformierbarer Körper im Gleichgewicht, wenn die Summe der Arbeit der äußeren Kräfte und der Arbeit der inneren Kräfte für eine beliebige kinematisch zulässige virtuelle Verschiebung gleich 0 ist. Dieses Prinzip ist ganz allgemein gültig und kann auch im Falle einer Berechnung über einzelne Lastschritte bei nichtlinearem Materialgesetz und großen Verzerrungen verwendet werden. Möchte man jedoch eine Variationsformulierung finden, so müssen zusätzlich zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens müssen die Spannungen als Ableitung einer inneren Verzerrungsenergie $U(\epsilon_{ij})$, d.h. $\sigma_{ij} = \partial U / \partial \epsilon_{ij}$, darstellbar sein (was einem hyperelastischen Materialverhalten entspricht). Zweitens müssen die äußeren Kräfte konservativ sein, d.h. aus der Ableitung eines äußeren Potentials gebildet werden. Fordert man zusätzlich noch ausschließlich kleine Verzerrungen, so gilt

$\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}\delta u_{i,j} = (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}\delta u_i$ und man erhält aus (5.2)

$$\delta\Pi_p = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}\delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i\delta u_i d\Gamma = 0. \quad (5.3)$$

Die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes führt schließlich zum Prinzip des Minimums der potenziellen Energie

$$\delta\Pi_p = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}\delta u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_1} [\sigma_{ij}n_j - \hat{\tau}_i] \delta u_i d\Gamma = 0. \quad (5.4)$$

In Worten ausgedrückt besagt dieses Prinzip, dass unter allen kinematisch zulässigen Verschiebungsfeldern, die potenzielle Energie für das wahre, mit dem Gleichgewicht korrespondierende, Verschiebungsfeld minimal wird. Daher kann die näherungsweise Lösung des mechanischen Randwertproblems auf die Wahl eines zulässigen Ansatzes für das Verschiebungsfeld mit freien Parametern zurückgeführt werden, die dann durch Minimierung der potenziellen Energie bestimmt werden. Unter der Annahme von linear-elastischem Materialverhalten, d.h. der Gültigkeit des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (5.5)$$

besitzt die potentielle Energie die Gestalt

$$\Pi_p = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i u_i d\Gamma. \quad (5.6)$$

5.2.2. Erweitertes Prinzip der potenziellen Energie

Unter statisch zulässigen Verschiebungsfeldern versteht man diejenigen, die mit den Randbedingungen des Problems verträglich sind. Im Falle von Verschiebungsrandbedingungen, wie auf dem Teilrand Γ_0 in Abb. 5.2 skizziert, bedeutet das, dass die Variation des Verschiebungsfeldes dort verschwinden muss. Bei einer Aufteilung des Lösungsgebiets in finite Elemente findet sich diese Bedingung in der Forderung nach Stetigkeit der Verschiebungen entlang der Zwischenelementkanten wieder. Falls für Teilbereiche speziell angepasste Ansatzfunktionen verwendet werden, die mit den konventionellen Ansatzfunktionen nicht kompatibel sind, so muss diese Bedingung an diesen Grenzen fallen gelassen bzw. aufgeweicht werden. Betrachtet man nun ein Element mit speziellen, nicht kompatiblen Ansatzfunktionen, wie in Abb. 5.2 dargestellt, so kann diese Aufweichung der Verschiebungsrandbedingung an den Zwischenelementgrenzen Γ_2 durch folgende Erweiterung im Funktional der potenziellen Energie erreicht werden

$$\Pi_{pe} = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \tau_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma, \quad (5.7)$$

wobei u_i und τ_i die mit dem speziellen Element korrespondierenden Verschiebungen und Randkraftdichten auf Γ_2 darstellen. Das mit den äußeren, konventionellen Elementen korrespondierende Verschiebungsfeld auf Γ_2 wird mit \tilde{u}_i

bezeichnet. Dieses erweiterte Potential ist die Grundlage zur Verwendung der nachfolgend eingeführten hybriden Trefftz-Verschiebungselemente.

5.2.3. Prinzip der minimalen Komplementärenergie

Aus dem Arbeitssatz der Mechanik (5.1) kann durch Einführung einer virtuellen Änderung der inneren Spannungen $\delta\sigma_{ij}$ sowie der äußeren Randspannungen $\delta\tau_i$ ein weiteres Variationsprinzip abgeleitet werden. Ähnlich den zuvor eingeführten virtuellen Verschiebungen müssen auch die virtuellen Spannungen die Eigenschaften:

- infinitesimal klein,
- statisch zulässig, d.h. $\delta\sigma_{ij,j} = 0$ und $\delta\tau_i = 0$ auf Γ_1 ,
- virtuell, d.h. nicht real existent,

besitzen. Wird wieder ein hyperelastisches Materialverhalten angenommen, d.h. $\epsilon_{ij} = \partial\hat{U}/\partial\sigma_{ij}$ und dass die äußeren Randspannungen konservativ sind, so lässt sich aus (5.1) das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie,

$$\delta\Pi_c = \int_{\Omega} \frac{\partial\hat{U}}{\partial\sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_0} \hat{u}_i \delta\tau_i d\Gamma = 0, \quad (5.8)$$

ableiten. Bei linear-elastischem Materialverhalten ist das Funktional der Komplementärenergie gegeben durch

$$\Pi_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} d\Omega - \int_{\Gamma_0} u_i \tau_i d\Gamma, \quad (5.9)$$

wobei $S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ der Nachgiebigkeitstensor ist. Auf dem Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie fußt die Finite Elemente Spannungsmethode.

5.2.4. Erweitertes Prinzip der Komplementärenergie

Auch das Prinzip der Komplementärenergie lässt sich durch einen zusätzlichen Term für die Verwendung von Elementen mit inkompatiblen Ansatzfunktionen für die Spannungen erweitern

$$\Pi_{ce} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} d\Omega - \int_{\Gamma_0} u_i \tau_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_i (\tau_i - \tilde{\tau}_i) d\Gamma, \quad (5.10)$$

wobei u_i und τ_i wieder die speziellen Verschiebungs- und Spannungsansätze auf dem Zwischenelementerahmen Γ_2 und $\tilde{\tau}_i$ die polynomialen Spannungsansätze der umgebenden konventionellen Elemente bezeichnen.

5.2.5. Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers

Während die vorhin beschriebenen Variationsprinzipien physikalische Extremalprinzipien darstellen, ist es vielfach auch sinnvoll, die Variationsformulierung aus Fehlerfunktionalen abzuleiten. Wie in diesem Kapitel in Abschnitt 5.4

noch gezeigt wird, kann bei der Submodelltechnik eine Minimierung von Anpassungsfehlern zu wesentlich besseren Ergebnissen führen. Das entsprechende Funktional, das in dieser Arbeit verwendet wird, beruht auf dem Integral der quadratischen Abweichung der Randspannungen zwischen dem groben FE-Netz $\tilde{\tau}_i$ und dem analytischen Ansatz τ_i im Submodell entlang einer geeignet gewählten Kontur Γ_2 , d.h.:

$$\Pi_{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\tau_i - \tilde{\tau}_i) (\tau_i - \tilde{\tau}_i) d\Gamma. \quad (5.11)$$

Analog zu den Randspannungen könnte auch ein entsprechendes Funktional des quadratischen Fehlers der Verschiebungen minimiert werden und zur Formulierung eines hybriden Elements genutzt werden. Dieser Ansatz findet sich in [90].

5.3. Hybride Trefftz-Methode (HTM)

Neben Ritz und Galerkin gilt Erich Trefftz als einer der Pioniere numerischer Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen die zur späteren Entwicklung der Finite Elemente Methode führten. In seiner 1927 erschienenen Veröffentlichung „Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren“ [115] wird erstmals die Verwendung von Ansatzfunktionen, die a priori Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, im zugehörigen Variationsproblem vorgeschlagen. In seiner ursprünglichen Arbeit beschäftigte Trefftz sich mit der Lösung eines Randwertproblems mit der Laplace-Gleichung als zugrundeliegender Differentialgleichung. In dieser Arbeit wurde die Aufteilung des Lösungsgebiets in Teilgebiete mit zugeordneten Ansatzfunktionen eingeführt. Zur Kopplung der Teilgebiete schlug Trefftz zusätzliche Ansatzfunktionen entlang der gemeinsamen Grenzen vor. Damit wurden bereits in dieser Arbeit wichtige Konzepte, die wesentlich später zur Entwicklung der Finite Elemente Methode führten, vorgestellt. Erst mit der Entwicklung moderner Computer konnte jedoch das große Potential dieser Methoden ausgeschöpft werden. In [92], [97] und [59] findet sich ein historischer Abriss zur Entwicklung von Elementformulierungen mit Hilfe von Funktionssystemen, die homogene Lösungen der jeweiligen zugrundeliegenden Differentialgleichungen darstellen. Die ersten Anwendungen beschäftigten sich mit der Kombination der Trefftz'schen Methode mit der Finite Elemente Methode, siehe beispielsweise [111], [112] und [127]. Mit der Weiterentwicklung der Methode wurden erstmals auch Techniken zur Beschreibung lokaler geometrischer Effekte, wie sie auch in dieser Arbeit behandelt werden, untersucht. Wichtige Beiträge lieferten hier die Arbeiten von Pian und Tong [114], Jirousek [53], [54], [58] und Piltner [90], [91]. Ein anderes wichtiges Themengebiet, in denen die HTM erfolgreich angewendet wird, ist die Theorie der Biegung ebener Platten [56], [55]. In [38] findet sich ein Ansatz zur Behandlung von Mode III-Rissproblemen, der im Umfeld der vorliegenden Arbeit entstand und ebenso wie diese die Anwendung in der Crashsimulation im Fokus hat. Neben der Behandlung von Problemen der Elastizitätstheorie existieren auch Arbeiten zur Plastizität, wie beispielsweise [95], [17], [21] und [126]. Darüber hinaus finden

sich aber auch viele Anwendungen in anderen physikalischen Disziplinen, wie beispielsweise der Wärmeleitung [57] oder bei Potentialproblemen der Elektrostatik. Eine gute Übersicht zum breiten Spektrum der Anwendungen der HTM bieten die Bücher [68], [76] und [96].

Der wichtigste Vorteil der hybriden Trefftz-Methode gegenüber anderen hybriden Methoden liegt in der Eigenschaft, dass das Volumsintegral im Variationsfunktional verschwindet, wodurch nur mehr die Integration über den Rand berücksichtigt werden muss. Dies ist leicht zu sehen, wenn man die erste Variation von (5.7) betrachtet, wobei wieder kleine Verzerrungen angenommen werden, d.h. $\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}\delta u_{i,j} = (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{i,j}\delta u_i$ gelten muss. Die erste Variation des erweiterten Potentials ist dann gegeben durch

$$\delta\Pi_{pe} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} \sigma_{i,j}\delta u_i d\Omega}_{=0 \text{ nach GGW}} - \int_{\Gamma_1} \hat{\tau}_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\tau_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma. \quad (5.12)$$

Da vorausgesetzt wurde, dass die Spannungen σ_{ij} bereits exakte Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichung (in diesem Fall der Gleichgewichtsbeziehung $\sigma_{i,j,j} = 0$) sind, verschwindet das zweite Volumsintegral in (5.12). Wie auch schon zuvor, werden Volumskräfte vernachlässigt. Nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes auf das erste Volumsintegral verbleiben nur mehr Randintegrale in der Variation des erweiterten Potentials:

$$\delta\Pi_{pe} = \int_{\Gamma} \delta u_i (\sigma_{i,j} n_j - \hat{\tau}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\tau_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma. \quad (5.13)$$

Somit stellen auch Spannungsfunktionen, die im Inneren des Elementgebiets Ω singular sind, kein Problem dar, da nur die Integration über den Elementrand nötig ist und diese Funktionen am Rand regulär sind. Dies unterscheidet die Trefftz-Randelement-Methode auch von der Galerkin-Randelementmethode auf Basis der Fundamentallösung, bei der singuläre Randintegrale ausgewertet werden müssen. Durch diese Eigenschaften liefert die HTM auch bei großen Elementen eine hohe Genauigkeit bei der Approximation der Spannungen und Dehnungen im Elementbereich.

5.3.1. Hybride Trefftz-Risspitzelemente

Zur Lösung des Randwertproblems wird das Lösungsgebiet, wie in Abb. 5.2 dargestellt, in zwei Teilgebiete zerlegt, für die unterschiedliche Element-Ansätze gewählt werden [72]. Während für den äußeren Bereich Ω_0 eine Modellierung mit konventionellen Finiten Elementen mit polynomialen Ansatzfunktionen gewählt wird, soll der Bereich um die Risspitze mit Ansatzfunktionen modelliert werden, die exakte Lösungen der Differentialgleichung und der Neumann-Randbedingung am Rissufer sind. Auf die Konstruktion dieser Lösungsfolgen für Rissprobleme wurde bereits in Kapitel 4 näher eingegangen.

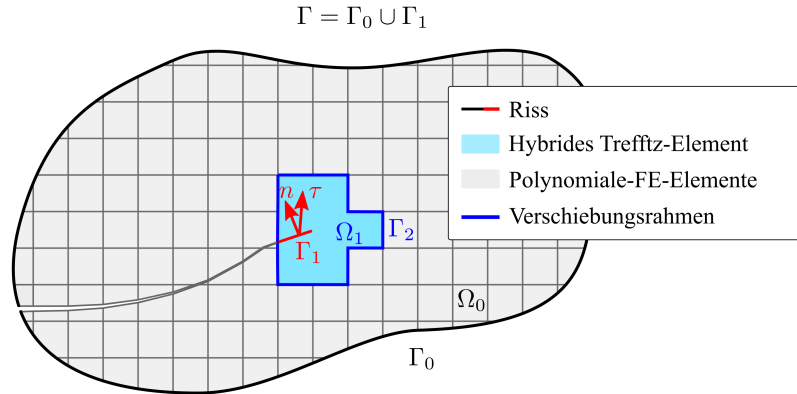


Abbildung 5.2.: Lösungsgebiet Ω mit einer Unterteilung in zwei Teilgebiete. Die Umgebung der Rissspitze Ω_1 wird mit einem speziellen Element und die übrige Umgebung mit konventionellen Finiten Elementen modelliert. Am äußeren Rand wird eine Dirichlet-Randbedingung angenommen, während auf den Rissufer Γ_1 die Lösung einer Neumann-Randbedingung genügen muss, die durch die Randkraftdichte τ vorgegeben wird. Der Normalenvektor auf die Rissufer wird mit n und der Rand zwischen den beiden Lösungsgebieten wird mit Γ_2 bezeichnet.

Kopplung der Lösungsgebiete

Die Kopplung der beiden Teilgebiete Ω_0 und Ω_1 findet über einen Verschiebungsrahmen Γ_2 entlang der Elementkanten der umgebenden Finiten Elemente statt. Während auf den inneren Elementkanten im Lösungsgebiet Ω_0 C^0 -Stetigkeit, d.h. Stetigkeit der Verschiebungen gefordert werden kann, ist es nicht möglich diese Stetigkeitsforderung am Zwischenelementrand Γ_2 zu erfüllen, da die polynomialen Ansatzfunktionen in Ω_0 nicht mit den T -vollständigen Lösungsfolgen in Ω_1 kompatibel sind. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, können die Lösungsansätze jedoch in den beiden Teilgebieten über einen zusätzlichen Term im Potential berücksichtigt werden. Die Minimierung dieses erweiterten Funktionals liefert, wie im Folgenden gezeigt wird, eine optimale Anpassung der verschiedenen Ansatzfunktionen entlang des Randes Γ_2 . Die komplexe Darstellung des erweiterten Potentials (5.7) lautet

$$\begin{aligned} \Pi_{pe} = & \frac{1}{4} \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_1} (\bar{q} \tau + q \bar{\tau}) t d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\bar{q} \hat{\tau} + q \bar{\hat{\tau}}) t d\Gamma + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{\tau} (\tilde{q} - q) + \tau (\bar{\tilde{q}} - \bar{q})) t d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.14)$$

wobei t die Dicke der Scheibe, $\hat{\tau}$ die Randkraftdichte auf dem Rand Γ_1 und \tilde{q} die komplexe Verschiebung der Standard-FE-Formulierung auf Γ_2 bezeichnen. Um das erweiterte Potential Π_{pe} in Abhängigkeit der Koeffizienten A_k zu minimieren, werden die Verschiebungen und die Randkraftdichte in homogene und

partikuläre Teile aufgespalten,

$$q(\zeta) = q_h(\zeta) + q_p(\zeta) \text{ und } \tau(\zeta) = \tau_h(\zeta) + \tau_p(\zeta). \quad (5.15)$$

Der homogene Teil der Verschiebung q_h ist durch Gl. (4.38) gegeben. Wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben, müssen die Starrkörpermoden aus dem Ansatz entfernt werden. Durch Zusammenfassen der homogenen Koeffizienten A_k im Vektor \mathbf{A} gemäß

$$\mathbf{A} := [A_1, A_2, \dots, A_K, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_K]^T \quad (5.16)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2K \times 1}$, lässt sich Gl. (4.38) kompakt über ein Skalarprodukt der Form

$$q_h(\zeta) = \mathbf{Q}_h^*(\zeta) \mathbf{A} \quad (5.17)$$

darstellen, wobei $\mathbf{Q}_h^* \in \mathbb{C}^{1 \times 2K}$ den Vektor der homogenen Verschiebungsmoden darstellt. $(\cdot)^*$ bezeichnet den adjungierten, d.h. den konjugiert transponierten Vektor gemäß $(\cdot)^* := \overline{(\cdot)}^T$. Den entsprechenden Ansatz für die Randkraftdichte erhält man aus den Gln. (4.39a) und (4.39b). Durch Einsetzen von (4.27a) und (4.27a) in (4.20) erhält man den Reihenansatz für die Randkraftdichtelösungen. Analog zu den Verschiebungen in (5.17) kann wieder eine kompakte Darstellung für τ_h in Form des Skalarprodukts

$$\tau_h(\zeta) = \mathbf{T}_h^*(\zeta) \mathbf{A}, \quad (5.18)$$

gefunden werden, wobei $\mathbf{T}_h^* \in \mathbb{C}^{1 \times 2K}$ den Vektor der Lösungen der Randkraftdichte beschreibt. Durch Einsetzen von Gl. (5.15) in (5.14) ergibt sich nach Umformung

$$\begin{aligned} \Pi_{pe} := & \underbrace{-\frac{1}{4} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_h \tau_h + q_h \bar{\tau}_h) t d\Gamma}_{=: \Pi_1} - \underbrace{\frac{1}{4} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_p \tau_p + q_p \bar{\tau}_p) t d\Gamma}_{=: \Pi_2} \\ & - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_p \tau_h + q_p \bar{\tau}_h) t d\Gamma}_{=: \Pi_3} - \underbrace{\frac{1}{4} \int_{\Gamma_1} (\bar{q}_p \hat{\tau} + q_p \bar{\hat{\tau}}) t d\Gamma}_{=: \Pi_4} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{\tilde{q}} \tau_h + \tilde{q} \bar{\tau}_h) t d\Gamma}_{=: \Pi_5} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{\tilde{q}} \tau_p + \tilde{q} \bar{\tau}_p) t d\Gamma}_{=: \Pi_6}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Im nächsten Schritt werden Gl. (5.17) und (5.18) in Gl. (5.19) eingesetzt und die einzelnen Integrale werden separat betrachtet. Es erweist sich als zweckmäßig den Vertauschungsoperator

$$\mathbf{P} := \sum_{j=0}^K e_j \otimes e_{j+K} + e_{j+K} \otimes e_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

einzuführen, wobei e_j den j -ten Einheitsvektor und $\mathbf{0}, \mathbf{I}$ die Null- und Einheitsmatrix bezeichnen. Durch diesen Vertauschungsoperator können die Identitäten $\mathbf{P}\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}, \mathbf{P}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ und $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ verwendet werden und man erhält für Π_1

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_h \tau_h + q_h \bar{\tau}_h) t d\Gamma \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}^* \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{Q}_h \mathbf{T}_h^* + \mathbf{P}\overline{\mathbf{Q}}_h \overline{\mathbf{T}}_h^* \mathbf{P}) t ds \right)}_{=: \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{2K \times 2K}} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Man beachte, dass die Matrix \mathbf{H} selbstadjungiert ist und daher nur reelle Eigenwerte besitzt. Die Integrale Π_2 und Π_4 hängen nicht von den homogenen Lösungen, sondern lediglich von den partikulären Lösungsanteilen ab. Da das Potential Π_{pe} nur über die homogenen Koeffizienten \mathbf{A} minimiert wird, werden diese Integrale nicht weiter berücksichtigt. Für den Ausdruck Π_3 erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_p \tau_h + q_p \bar{\tau}_h) t d\Gamma \\ &= -\mathbf{A}^* \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_p \mathbf{P}\overline{\mathbf{T}}_h + q_p \mathbf{T}_h) t d\Gamma \right)}_{=: \mathbf{r}_p \in \mathbb{C}^{2K \times 1}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Vor der Betrachtung des nächsten Integralterms wird eine weitere Notation eingeführt: $\tilde{q} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{u}}$, wobei $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{C}^{1 \times M}$ und $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$. \tilde{q} bezeichnet die komplexe Darstellung der Verschiebungen auf Γ_2 im Standard-FE-Ansatz in Ω_0 und $\tilde{\mathbf{u}}$ die zugehörige reelle Darstellung. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_5 &= +\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{\tilde{q}} \tau_h + \tilde{q} \bar{\tau}_h) t d\Gamma \\ &= \mathbf{A}^* \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{T}_h \tilde{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{P}\overline{\mathbf{T}}_h \overline{\tilde{\mathbf{Q}}}^*) t d\Gamma \right)}_{=: \mathbf{L} \in \mathbb{C}^{2K \times M}} \tilde{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

und

$$\begin{aligned} \Pi_6 &= +\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\bar{\tilde{q}} \tau_p + \tilde{q} \bar{\tau}_p) t d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{u}}^T \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\tau_p \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\tau}_p \overline{\tilde{\mathbf{Q}}}) t d\Gamma \right)}_{=: \tilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{C}^{M \times 1}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Werden wieder alle sechs Teile des Potentials Π_{pe} zusammengefügt, so ergibt sich die folgende Darstellung des erweiterten Potentials:

$$\Pi_{pe} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^* \mathbf{H} \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \mathbf{r}_p + \mathbf{A}^* \mathbf{L} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{r}} + \Pi_2 + \Pi_4. \quad (5.25)$$

Zur Minimierung von Π_{pe} muss die Ableitung nach \mathbf{A} verschwinden, d.h.:

$$\Pi_{\text{pe},\mathbf{A}^*}^* = -\mathbf{A}^*\mathbf{H} - \mathbf{r}_p + \tilde{\mathbf{u}}^T\mathbf{L}^* = 0. \quad (5.26)$$

Die Lösung von Gl. (5.26) ergibt sich zu

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_p. \quad (5.27)$$

Mit diesem Ausdruck ist der homogene Teil von ϕ eindeutig bestimmt. Die obige Gleichung wird nun zur Berechnung einer Ersatz-Steifigkeitsmatrix und eines Ersatz-Lastvektors genutzt. Dazu wird Gl. (5.27) in Gl. (5.25) eingesetzt, was zu

$$\Pi_{\text{pe}} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{u}}^T \underbrace{\mathbf{L}^*\mathbf{H}^{-1}\mathbf{L}}_{=: \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{M \times M}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^T \underbrace{(\text{Re}(\mathbf{L}^*\mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_p) - \hat{\mathbf{r}})}_{=: \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{M \times 1}} + \text{const.} \quad (5.28)$$

führt. Die Ersatz-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und der Lastvektor \mathbf{p} werden zur Steifigkeitsmatrix und zum Lastvektor des Standard-FE-Ansatzes im Sinne einer Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix bzw. des Gesamt-Lastvektors addiert, wodurch die beiden Ansätze für die zwei verschiedenen Lösungsgebiete gekoppelt werden.

Optimale Ordnung der Trefftz-Funktionsbasis

Es stellt sich nun die Frage wie die Zahl der Ordnung der Trefftz-Funktionen für die Spannungen und Verschiebungen zu wählen ist. In der Theorie der hybriden Elemente [89, 88] existiert dazu das folgende Stabilitätskriterium:

$$n_T \geq n_q - r. \quad (5.29)$$

Dabei ist n_T die Zahl der Freiheitsgrade für die Trefftz-Spannungsfunktionen, n_q die Gesamtzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade der äußeren Knoten und r die Zahl der Starrkörperfreiheitsgrade. Im ebenen Fall gibt es zwei translatorische und einen rotatorischen Freiheitsgrad, somit gilt $r = 3$. Die Ordnung der Trefftz-Spannungsfunktionen muss also entsprechend (5.29) gewählt werden. Aus der Erfahrung zeigt sich, dass die Zahl der Trefftz-Funktionen n_T auch nicht zu groß sein sollte. Zu große n_T begünstigen den Effekt der Überanpassung und können in einem zu steifen Element resultieren [93]. Eine optimale Wahl für n_T liegt daher nahe bei $n_q - r$.

5.3.2. Auffinden der FE-Lösung

Wie in Abb. 5.2 zu sehen ist, ersetzt das Trefftz-Element im Bereich um die Risspitze die Standard-FE-Elemente. Die optimale Wahl der Größe dieses Bereichs wird noch in Abschnitt 5.7 im Detail diskutiert. Wie in Abschnitt 5.3.1 gezeigt, lassen sich über Integration über den Rand des Trefftz-Elements die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und, falls eine Kohäsivzone berücksichtigt wird, der Element-Lastvektor \mathbf{p} gemäß (5.28) berechnen. Im Falle einer impliziten

Simulation können die entsprechenden Einträge bei der Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix analog zu konventionellen Elementen berücksichtigt werden. Nach dem Lösen des linearen Gleichungssystems können die homogenen Koeffizienten \mathbf{A} nach (5.27) aus den Knotenverschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}$ des Trefftz-Elements berechnet werden. Je nach Modellierung lässt sich in weiterer Folge der Spannungsintensitätsfaktor K_I oder die Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_t auswerten.

5.4. Analytische Submodelltechnik (ASM)

Wie in Abschnitt 5.7 noch näher ausgeführt wird, erfordert die Integration der HTM in ein explizites Zeitintegrationsschema einen tiefen Eingriff in den bestehenden Software-Code, da zwischen dem Trefftz-Element und den umgebenden Standard-Elementen in jedem Zeitschritt Knotenkräfte und Knotenverschiebungen ausgetauscht werden müssen (Bidirektionale Kopplung). Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit nach einer weiteren Möglichkeit gesucht, die Rissprognose mit Hilfe von analytischen Spannungslösungen an der Rissspitze zu verbessern, die aber gleichzeitig einfacher in bestehenden Crash-Codes integrierbar sein soll. Eine in der FEM weit verbreitete Technik, die es ermöglicht auch bei großen Strukturen mit rechentechnisch vertretbarem Aufwand lokale Details zu berücksichtigen, ist die sogenannte Submodelltechnik. Der Simulationsablauf bei der Submodelltechnik besteht dabei aus zwei Teilschritten:

1. Simulation eines gegebenen Lastfalls für die gesamte Struktur mit grobem Netz bzw. vereinfachter Elementmodellierung, wie beispielsweise mit Schalen- anstelle von Volumselementen,
2. Simulation eines Teilausschnitts mit Hilfe eines Detailmodells, wobei die Randbedingungen aus dem Ergebnis der Gesamtmodellsimulation entnommen werden.

In der konventionellen FEM wird das Submodell üblicherweise durch ein hochaufgelöstes Detailmodell einer Substruktur mit stark verfeinertem Netz gebildet, das in der Lage ist, die lokal auftretenden Beanspruchungen besser abbilden zu können als das Grobmodell. Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit das Submodell in Form eines Trefftz-Rissspitzenelements eingeführt. Wie bereits gezeigt, besitzt dieses Element ebenso die Eigenschaft, die lokalen Beanspruchungen an der Rissspitze genau abzubilden, kommt jedoch ohne Netzverfeinerung aus. Da nach diesem Schema das Submodell nur eine Bewertung des Rissausbreitungsrisikos vornimmt, und keine Knotenkräfte zurückgekoppelt werden, bleibt das Auffinden der FE-Lösung vom Submodell unbeeinflusst (Unidirektionale Kopplung).

5.4.1. Mapping der Randbedingungen

Bei der klassischen Submodelltechnik ist die Übertragung der Randbedingungen klar vorgegeben. Entlang der gewählten Kontur werden entweder die Verschiebungen oder die Randspannungen des Grobmodells auf das Detailmodell

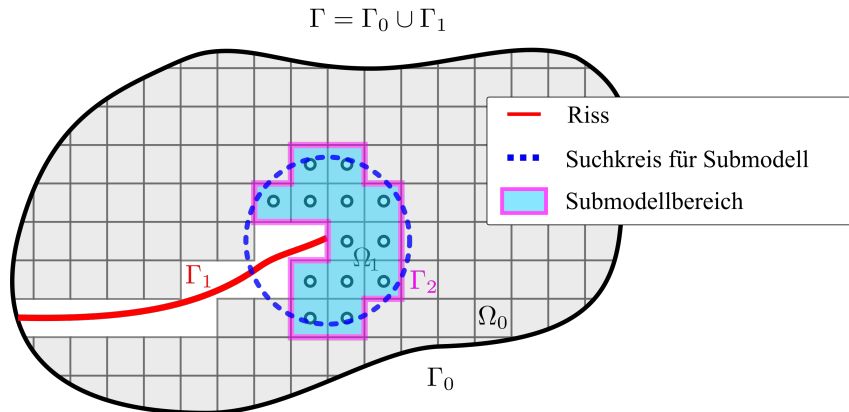


Abbildung 5.3.: Lösungsgebiet Ω mit einem Submodellbereich um die Risspitze Ω_1 . Auf dem Rand Γ_2 werden die Randbedingungen aus dem Gesamtmodell auf das Submodell übertragen.

übertragen, wobei zwischen den Knoten des Grobmodells entsprechend interpoliert werden muss. Wird jedoch, wie hier beschrieben, ein Trefftz-Element als Submodell verwendet, so besteht die Übertragung der Randbedingungen in der direkten Festlegung der homogenen Koeffizienten der Rissspitzenfelder. Die Form der Festlegung kann auf verschiedene Arten erfolgen. Die einfachste Möglichkeit besteht in der Kollokation der Verschiebungen der Trefftz-Lösungen mit den Knotenverschiebungen des groben Netzes. In diesem Fall muss die gewählte Ordnung der Trefftz-Lösungen mit der Zahl der Knoten übereinstimmen, damit das Gleichungssystem zur Bestimmung der homogenen Koeffizienten eine eindeutige Lösung besitzt. Diese strenge Kopplung der Zahl der Trefftz-Lösungen mit der Zahl der Knoten in der Kontur ist unter dem Aspekt der gewünschten Netzgrößenunabhängigkeit ein Nachteil dieses Ansatzes. Ein besseres Verfahren zur Anpassung des Submodells an das grobe Netz bildet die Minimierung eines geeigneten, auf dem Rand Γ_2 definierten Funktionals durch die homogenen Koeffizienten. Dazu bieten sich die in Abschnitt 5.2 erläuterten erweiterten Energiefunktionale an, wobei hier stellvertretend auf das erweiterte Funktional der potenziellen Energie eingegangen wird.

Erweitertes Funktional der potenziellen Energie

Der hier beschriebene Weg zur optimalen Bestimmung der homogenen Koeffizienten der analytischen Ansatzfunktionen deckt sich weitgehend mit der in Abschnitt 5.3.1 vorgestellten Herleitung der Steifigkeitsmatrix des hybriden Trefftz-Elements. Man startet mit der komplexen Darstellung für das erweiterte Potential Π_{pe} in (5.19). Nach Bereinigung aller Terme, die keine homogenen Verschiebungen q_h oder Spannungen τ_h beinhalten, verbleiben im erweiterten

Potential die Terme

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{pe}} = & -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_2} (\bar{q}_h \tau_h + q_h \bar{\tau}_h) t d\Gamma \\ & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} [(\bar{q}_p - \bar{q}) \tau_h + (q_p - \tilde{q}) \bar{\tau}_h] t d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.30)$$

wobei \tilde{q} hier die komplexe Darstellung der Verschiebungslösung des Grobmodells auf dem Rand des Submodells ist. Mit den Skalarprodukt Darstellungen für die homogenen Verschiebungen (5.17) und die homogenen Randspannungen (5.18), sowie des ebenso bereits zuvor eingeführten Vertauschungsoperators \mathbf{P} erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{pe}} = & -\frac{1}{2} \mathbf{A}^* \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{Q}_h \mathbf{T}_h^* + \mathbf{P} \bar{\mathbf{Q}}_h \bar{\mathbf{T}}_h^* \mathbf{P}) t ds}_{=: \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{2K \times 2K}} \right) \mathbf{A} \\ & - \mathbf{A}^* \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} [(\bar{q}_p - \bar{q}) \mathbf{P} \bar{\mathbf{T}}_h + (q_p - \tilde{q}) \mathbf{T}_h] t d\Gamma}_{=: \mathbf{r} \in \mathbb{C}^{2K \times 1}} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

und kann Π_{pe} in der algebraischen Form

$$\Pi_{\text{pe}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \mathbf{H} \mathbf{A} + \mathbf{A}^* \mathbf{r}. \quad (5.32)$$

darstellen. Durch Nullsetzen der Ableitung nach \mathbf{A} ,

$$\Pi_{\text{pe}, \mathbf{A}^*}^* = \mathbf{H} \mathbf{A} + \mathbf{r} = 0, \quad (5.33)$$

erhält man den gesuchten Vektor der homogenen Koeffizienten, der Π_{pe} minimiert zu

$$\mathbf{A} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}. \quad (5.34)$$

Quadratischer Anpassungsfehler der Randspannungen

Wie nachfolgend bei der Verifikation der Methode anhand der Flachzugprobe noch diskutiert wird, ist für die Verwendung des Kohäsivzonenmodells das Funktional des quadratischen Fehlers der Randspannungen besser geeignet als das erweiterte Funktional der potenziellen Energie. In komplexer Darstellung lässt sich das Funktional folgendermaßen angeben:

$$\Pi_{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\tau - \tilde{\tau}) (\bar{\tau} - \bar{\tilde{\tau}}) d\Gamma. \quad (5.35)$$

Wie bereits in Abschnitt 5.3.1 ausgeführt, besteht τ wieder aus einem homogenen Anteil τ_h und einem partikulären Anteil τ_p , der zur Erfüllung der Kraft-Teilrandbedingung an der Rissspitze in der Kohäsivzone benötigt wird. Für den homogenen Anteil wird wieder die Form des Skalarprodukts gemäß

(5.18) gewählt. Damit ergibt sich aus (5.35) nach Umformung

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta\tau} = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \tau_h \bar{\tau}_h d\Gamma}_{=:\Pi_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \tau_h (\bar{\tau}_p - \bar{\tau}) + (\tau_p - \tilde{\tau}) \bar{\tau}_h d\Gamma}_{=:\Pi_2} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\tau_p - \tilde{\tau}) (\bar{\tau}_p - \bar{\tau}) d\Gamma}_{=:\Pi_3}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Da bei der Minimierung des Potentials nur die homogenen Komponenten eine Rolle spielen, wird Π_3 außer Betracht gelassen. Mit der bereits in (5.18) eingeführten Darstellung von τ_h als Skalarprodukt ergibt sich für Π_1

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \left(\underbrace{\int_{\Gamma_2} \mathbf{T}_h \mathbf{T}_h^* d\Gamma}_{=:\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{2K \times 2K}} \right) \mathbf{A}. \quad (5.37)$$

Es ist zu beachten, dass die Matrix \mathbf{H} hermitesch ist. In der praktischen Umsetzung zeigt sich, dass es aus numerischen Gründen sinnvoll ist, diese Hermitizität explizit durch die Umformung

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \mathbf{T}_h \mathbf{T}_h^* + (\mathbf{P} \bar{\mathbf{T}}_h) (\bar{\mathbf{T}}_h^* \mathbf{P}) d\Gamma \quad (5.38)$$

zu gewährleisten. Dabei ist \mathbf{P} wieder der in (5.20) definierte Vertauschungsoperator. Der Term Π_2 liefert nach der oben genannten Einführung der Skalarprodukt Darstellung von τ_h den Ausdruck

$$\Pi_2 = \mathbf{A}^* \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \mathbf{T}_h (\tau_p - \tilde{\tau}) + \mathbf{P} \bar{\mathbf{T}}_h (\bar{\tau}_p - \bar{\tau}) d\Gamma}_{=:\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{2K \times 1}}. \quad (5.39)$$

Damit lässt sich auch aus diesem Funktional, analog zu (5.32) bis (5.34), der Vektor der homogenen Koeffizienten \mathbf{A} aus der Minimierung dieses Funktionals berechnen.

5.4.2. Größe des Submodellbereichs

Bei der optimalen Wahl der Größe des Submodellbereichs müssen mehrere Aspekte betrachtet werden. Einerseits wäre es in der praktischen Anwendung natürlich optimal, den Submodellbereich möglichst klein zu halten. Ein kleiner Submodellbereich vermindert auch das Risiko, dass im Grobmodell im Bereich des Submodells Verbindungsstellen, Löcher oder andere Unregelmäßigkeiten enthalten sind. Diese müssten ansonsten im Submodell berücksichtigt werden. Andererseits wirkt sich bei einem zu kleinen Submodellbereich der Diskretisierungsfehler durch die Netzgröße stärker auf das Simulationsergebnis aus. Einen weiteren Einfluss auf die optimale Wahl des Submodellbereichs besitzt auch die Modellierung im Submodellbereich selbst. Sofern eine plastische Zone in Form eines Kohäsivzonenmodells berücksichtigt wird, muss diese Zone innerhalb des

Submodellbereichs liegen, da ansonsten Konvergenzprobleme bei der Fixpunktiteration zur Bestimmung der Kohäsivzonenlänge r_D auftreten können. Daneben ist, ähnlich der HTM, die optimale Zahl der homogenen Ordnungen der Lösungsfunktionen (Modellkomplexität) mit der Zahl der Knoten bzw. Elemente am Submodellrand verbunden. All diese Einflussgrößen müssen bei der Wahl des optimalen Submodellbereichs gegeneinander abgewogen werden. Im Anhang A.1.2 werden deshalb die Submodellbereiche variiert und der Einfluss auf Spannungsintensitätsfaktor und Rissspitzenöffnungsverschiebung bei unterschiedlichen Netzgrößen analysiert, um daraus einen Ansatz zur optimalen Wahl der Submodellgröße ableiten zu können.

Spannungsrekonstruktion am Submodellrand

Wie aus (5.34) mit (5.38) und (5.39) hervorgeht, findet zur Anpassung der homogenen Koeffizienten \mathbf{A} eine Integration entlang des Submodellrandes Γ_2 statt. Dafür muss auf die Spannungen des Grobmodells entlang dieses Integrationspfades zugegriffen werden. Zwischen den Integrationspunkten müssen die Spannungen daher interpoliert werden. Da, wie bereits oben diskutiert, die Genauigkeit der Randspannungen des Grobmodells einen entscheidenden Einfluss auf die Lösungen des Submodells hat, wird hier ein Verfahren zur Spannungsrekonstruktion eingeführt, um den Fehler der Randspannungen möglichst gering zu halten. Dazu wird das in [129] und [130] vorgeschlagene Verfahren des Superconvergent Patch Recovery (SPR) angewendet. Das SPR basiert auf der Beobachtung, dass es Punkte innerhalb des Elementbereichs gibt, die eine höhere Konvergenzrate (sowohl in Bezug auf h -, als auch p -Konvergenz) der Spannungen besitzen als im übrigen Elementbereich. In diesen superkonvergenten Punkten zeigen Lösungen, die auf Ansatzfunktionen vom polynomialen Grad p beruhen, Konvergenzeigenschaften von Lösungen, die mit Ansatzfunktionen mit polynomialen Grad $p + 1$ berechnet werden. Auch wenn sich diese Eigenschaft nicht bei allen Elementtypen theoretisch herleiten lässt (siehe [128, S. 459–465]), so zeigt sich dennoch, dass die beste Konvergenzeigenschaft der Spannungen in den Integrationspunkten vorliegt. Daher werden die Integrationspunktspannungen genutzt, um die gewünschten Spannungen in dazwischen liegenden Punkten zu berechnen. Die Prozedur zur Rekonstruktion der Spannung in einem beliebigen Punkt x_i besteht aus drei Schritten:

1. Suchen des Element-Patches in der Umgebung von x_i und Identifikation der Stützstellen (Integrationspunkte)
2. Least-squares Approximation der Spannungen mit Hilfe eines Polynoms der Ordnung p
3. Spannungsrekonstruktion im gewünschten Punkt x_i mit Hilfe dieses Polynoms

Die Details dieses Verfahrens finden sich in [128, S. 467–474]. Mit diesem Verfahren kann eine hohe Genauigkeit der Spannungen auf beliebigen Integrationspfaden im Grobmodell erreicht werden.

5.5. Extended Finite Element Method (XFEM)

Die XFEM ist ein sehr weit verbreitetes Werkzeug zur Simulation von Bruchvorgängen in spröden und quasi-spröden Werkstoffen. Die Methode wurde zuerst im Jahr 1999 von Belytschko und Black [14] veröffentlicht und wird seitdem stetig weiterentwickelt. Den Kern dieses Ansatzes bildet die Anreicherung von Elementen, die einen Riss beinhalten, mit zusätzlichen Formfunktionen durch das sogenannte Prinzip der Partition of Unity (PUM) [24, 78], das bedeutet, dass die Summe aller Formfunktionen in jedem Punkt eins ergibt. Bei geeigneter Wahl der zusätzlichen Formfunktionen kann sich der Riss unabhängig von der Vernetzung und ohne Vorgabe des Risspfades während der Simulation ausbreiten. Die Methode zur Beschreibung des geometrischen Verlaufs des Risses ist prinzipiell von der XFEM unabhängig. Häufig werden die Risse durch Reihen gerader Liniensegmente dargestellt. Einen alternativen Ansatz zur Verfolgung des Risspfades bieten die sogenannten Level Set Functions, die im Falle von quadratischen Elementen auch stetig gekrümmte Risspfade ermöglichen (vergleiche [113]).

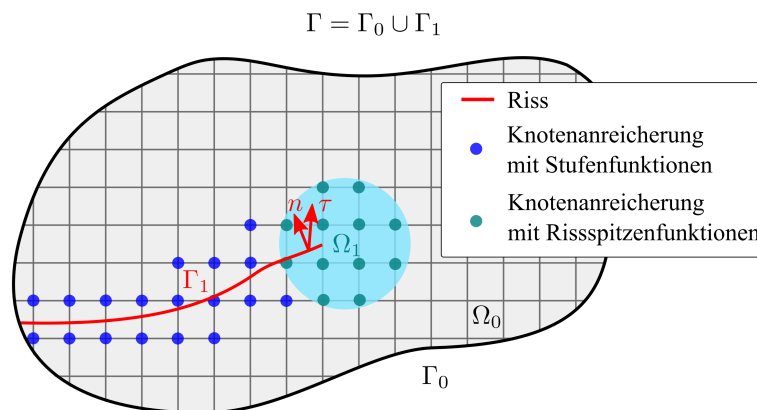


Abbildung 5.4.: Prinzipdarstellung der XFEM. Während Knoten an durchgerissenen Elementen mit Stufenfunktionen angereichert werden, verwendet man an der Rissspitze spezielle Funktionen, die das Bruchverhalten charakterisieren.

Für die Anreicherung der Knoten in der Umgebung des Risses werden üblicherweise zwei unterschiedliche Arten von Formfunktionen verwendet. Für vollständig durchtrennte Elemente werden die Knoten mit der Heaviside'schen Stufenfunktion angereichert, um die Diskontinuität im Verschiebungsfeld abbilden zu können. Für die Knoten in der Umgebung der Risspitze kommen spezielle Funktionen zum Einsatz, die das Verformungs- und Bruchverhalten des Werkstoffs an der Risspitze charakterisieren. Im Falle eines idealen Sprödbruchs werden häufig die asymptotischen Rissspitzenfunktionen nach Williams [121, 122] verwendet¹. Es zeigt sich, dass durch die Verwendung analytischer Ansatzfunktionen trotz grober Vernetzung eine hohe Genauigkeit erzielt werden kann. Dies

¹Diese Rissspitzenfunktionen sind mit den komplexen Lösungen 1. Ordnung für die Verschiebungen am kräftefreien Riss, die in dieser Arbeit beschrieben sind, identisch.

ist jedoch nicht zwingend der Fall, wenn Anreicherungen verwendet werden, die von der analytischen Lösung abweichen [66]. In der Nachbarschaft von Riss-Elementen liegen Elemente, die nur teilweise angereicherte Knoten besitzen (Blending Elements). Ohne weitere Korrekturen treten in diesen Elementen an den Rändern im Übergang von angereicherten zu nicht angereicherten Elementen unerwünschte Spannungsterme auf. Zur Vermeidung der Probleme an diesen Übergangs-Elementen wurden verschiedene Strategien entwickelt, siehe beispielsweise [29]. Besonderes Augenmerk muss auch auf die Integration von angereicherten Elementen gelegt werden. In diesen Elementen muss vor der Integration eine Sub-Triangulation und zusätzlich eine Anpassung der Ordnung der Gauß-Quadratur vorgenommen werden. Speziell bei dreidimensionalen Rissproblemen, die mit der XFEM behandelt werden, ist diese Modifikation sehr aufwändig. Aus diesem Grund ist der XFEM-Ansatz nur für eine eher geringe Zahl an Rissen gut geeignet. Da die singulären Rissspitzenlösungen nur bedingt zur Beschreibung von duktilen Bruchvorgängen angewendet werden können, wurden schon früh Ansätze mit Kohäsivzonenmodellen für die XFEM entwickelt. In [123, 65] wurden von Xiao und Karihaloo asymptotische Spannungsfelder für verschiedene Kohäsivgesetze unter Mixed-Mode-Beanspruchung hergeleitet und im XFEM-Formalismus verwendet. Die Randkraftdichte, die hier zur Rissspitzenanreicherung verwendet wurde, nähert sich asymptotisch der durch das Kohäsivgesetz vorgegebenen rissschließenden Randkraftdichte. Allerdings sind die Rissufer außerhalb der Kohäsivzone durch die Modellierung mit den asymptotischen Spannungsfeldern nicht kräftefrei. In den folgenden Abschnitten werden die exakten analytischen Lösungen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale [71], die in Kapitel 4 dieser Arbeit hergeleitet wurden, zur Anreicherung der Rissspitzenelemente verwendet. Diese Lösungen erfüllen die Neumann-Randbedingung in der Kohäsivzone exakt und verschwinden außerhalb der Kohäsivzone identisch.

5.5.1. Rissspitzenanreicherung

Anhand der in Kapitel 4 in Abschnitt 4.2.2 erhaltenen exakten Lösung für das Dugdale Modell wird nun gezeigt, wie diese Lösung in den XFEM-Formalismus überführt werden kann. Die hier beschriebene Methode wurde zuvor bereits in [73] veröffentlicht. Der Ausdruck für die komplexe Verschiebung in (4.26) mit dem Ansatz für ψ nach (4.35) und der Aufteilung von ϕ in homogenen und partikulären Teil gemäß (4.44) lässt sich in der Form

$$\begin{aligned}
q(\zeta) = & \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{1}{2\mu} \kappa \zeta^k}_{=:g_1^k(\zeta)} A_k + \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{1}{2\mu} \bar{\zeta}^k}_{=:g_2^k(\zeta)} A_k + \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{f(\bar{\zeta}) - f(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)} k \bar{\zeta}^{k-1}}_{=:g_3^k(\zeta)} \bar{A}_k \\
& + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu} \kappa \phi_p^A(\zeta) + \phi_p^A(\bar{\zeta}) \right)}_{=:g_4^k(\zeta)} A_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu} \frac{f(\bar{\zeta}) - f(\zeta)}{\bar{f}(\zeta)} \bar{\phi}_p^A(\zeta) \right)}_{=:g_5^k(\zeta)} \bar{A}_1, \tag{5.40}
\end{aligned}$$

schreiben, wobei $\phi_p^A(\zeta) := -1/2 \left(\zeta - 2(\zeta^2 - 1) \tanh^{-1} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right)$. Die Koeffizienten A_k sind komplexe Zahlen und können als $A_k = \alpha_k + i\beta_k$ mit $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Den zweidimensionalen reellen Verschiebungsvektor (u_1, u_2) erhält man aus dem Real- und Imaginärteil der komplexen Verschiebung q .

$$\begin{pmatrix} u_1(f(\zeta)) \\ u_2(f(\zeta)) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} f_{11}^{(k)}(\zeta) & f_{12}^{(k)}(\zeta) \\ f_{21}^{(k)}(\zeta) & f_{22}^{(k)}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad (5.41a)$$

$$f_{11}^{(k)}(\zeta) = \Re \left(g_1^{(k)}(\zeta) + g_2^{(k)}(\zeta) + g_3^{(k)}(\zeta) + \delta_{1k} \left(g_4^{(k)}(\zeta) + g_5^{(k)}(\zeta) \right) \right) \quad (5.41b)$$

$$f_{12}^{(k)}(\zeta) = \Re \left(i \left[g_1^{(k)}(\zeta) + g_2^{(k)}(\zeta) - g_3^{(k)}(\zeta) + \delta_{1k} \left(g_4^{(k)}(\zeta) - g_5^{(k)}(\zeta) \right) \right] \right) \quad (5.41c)$$

$$f_{21}^{(k)}(\zeta) = \Im \left(g_1^{(k)}(\zeta) + g_2^{(k)}(\zeta) + g_3^{(k)}(\zeta) + \delta_{1k} \left(g_4^{(k)}(\zeta) + g_5^{(k)}(\zeta) \right) \right) \quad (5.41d)$$

$$f_{22}^{(k)}(\zeta) = \Im \left(i \left[g_1^{(k)}(\zeta) + g_2^{(k)}(\zeta) - g_3^{(k)}(\zeta) + \delta_{1k} \left(g_4^{(k)}(\zeta) - g_5^{(k)}(\zeta) \right) \right] \right) \quad (5.41e)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Mit Gl. (5.41) findet man eine Form der analytischen Lösung, die im XFEM-Ansatz genutzt werden kann, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

5.5.2. Auffinden der FE-Formulierung

Es finden sich in der Literatur verschiedene Strategien zur Auswahl der anzureichernden Knoten. In dieser Arbeit werden, wie in Abb. 5.4 dargestellt, alle Knoten, die innerhalb eines vorgegebenen radialen Abstands zur Risssspitze liegen mit Risssspitzenfunktionen, und alle Knoten, die zu durchtrennten Elementen gehören und außerhalb dieses Radius liegen, mit Sprungfunktionen angereichert. Die Menge all dieser Knoten wird im Folgenden mit I bezeichnet und vereinigt die Menge der Sprungfunktions-Knoten I_H und die Menge der Risssspitzen-Knoten I_T . Damit lässt sich der XFEM Ansatz folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(x) &= \sum_{i \in I} \phi_i(x) \begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \end{pmatrix} + \sum_{j \in I_H} \phi_j(x) H(x) \begin{pmatrix} \gamma_1^{(j)} \\ \gamma_2^{(j)} \end{pmatrix} + \\ &\sum_{l \in I_T} \phi_l(x) \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} f_{11}^{(k)} & f_{12}^{(k)} \\ f_{21}^{(k)} & f_{22}^{(k)} \end{bmatrix}(\zeta) \begin{pmatrix} \alpha_k^{(l)} \\ \beta_k^{(l)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei $\phi_i(x)$ die zum Knoten i gehörenden Standard-FE-Ansatzfunktionen beschreibt, und sich $\zeta = f^{-1}(x)$ mit der inversen holomorphen Abbildung gemäß Gl. (4.41) berechnen lässt. Zusätzlich zu den gewöhnlichen Freiheitsgraden u_1^i, u_2^i kommen also neue Freiheitsgrade γ_1^j, γ_2^j hinzu, die mit der Sprungfunktion assoziiert werden können, sowie weitere Freiheitsgrade α_k^l, β_k^l , die zur Anreicherung der Risssspitze dienen. Für alle Elemente, die Risssspitze und Dugdale-Zone beinhalten, müssen die Freiheitsgrade α_k^l und β_k^l für alle Ordnungen auf dieselben Werte eingeschränkt werden.

Minimum der potenziellen Energie

Im nächsten Schritt wird der obige Ansatz (5.42) im Prinzip der minimalen potenziellen Energie verwendet. Unter Berücksichtigung einer Dugdale-Zone Γ_D , in der eine konstante risschließende Randkraftdichte τ_i gegen die Rissuferseparation δ_i wirkt, ist die potenzielle Energie durch den Ausdruck

$$\Pi_p = \int_{\Omega} \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \tau_i \delta_i d\Gamma - \int_{\Gamma_0} \hat{\tau}_i u_i d\Gamma, \quad (5.43)$$

gegeben, wobei ϵ_{ij} den Dehnungstensor, C_{ijkl} den Elastizitätstensor und $\hat{\tau}_i$ eine äußere wirkende Kraftdichte bezeichnen. Für angereicherte Knoten müssen der Dehnungstensor und somit auch die Ableitungen der Anreicherungsfunktionen berechnet werden. Während das für die Heaviside'sche Stufenfunktion leicht möglich ist, ist die Ableitung der Rissspitzenfunktionen etwas aufwendiger. Dazu werden die Ableitungen in der reellen x, y -Ebene in komplexe Ableitungen transformiert.

Die Minimierung der potenziellen Energie Gl. (5.43) führt damit auf ein System von Gleichungen für alle Freiheitsgrade der Verschiebungen $u_1^i, u_2^i, \gamma_1^j, \gamma_2^j, \alpha_k^l, \beta_k^l$. Aufgrund der in Gl. (4.41) eingeführten konformen Abbildung besitzt dieses Gleichungssystem eine nichtlineare Abhängigkeit von r_D . Bei einer gegebenen äußeren Last wächst r_D langsam an bis alle Freiheitsgrade konstant bleiben. Dieses Problem kann wieder als Fixpunkt-Problem für die Freiheitsgrade betrachtet und iterativ gelöst werden.

Projektion des Spannungstensors

Im klassischen FE-Verschiebungsansatz sind die Spannungen, die man aus der Ableitung der Verschiebungslösung erhält, unstetig entlang der Elementkanten. Diese so erhaltenen Spannungen werden als kompatible Spannungen bezeichnet. In der Literatur findet man verschiedene Ansätze zur Erhöhung der Genauigkeit der Spannungsprognose in der Umgebung der Rissspitze. Die Anwendung einer gleitenden Mittelung im Rahmen des Postprocessings ist ein einfacher Weg um stetige Spannungen zu erhalten, kann aber zu Problemen, wie unerwünschten Oszillationen der Spannungen, führen. In [124] wird eine statisch zulässige Spannungsrekonstruktion beschrieben, bei der die Spannungen an geeigneten Abtastpunkten an Basisfunktionen angepasst werden, die die Gleichgewichtsbedingung im Lösungsgebiet und die Spannungsrandbedingung am Rand des betrachteten Gebiets erfüllen. Neben reinen Postprocessing-Methoden gibt es auch Ansätze, welche die Anreicherungsfunktionen selbst modifizieren, um eine höhere Genauigkeit der kompatiblen Spannungen zu erreichen, siehe z.B. [18]. In dieser Arbeit wird der Spannungstensor im Sinne einer L^2 -Projektion an die analytische Lösung angepasst. Dieser Ansatz zählt zu den Postprocessing-Methoden und ist daher leicht zu einer bestehenden Implementierung hinzuzufügen. Die Projektion wird nur für Elemente durchgeführt, die Knoten beinhalten, die mit Rissspitzenfunktionen angereichert wurden (voll angereicherte Elemente und Übergangselemente). Dieses Lösungsgebiet wird mit Ω_{enr} bezeichnet. Die kompatiblen Spannungen werden auf die analytische Lösung projiziert,

die gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{\text{analytic}} \\ \sigma_y^{\text{analytic}} \\ \tau_{xy}^{\text{analytic}} \end{pmatrix} (x) \Big|_{\Omega_{\text{enr}}} = \mathbf{M} \left(\sum_{j \in I \setminus I_T} \epsilon(\phi_j)(x) \right. \\ \left. + \sum_{l \in I_T} \phi_l(x) \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}^k}{\partial x} & \frac{\partial f_{12}^k}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{21}^k}{\partial y} & \frac{\partial f_{22}^k}{\partial y} \\ \frac{\partial f_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial f_{21}^k}{\partial y} & \frac{\partial f_{12}^k}{\partial x} + \frac{\partial f_{22}^k}{\partial y} \end{bmatrix} (\zeta) \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_k^l \\ \hat{\beta}_k^l \end{pmatrix} \right), \quad (5.44)$$

wobei $\zeta = f^{-1}(x)$. Die L^2 -Projektion wird durchgeführt, indem das resultierende Gleichungssystem für die neuen Koeffizienten $u_1^j, u_2^j, \hat{\alpha}_k^l, \hat{\beta}_k^l$,

$$\int_{\Omega_{\text{enr}}} \sigma^{\text{analytic}}(x) : \sigma^{\text{analytic}}(x) dx = \int_{\Omega_{\text{enr}}} \sigma(x) : \sigma^{\text{analytic}}(x) dx, \quad (5.45)$$

gelöst wird, wobei σ^{analytic} den analytischen Spannungstensor und σ den kompatiblen Spannungstensor bezeichnen.

5.6. Umsetzung und Verifikation

Alle Methoden werden in einer im Zuge dieser Arbeit entwickelten, objektorientierten MATLAB[®]-Testumgebung für ebene elastische Finite Elemente Probleme implementiert. Neben einer mächtigen numerischen Bibliothek bietet die Syntax von MATLAB[®] einen nativen Umgang mit komplexen Größen, wovon in dieser Arbeit umfassend Gebrauch gemacht wird. Als Referenzmodell für alle Testrechnungen dient das im Folgenden beschriebene einfache stationäre Rissproblem.

5.6.1. Testkonfiguration

Die Testkonfiguration besteht aus einer Blechzugprobe mit einem einseitigen Riss unter uniaxialem Zug in y -Richtung. Die Probe ist an der Unterseite eingespannt, d.h. die Freiheitsgrade der Knoten an der Unterkante sind in y -Richtung gesperrt. Zur Führung der Probe wird zusätzlich ein Knoten an der Unterseite auch in x -Richtung gesperrt. Die Querkontraktion an der Einspannung ist frei. Die Konfiguration ist in Tab. 5.2 dargestellt.

Tabelle 5.2.: Geometrie, Materialdaten und Belastung der Zugprobe mit einseitigem Riss zur numerischen Verifikation

Testkonfiguration		
	Geometrie	
	W	60 mm
	h	120 mm
	t	1.5 mm
	a	8 mm
	Material	
	E	210 GPa
	ν	0.3
	Randbedingungen	
	σ_{oben}	160 MPa
	u_y	0
	$u_{x,\text{links}}$	0

Für die Modellierung des ideal spröden (kräftefreien) Risses existieren in der Literatur analytische Referenzlösungen für den Spannungsintensitätsfaktor [80], die zur Verifikation herangezogen werden können. Für die hier beschriebene

Probenform kann die Spannungsintensität gemäß

$$K_{I,\text{ref}} = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(\alpha) \quad (5.46)$$

berechnet werden. Dabei ist α das Verhältnis der Risslänge zu Probenbreite, $\alpha = a/W$, und F_I der Geometriefaktor, der sich mit

$$F_I(\alpha) = 1.12 - 0.231\alpha + 10.55\alpha^2 - 21.72\alpha^3 + 30.39\alpha^4 \quad (5.47)$$

gut approximieren lässt. Somit ergibt sich für die hier simulierte Probe ein Wert von

$$K_{I,\text{ref}} = 31,32 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}.$$

Zur Gegenüberstellung der mit den unterschiedlichen Methoden berechneten Spannungen werden für die obige Konfiguration auch Referenz-Simulationen in LS-DYNA[®] mit einem in der Risspitzenumgebung sehr fein aufgelösten Netz (0,1 mm) durchgeführt. Für die Umsetzungen mit einer Kohäsivzone dienen ebenso Referenz-Simulationen mit LS-DYNA[®], wobei die Länge der Kohäsivzone dabei schrittweise so angepasst wird, dass die Spannungssingularität an der virtuellen Risspitze verschwindet. Mit Hilfe dieser Referenz-Rechnungen kann eine Rissöffnung von

$$\delta_{t,\text{ref}} = 13,52 \mu\text{m}$$

bestimmt werden.

5.6.2. Hybride Trefftz-Methode

Wie in Abschnitt 5.3 gezeigt, lässt sich für das Trefftz-Element gemäß (5.28) eine Ersatzsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und, falls eine Kohäsivzone vorhanden ist, ein Knotenkraftvektor \mathbf{p} berechnen. Diese Steifigkeitsmatrix kann mit den Element-Steifigkeitsmatrizen der Standard-Elemente zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix assembliert und danach die Lösung zu gegebenen Randwerten ermittelt werden. Im Falle des linear-elastischen Rissmodells ist die Berechnung des Gleichgewichtszustandes (FE-Lösung) in einem Schritt möglich. Beim Kohäsivzonenmodell muss neben der Gleichgewichtsbedingung noch zusätzlich die Nebenbedingung (Verschwinden der Spannungssingularität in der virtuellen Risspitze) durch richtige Wahl der Länge der Kohäsivzone erfüllt werden. Die Lösung dieser nichtlinearen Gleichung kann mit Hilfe einer Fixpunkt-Iteration erfolgen. Beginnend mit einem kleinen Startwert für die Länge der Kohäsivzone $r_D^{(0)}$ wird dabei iterativ der Gleichgewichtszustand berechnet und aus diesem mit Hilfe des homogenen Koeffizienten A_1 der Trefftz-Lösung aus (4.52) ein neuer Wert für die Länge der Kohäsivzone bestimmt. Mit der neuen Länge erfolgt eine Neuberechnung der Trefftz-Steifigkeitsmatrix, die danach in die Gesamtsteifigkeitsmatrix übertragen wird. Darauf folgt die Berechnung des nächsten Gleichgewichtszustands. Die Iteration bricht ab, wenn die relative Änderung

von r_D kleiner als ein vorgegebener Wert Δ_{\max} wird, d.h.

$$\left| \frac{r_D^{(n+1)} - r_D^{(n)}}{r_D^{(n)}} \right| < \Delta_{\max}. \quad (5.48)$$

Für die hier betrachtete Testkonfiguration zeigt sich, dass dieses Verfahren bei einem maximal zulässigen relativen Fehler von $\Delta_{\max} = 10^{-4}$ meist innerhalb weniger Iterationen konvergiert.

Linear-elastisches Rissmodell

Wie in Abb. 5.5 dargestellt, wird im ersten Schritt der Verifikation ein Spannungsplot der von-Mises-Vergleichsspannung im Bereich der Rissspitze des hybriden Trefftz-Elements dem Ergebnis der hochaufgelösten Referenz-Simulation gegenübergestellt. Man erkennt bereits rein optisch die hohe Auflösung, die durch den analytischen Ansatz im Bereich der Rissspitze erreicht wird. Ebenso sieht man die gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Referenz-Simulation. Mit Hilfe eines horizontalen Schnitts entlang des oberen Rissufers (Schnitt A-A) durch die Probe, sowie eines vertikalen Schnitts, ausgehend von der Rissspitze in Richtung des oberen Probenrands (Schnitt B-B), lässt sich die gute Übereinstimmung der Spannungen quantitativ noch besser darstellen (siehe Abb. 5.6).

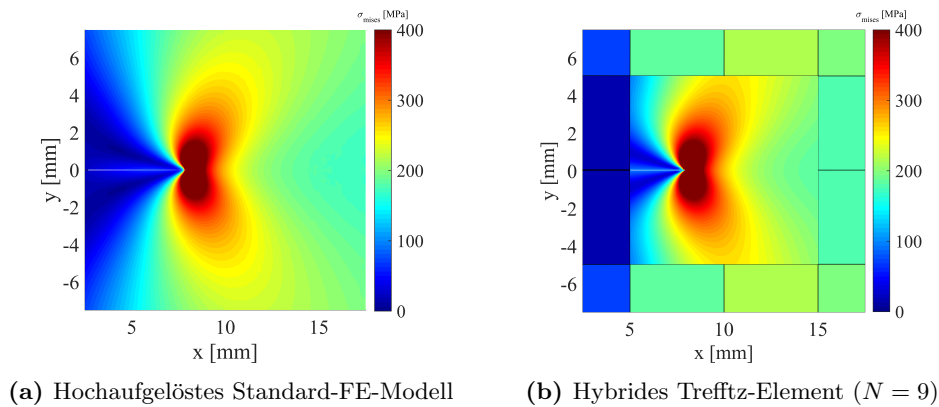


Abbildung 5.5.: Vergleich der von-Mises-Spannungen σ_v für das linear elastische Rissmodell unter Mode I Belastung für:

- (a) ein hochaufgelöstes Standard-FE-Netz und
- (b) ein hybrides Trefftz-Element mit Ordnung $N = 9$.

In Tab. 5.3 sind die Spannungsintensitätsfaktoren aus Simulationen für drei unterschiedliche Netzgrößen (5 mm, 2.5 mm und 1.25 mm) dem Referenzwert gegenübergestellt. Man sieht die gute Übereinstimmung der Werte sowie die geringe Netzgrößenabhängigkeit der HTM. Der relative Fehler $\Delta K_I / K_{I,\text{ref}}$ der hier erhaltenen Ergebnisse liegt deutlich unter 1 %

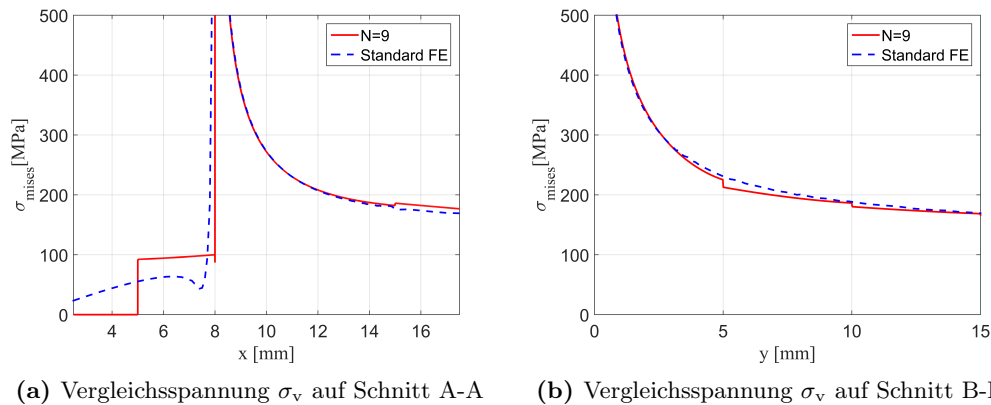


Abbildung 5.6.: Verifikation der hybriden Trefftz-Methode (HTM) für das linear-elastische Rissmodell anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang:
 (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers,
 (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 8$ mm.

Tabelle 5.3.: Vergleich der mittels HTM berechneten Spannungsintensitätsfaktoren für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen

Spannungsintensitätsfaktoren K_I			
Referenz $K_{I,ref}$ [MPa \sqrt{m}]	31.32		
Netzgröße	5 mm	2.5 mm	1.25 mm
Ordnung N	9	17	33
K_I [MPa \sqrt{m}]	31.49	31.34	31.38

Kohäsivzonenmodell nach Dugdale

Auch beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale wird im ersten Schritt der Verifikation das Ergebnis einer MATLAB[®]-Simulation dem Ergebnis einer hochaufgelösten Referenz-Simulation in Form eines Spannungsplots in Abb. 5.7 für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v gegenübergestellt. Wie bereits beim linear elastischen Modell erkennt man auch hier die gute Übereinstimmung der von-Mises-Spannungen in der Risspitzenumgebung.

In Abb. 5.8 sind die von-Mises-Vergleichsspannungen entlang der bereits zuvor definierten Schnitte dargestellt. Auch hier zeigt sich die gute Übereinstimmung der Ergebnisse der HTM-Simulation mit der hochaufgelösten LS-DYNA[®]-Referenzlösung.

In Tab. 5.4 sind die Risspitzenöffnungsverschiebungen der HTM-Simulationen mit drei unterschiedlichen Netzgrößen (5 mm, 2,5 mm und 1,25 mm) diesem Referenzwert gegenübergestellt. Es zeigen sich auch beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale nur geringfügige Abweichungen der Ergebnisse der HTM-Simulationen vom Referenzwert. Ebenso ist nur eine geringe Netzgrößenabhängigkeit der HTM erkennbar.

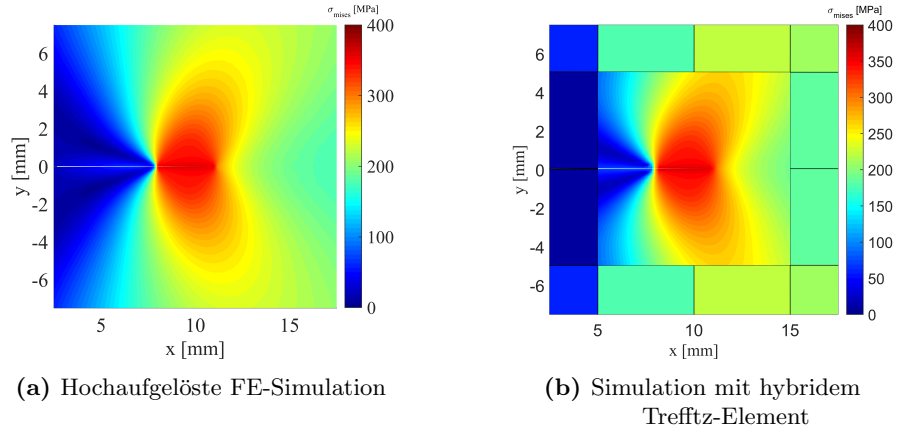


Abbildung 5.7.: Vergleich der von-Mises-Spannung σ_{mises} für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale unter Mode I Belastung, berechnet mit:
 (a) hocho aufgelöster Standard-FE-Simulation und
 (b) hybridem Trefftz-Element.

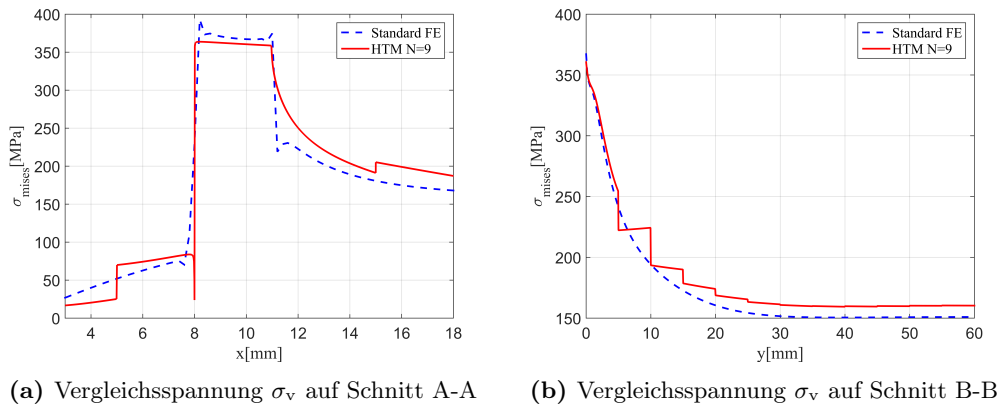


Abbildung 5.8.: Verifikation der hybriden Trefftz-Methode (HTM) für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hocho aufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang:
 (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers,
 (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.

Tabelle 5.4.: Vergleich der Rissspitzenöffnungsverschiebungen für unterschiedliche Netzgrößen und damit verbundenen Ordnungen der Trefftz-Lösungen

Rissspitzenöffnungsverschiebungen (CTOD) δ_t			
Referenz $\delta_{t,\text{ref}}$ [μm]	13.52		
Netzgröße [mm]	5	2.5	1.25
Ordnung N	9	17	33
CTOD δ_t [μm]	13.40	13.57	13.63

Abschließend lässt sich feststellen, dass die HTM-Simulationen bei den durchgeführten Verifikationsrechnungen eine sehr hohe Übereinstimmung mit den Referenzwerten liefert. Der relative Fehler $\Delta\delta_t/\delta_{t,\text{ref}}$ der in Tab. 5.4 angeführten Werte liegt unter 1 %.

5.6.3. Analytische Submodelltechnik

Wie in Abschnitt 5.4 eingangs beschrieben, wird die Simulation in zwei voneinander getrennten Teilschritten durchgeführt. Zur Simulation des Grobmodells der in Tab. 5.2 dargestellten Probe wird der Riss durch eine Reihe gelöschter Elemente repräsentiert. Die Position der Rissspitze liegt somit auf der Kante des ersten Elements vor dieser Elementreihe (siehe auch Abb. 5.3). Die Simulationen werden mit beiden, in Abschnitt 5.4.1 vorgestellten Funktionalen

- erweitertes Funktional der potenziellen Energie Π_{pe} ,
- quadratischer Anpassungsfehlers der Randspannungen $\Pi_{\Delta\tau}$,

durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen². Ausgehend von der Rissspitzen-Position wird der Integrationspfad durch Vorgabe eines Suchradius r_s definiert. Aufgrund der verwendeten Spannungsrekonstruktion (SPR) könnte der Integrationspfad unabhängig von den Elementkanten kreisförmig um die Rissspitze gelegt werden. In dieser Arbeit wird der Pfad jedoch so gelegt, dass er entlang der Außenkanten eines Element-Patches läuft, dessen Element-Schwerpunkte innerhalb des Suchkreises liegen. Durch diese Wahl ist es leichter möglich, auch das erweiterte Funktional der potenziellen Energie zu untersuchen, da in dieses Funktional neben den Spannungen auch die Verschiebungen in die Integration mit einfließen und diese am genauesten entlang der Kanten interpoliert werden können.

Im Falle der Verwendung eines Kohäsivzonenmodells muss wieder die Nebenbedingung des Verschwindens der Spannungssingularität durch geeignete Wahl der Länge des Kohäsivbereichs r_D berücksichtigt werden. Dazu kann auch hier die in Abschnitt 5.6.2 vorgestellte Fixpunktiteration verwendet werden. Da bei

²Es sei erwähnt, dass testweise auch das erweiterte Prinzip der Komplementärenergie verwendet wurde. Da sich die damit erzielten Ergebnisse allerdings nur geringfügig von denen des erweiterten Prinzips der potenziellen Energie unterscheiden, wird auf die Darstellung dieser Ergebnisse hier verzichtet

der ASM die Spannungen und Verschiebungen aus dem Grobmodell stammen und sich während der Iteration nicht ändern, entfällt die Berechnung des Gleichgewichts in jedem Iterationsschritt.

Linear-elastisches Rissmodell

In Abb. 5.9 ist die von-Mises-Vergleichsspannung im Bereich der Rissspitze des analytischen Submodells dem Ergebnis der hochaufgelösten Referenz-Simulation gegenübergestellt. Für die Berechnung dieses Ergebnisses wird das Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers verwendet. Man erkennt auch hier die gute Übereinstimmung der Ergebnisse, die sich auch in Abb. 5.10 anhand der Spannungen entlang der beiden in Tab. 5.2 definierten Schnitte bestätigt.

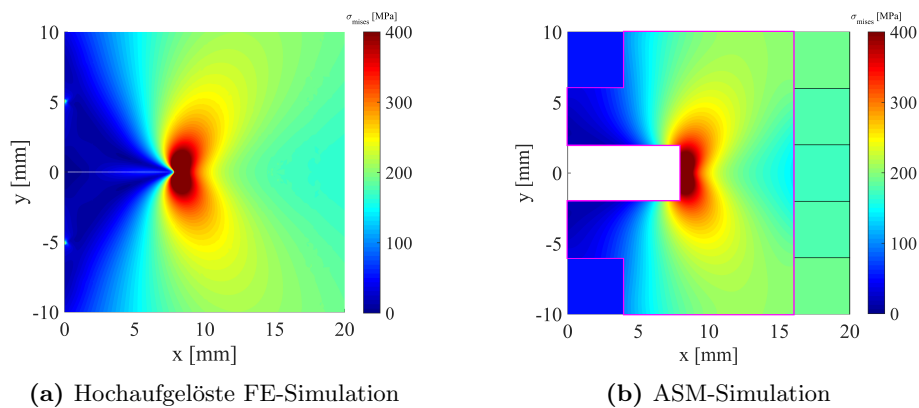


Abbildung 5.9.: Vergleich der von-Mises-Spannungen σ_{mises} für das linear elastische Rissmodell unter Mode I Belastung für:

- (a) FE-Simulation und
- (b) Analytische Submodellsimulation.

In Tab. 5.5 sind die Spannungsintensitätsfaktoren aus Simulationen mit drei unterschiedlichen Netzgrößen (4 mm, 2 mm und 1 mm) für beiden Funktionale (Π_{pe} und $\Pi_{\Delta\tau}$) dem Referenzwert gegenübergestellt. Man erkennt auch hier eine gute Übereinstimmung, auch wenn die Werte im Vergleich mit den Ergebnissen der HTM mit einem mittleren Fehler von $\Delta K_I / K_{I,ref} \approx 2.3\%$ etwas stärker streuen.

Tabelle 5.5.: Vergleich der mittels ASM berechneten Spannungsintensitätsfaktoren für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen

Spannungsintensitätsfaktoren K_I			
Referenz $K_{I,ref}$ [MPa \sqrt{m}]	31.32		
Netzgröße [mm]	4	2	1
Ordnung	9	17	33
$K_{I,\Pi_{pe}}$ [MPa \sqrt{m}]	30.92	30.62	31.65
$K_{I,\Pi_{\Delta\tau}}$ [MPa \sqrt{m}]	32.54	30.69	32.32

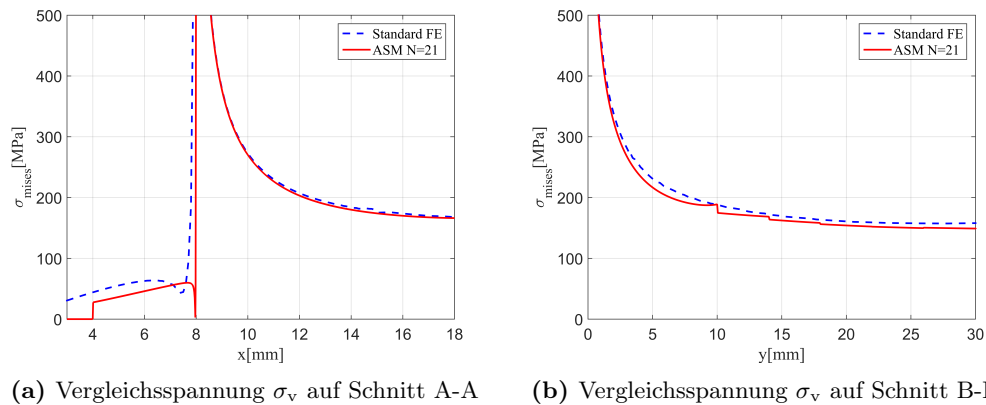


Abbildung 5.10.: Verifikation des Analytischen Submodells (ASM) für das linear-elastische Risspitzenmodell anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang:
 (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers,
 (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 8$ mm.

Kohäsivzonenmodell nach Dugdale

Abb. 5.11 zeigt wieder den Vergleich der von-Mises-Spannung des analytischen Submodells mit dem Ergebnis der hochaufgelösten Referenz-Simulation. Auch hier liegt der Berechnung das Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers zugrunde. Man erkennt wieder die gute Übereinstimmung der Ergebnisse, die auch in Abb. 5.12 anhand der Spannungsverläufe entlang der beiden Schnitte bestätigt wird.

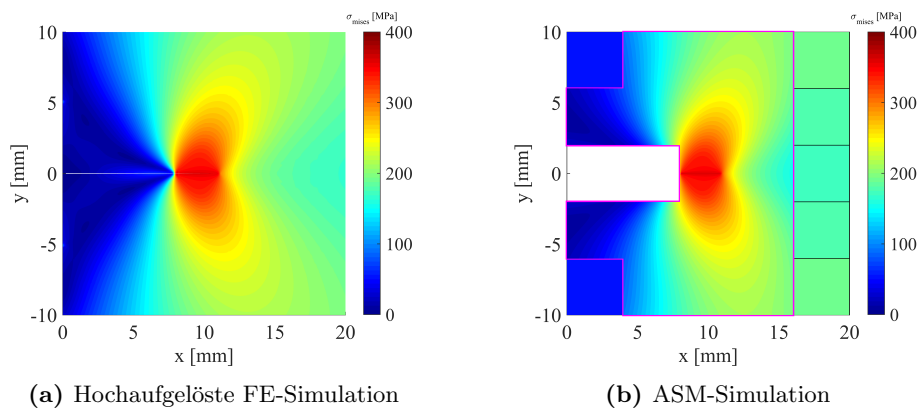


Abbildung 5.11.: Von-Mises-Spannung in der Umgebung der Risspitze für (a) FE-Simulation und (b) Analytische Submodellsimulation.

In Tab. 5.6 sind die Ergebnisse der Risspitzenöffnungsverschiebungen aus der Untersuchung der Netzabhängigkeit für beide Funktionale Π_{pe} und $\Pi_{\Delta\tau}$ dargestellt. Hier sieht man eine systematische Abweichung der Ergebnisse, die mittels Minimierung des erweiterten Potentials Π_{pe} berechnet werden. Die systematisch zu kleinen Werte lassen sich dadurch erklären, dass bei Verwendung

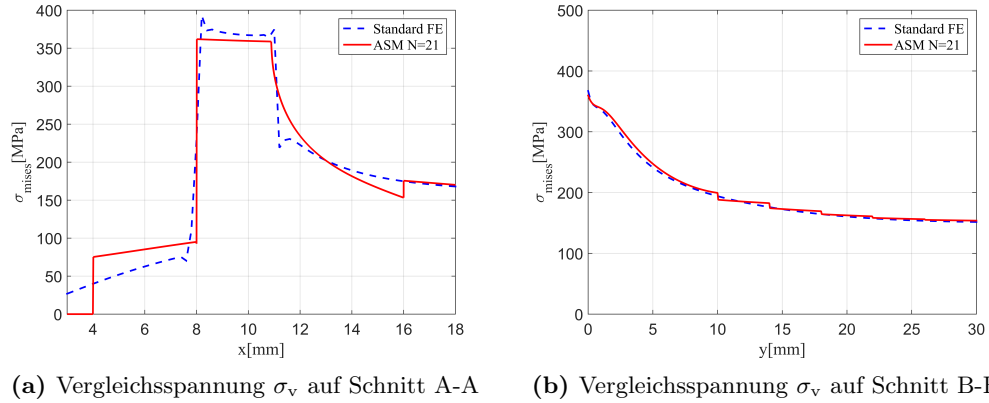


Abbildung 5.12.: Verifikation des Analytischen Submodells (ASM) für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hochauflösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang:

- (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers,
- (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.

von Π_{pe} die Abweichungen der Verschiebungen zwischen Grob- und Submodell minimiert werden, d.h. eine Anpassung der Verschiebungen des analytischen Submodells an das Grobmodell erfolgt. Aufgrund der Tatsache, dass im Grobmodell keine lokale plastische Zone an der Rissspitze dargestellt werden kann, sind die Verschiebungen im Grobmodell tendenziell zu gering. Diese zu geringen Verschiebungen werden somit auch auf das Submodell übertragen und resultieren in einer systematisch zu geringen Rissspitzenöffnungsverschiebung $\delta_{t,\Pi_{pe}}$. Die systematischen Abweichungen treten bei einer reinen Anpassung der Spannungen über $\Pi_{\Delta\tau}$ nicht auf, es zeigt sich aber, dass die Streuung der Werte mit $\Delta\delta_t/\delta_{t,ref} \approx 5\%$ etwas größer als im linear elastischen Fall ist.

Tabelle 5.6.: Vergleich der mittels ASM berechneten Rissspitzenöffnungsverschiebungen für unterschiedliche Netzgrößen und Ordnungen der Trefftz-Lösungen

Rissspitzenöffnungsverschiebungen (CTOD) δ_t			
Referenz $\delta_{t,ref}$ [μm]	13.52		
Netzgröße [mm]	4	2	1
Ordnung	9	17	33
CTOD $\delta_{t,\Pi_{pe}}$ [μm]	10.63	10.27	11.19
CTOD $\delta_{t,\Pi_{\Delta\tau}}$ [μm]	13.12	14.19	14.54

5.6.4. Extended Finite Element Method

Für die Implementierung des XFEM-Demonstrators wird auf einen frei verfügbaren MATLAB[®]-Code [15, 82] zurückgegriffen. Die Risse werden in diesem

Ansatz durch gerade Liniensegmente repräsentiert und die Einschränkung betreffender Freiheitsgrade der Rissspitzenanreicherung wird durch eine Penalty-Formulierung realisiert. Eine Implementierung und Verifikation einer XFEM-Formulierung mit den linear elastischen Rissspitzenlösungen wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen, da diese der XFEM-Standardformulierung für Rissprobleme entspricht und in den kommerziellen Codes, die ein XFEM-Modul beinhalten, üblicherweise inkludiert ist. Das Ziel der XFEM-Untersuchungen in dieser Arbeit ist die Gewährleistung der Übertragbarkeit der analytischen Lösungen unter Berücksichtigung einer Kohäsivzone für eine mögliche Übergabe und spätere Implementierung durch einen Solverhersteller. Für die XFEM-Berechnung wird ein Netz mit nahezu quadratischen Elementen mit einer Kantenlänge von ca. 3 mm verwendet und für die Rissspitzenanreicherung wird ein Radius von 7.5 mm gewählt. Als Funktionen für die Rissspitzenanreicherung werden die Lösungen nach (5.40) bis zur dritten Ordnung gewählt, d.h. $K = 3$. Als Referenz wird wieder das Ergebnis der LS-DYNA[®]-Simulation mit einem Netz der Kantenlänge 0.1 mm herangezogen. Abb. 5.13 zeigt einen Vergleich der von Mises-Spannung zwischen der Standard-FE- und der XFEM-Simulation in der Nähe der Risspitze. Innerhalb des angereicherten Bereichs wird die XFEM-Spannung auf die analytische Lösung projiziert. In den vollständig an der Spitze angereicherten Elementen wird so eine gute Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen erzielt. Aufgrund der partiellen Anreicherungen in den Übergangselementen entsteht eine Störung, die zu großen Abweichungen zwischen den FE- und XFEM-Ergebnissen in diesen Elementen führt. Um die XFEM-Ergebnisse auch in diesen Elementen zu verbessern, könnte ein Ansatz, wie in [29] vorgeschlagen, in Kombination mit einer angepassten Spannungsprojektion verwendet werden.

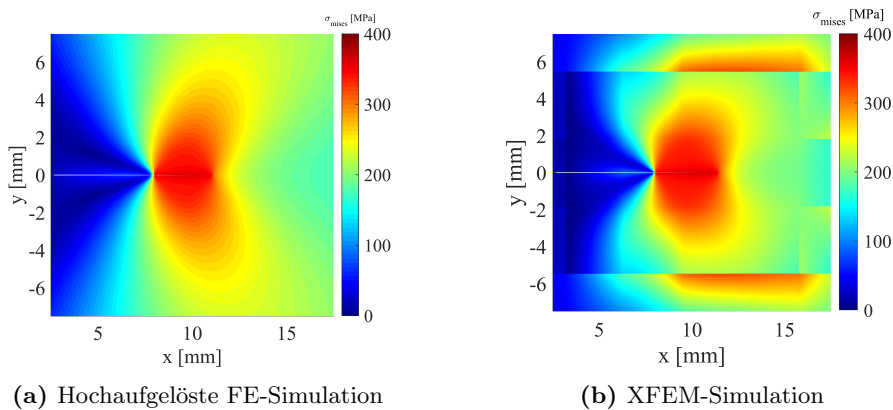


Abbildung 5.13.: Von-Mises-Spannung in der Umgebung der Risspitze für (a) FE-Simulation und (b) XFEM-Simulation.

Für einen besseren quantitativen Vergleich zwischen der Standard-FE und der XFEM werden in Abb. 5.14 die von Mises-Spannung σ_v entlang der beiden in Tab. 5.2 definierten Schnitte aufgetragen.

Man erkennt, dass die mit XFEM berechneten Spannungen etwas stärker abnehmen als die mit der FE berechneten Referenzergebnisse. Eine mögliche

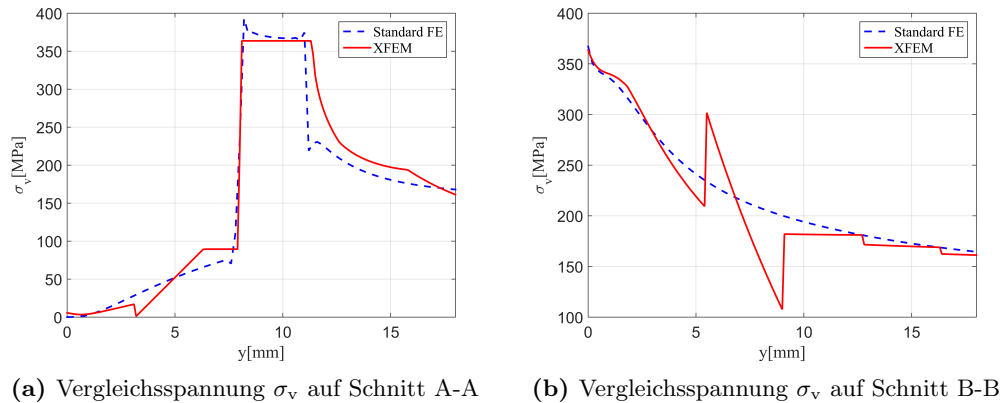


Abbildung 5.14.: Verifikation der XFEM-Implementierung für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale anhand der Ergebnisse einer hochaufgelösten FE-Simulation für die von-Mises-Vergleichsspannung σ_v entlang:
 (a) eines horizontalen Schnitts (A-A) entlang des oberen Rissufers,
 (b) eines vertikalen Schnitts (B-B) bei $x = 10$ mm.

Ursache für dieses leicht abweichende Verhalten liegt in der gewählten Spannungsprojektion. Allgemein sieht man aber, dass beide berechneten Spannungen in der Nähe der Rissspitze, d.h. in der vollständig mit Rissspitzenfunktionen angereicherten Zone gut übereinstimmen. In den Übergangselementen sieht man vor allem in Abb. 5.14 die auch schon zuvor beschriebenen Abweichungen. Für die Rissspitzenöffnungsverschiebung erhält man aus der Simulation einen Wert $\delta_{t, \text{XFEM}} = 13.70 \mu\text{m}$ und liegt auch bei der XFEM sehr nahe am Referenzwert von $\delta_{t, \text{ref}} = 13.52 \mu\text{m}$. Auf eine Untersuchung der Netzabhängigkeit wird hier verzichtet, da bei der XFEM nur die Übertragbarkeit der analytischen Rissspitzenlösungen gezeigt werden soll und diese Methode in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt wird.

5.7. Diskussion und Schlussfolgerungen

In diesem Abschnitt werden die in diesem Kapitel eingeführten Methoden zusammenfassend bewertet. Vorab wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die in Abschnitt 5.6 präsentierten Ergebnisse nur limitierte Aussagekraft besitzen, da sie sich nur auf eine einzelne Testkonfiguration und eine eingeschränkte Variation der Netzgröße beziehen. Dennoch lassen sich aufgrund der Ergebnisse und Erkenntnisse bei der Implementierung, sowie weiterer, in Anhang A dargestellter Untersuchungen zur Netzabhängigkeit einige Aussagen treffen. Neben der Ergebnisqualität müssen in Hinblick auf die Anwendung in der expliziten FEM auch noch andere Aspekte berücksichtigt werden. Die Kriterien, nach denen die Methoden hier bewertet werden, lassen sich in folgenden Punkten zusammenfassen:

- Qualität der Ergebnisse
- Numerische Effizienz
- Implementierbarkeit

Betrachtet man nur die Abweichungen der Ergebnisse der impliziten Rechnungen von den Referenzergebnissen, so sieht man die beste Übereinstimmung bei der HTM. Auch bei der XFEM-Umsetzung zeigt sich eine gute Übereinstimmung der berechneten Rissöffnungsverschiebung δ_t mit dem Referenz-Wert. Demgegenüber streuen die Ergebnisse der ASM deutlich stärker, und wären unter dem alleinigen Aspekt der Ergebnisqualität unterlegen. Bezieht man allerdings die numerische Effizienz, die Möglichkeiten der Implementierbarkeit in einem expliziten Integrationsschema und auch die Flexibilität des Ansatzes mit ein, so ändert sich das Bild.

Bei der HTM nimmt das Rissspitzenelement den Platz mehrerer Standard-Elemente ein. Im Zuge der Simulation werden in jedem Zeitschritt die Reaktionskräfte des Trefftz-Elements aus den Randknotenverschiebungen mit Hilfe der Ersatz-Steifigkeitsmatrix berechnet und als Knotenkräfte in das umgebende Netz zurückgeliefert. Im Trefftz-Element wird das Rissfortschrittskriterium in jedem Zeitschritt ausgewertet. Im Falle von prognostiziertem Rissfortschritt wird der Riss inkrementell verlängert und die Steifigkeitsmatrix neu berechnet. Sobald sich die Rissspitze den Grenzen des Trefftz-Element-Bereichs annähert, muss sich die Position des Trefftz-Elements ändern, um die Rissspitze weiterhin im Elementbereich einschließen zu können. Eine Änderung der Position des Trefftz-Elements bedeutet, dass neue Standard-Elemente gelöscht und durch das Trefftz-Element ersetzt werden. Ein ähnlicher Ablauf ist auch bei der XFEM vorzusehen. Bei der Simulation der Rissausbreitung werden die Knoten in der Rissspitzenumgebung und entlang des Risspfades adaptiv angereichert. Diese Adaptivität muss auch bei der Integration der Elemente mit angereicherten Knoten berücksichtigt werden.

Für beide Varianten sind tiefgreifende Eingriffe und Modifikationen bei der Steuerung des Simulationsablaufs nötig. In den meisten kommerziellen FEM-Codes besitzt der User keine Möglichkeit, derartige Erweiterungen zu implementieren. Eine - zumindest teilweise - Ausnahme bildet hier der Crash-Code

LS-DYNA[®], der über mehrere Schnittstellen den Zugriff auf Netzkonnektivität, Knotenverschiebungen und Spannungen in den Integrationspunkten erlaubt. Zudem besteht auch die Möglichkeit, zur Laufzeit gezielt Elemente versagen zu lassen. Durch diese Features ist es grundsätzlich möglich, den hier beschriebenen Ablauf der Simulation des Rissfortschritts mit der HTM zu realisieren. Dennoch bleibt das Problem bestehen, dass in jedem Zeitschritt Knotenverschiebungen und Knotenkräfte ausgetauscht werden müssen und sich ein zusätzlicher Berechnungsaufwand in jedem Zeitschritt niederschlägt. Im Falle der Umsetzungsvariante des Rissspitzenmodells mit Kohäsivzone entsteht durch das iterative Lösungsschema ein weiteres Problem. Da jeder Iterationsschritt mit einer geänderten Länge der Kohäsivzone und mit einer geänderten Steifigkeitsmatrix einhergeht, muss in jedem Iterationsschritt ein neuer dynamischer Gleichgewichtszustand (FE-Zeitschritt) gesucht werden. Das kann zu einem instabilen Verhalten führen und muss daher in Form einer zusätzlichen Dämpfung berücksichtigt werden.

Diese Probleme treten bei der Umsetzung der ASM nicht auf, da nur ein Leszugriff auf Integrationspunktspannungen und Knotenverschiebungen erfolgt. Der Solverablauf wird nur im Falle der Prognose von Risswachstum als Ergebnis der ASM-Bewertung durch gezieltes Löschen von Elementen beeinflusst. Neben dem Vorteil der einfacheren Implementierbarkeit ergibt sich durch die Beibehaltung der Standard-Elemente ein weiterer Vorteil der ASM. Dieser Vorteil besteht darin, dass das in den Standard-Elementen hinterlegte Material- und Schädigungsmodell intakt bleibt und unabhängig vom ASM auch weiterhin Materialversagen prognostizieren kann. Somit kann auch ein Wechsel des Versagensmodus (z.B. Rissfortschritt unter Mode I und nach Entlastung ein anschließender globaler Scherbruch im resttragenden Querschnitt) während eines komplexeren Deformationspfades abgebildet werden. Auch unter dem Aspekt der Berechnungskosten ist die ASM der HTM und der XFEM überlegen. Dies liegt vor allem daran, dass die Bewertungen nicht in jedem Zeitschritt durchgeführt werden müssen. So kann auch sehr einfach eine adaptive Schrittweitensteuerung implementiert werden, bei der beispielsweise die aktuelle Rissspitzenbeanspruchung in Relation zur ertragbaren Rissspitzenbeanspruchung die Zahl der Zyklen bis zur nächsten Auswertung bestimmt. Auf Basis dieser gesamtheitlichen Betrachtung wird somit die ASM als aussichtsreichster Kandidat für die Realisierung in einem expliziten Crash-Code identifiziert, auch wenn die Methode eine etwas stärkere Netzgrößenabhängigkeit besitzt.

6. Bruchmechanische Materialcharakterisierung

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Methoden und Versuche zur Ermittlung der Bruchzähigkeit für dünnwandige Blechwerkstoffe beschrieben. Das Ziel ist die Ermittlung von Risswiderstandskurven (R-Kurven) bzw. kritischer Bruchzähigkeitsparameter, die in der Simulation in einem Rissfortschrittskriterium an der Risspitze verwendet werden können. Für die Ermittlung kritischer Bruchzähigkeitsparameter können die klassischen Normen für ebene Mode I Probleme, wie beispielsweise ASTM 1820 [3] und ISO 12135 [52] nicht herangezogen werden, da diese Normen für die Bewertung von Bauteilstrukturen mit großer Dehnungsbehinderung ausgelegt sind. Aufgrund der angegebenen Gültigkeitskriterien können sie für die hier untersuchten, dünnen Blechwerkstoffe nicht verwendet werden. Wie bereits eingangs in Kapitel 1 beschrieben, besteht das Gesamtkonzept zur Simulation des lokalen Bauteilversagens im Crash aus einem zweistufigen Prozess. In der ersten Stufe wird die Rissinitiierung an kritischen Stellen der Karosserie mittels eigener Modelle bewertet. Falls in der Simulation eines dieser Modelle eine Rissinitiierung prognostiziert wird, wird an der kritischen Position ein einzelnes Element gelöscht. Das entstandene „Loch“ bildet den Ausgangspunkt für die Beschreibung des Rissfortschritts in der zweiten Stufe des Versagensprozesses. Somit startet die Simulation des Rissfortschritts mit einem bereits laufenden Riss und einer Rissverlängerung in der Größe der Netzdiskretisierung. Daher wird in dieser Arbeit ein Bruchzähigkeitsparameter gesucht, der diesen Bereich des Rissfortschritts beschreibt. In Abschnitt 3.3.3 wurde bereits der Rissspitzenöffnungswinkel (CTOA) ψ_c als geeigneter Bruchzähigkeitsparameter für stabil wachsende Risse und der Zusammenhang mit der Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 vorgestellt. Die daraus abgeleiteten Messmethoden sind mittlerweile in den Normen ASTM 2472 [4] und ISO 22889 [50] verankert. Allerdings fallen die, in dieser Arbeit untersuchten kurzen Risslängen (die sich aus der Netzdiskretisierung ableiten) mit 2.5 mm bis 4.0 mm aus dem Gültigkeitsbereich dieser Normen. In der ASTM 2472 wird beispielsweise ein minimales Risslängen zu Dicken-Verhältnis a/B von 4 angegeben, wodurch bei der untersuchten Blechdicke ($B = 1.5$ mm) die minimale Anfangsrisslänge 6 mm betragen würde. Die ASTM 2472 schlägt als Probengeometrien entweder Kompaktzugproben (C(T)-Proben) oder mittengerissene Zugproben (M(T)-Proben) vor. Aufgrund der zu erwartenden Probleme durch Ausbeulen und der Anpassung an die real in Fahrzeugkarosserien auftretenden rissrelevanten Lastfälle (z.B. ebene Blechstreckung mit Rissinitiierung an Schweisspunkten im Bauteilflanschbereich) werden anstelle von C(T)-Proben und M(T)-Proben in dieser Arbeit einseitig gekerbte Zugproben (SEN(T)-Proben) untersucht.

6.1. Materialcharakterisierung

Aufgrund der hohen praktischen Relevanz wird als Werkstoff der Warmumformstahl 22MnB5 ausgewählt. Das zugehörige Datenblatt findet sich in [2]. Dieser Werkstoff besitzt in seinem Ausgangszustand ein ferritisch-perlitisches Gefüge und ist in der untersuchten Variante (USIBOR[®] 1500) mit AlSi beschichtet. Durch diese Beschichtung ist er für den sogenannten direkten Prozess geeignet. Bei diesem Herstellungsprozess für Blechbauteile werden die Blechplatten nach dem Beschnitt über die Austenitisierungstemperatur erwärmt, im warmen Zustand umgeformt und anschließend in der Presse abgekühlt. Nach diesem Prozess besitzt der Werkstoff ein rein martensitisches Gefüge und erhält damit seine hohe Festigkeit.

6.1.1. Wärmebehandlung

Da alle im nachfolgenden beschriebenen Proben im Ausgangszustand hergestellt werden, müssen sie anschließend den oben angeführten Wärmezyklus durchlaufen. Dazu werden die Proben in einem Strahlungs-ofen austenitisiert und für mind. 30 min gehalten. Die anschließende schnelle Abkühlung wird in einem Ölbad durchgeführt. Zur Reduktion von Eigenspannungen durch den Abkühlprozess werden die Proben im Anschluss noch für ca. 5 min angelassen. Die wichtigsten Werkstoffdaten mit den Prozessparametern der Wärmebehandlung, die bei der Probenherstellung verwendet werden, sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Tabelle 6.1.: Übersicht der Materialeigenschaften und Prozessparameter für die Probenvorbereitung des Warmumformstahls 22MnB5 [2].

E-Modul	210 GPa
Austenitisierungstemperatur	950 °C
Haltezeit	300 s
Abkühlung	Ölbad
Anlasstemperatur	250 °C
im Ausgangszustand:	
Elastizitätsgrenze $R_{p0,2}$	320 – 550 MPa
Zugfestigkeit R_m	500 – 700 MPa
Bruchdehnung A_{ges}	$\geq 10\%$ mit $L_0 = 80$ mm, $e < 3$ mm
nach Wärmebehandlung:	
Elastizitätsgrenze $R_{p0,2}$	1100 MPa
Zugfestigkeit R_m	1500 MPa
Bruchdehnung A_{ges}	6%

6.1.2. Überprüfung der Materialkennwerte

Aufgrund der üblichen Chargenschwankungen und zur Überprüfung der durchgeführten Wärmebehandlung werden im ersten Schritt die wichtigsten Materialeigenschaften mit Hilfe von einfachen Zugversuchen ermittelt.

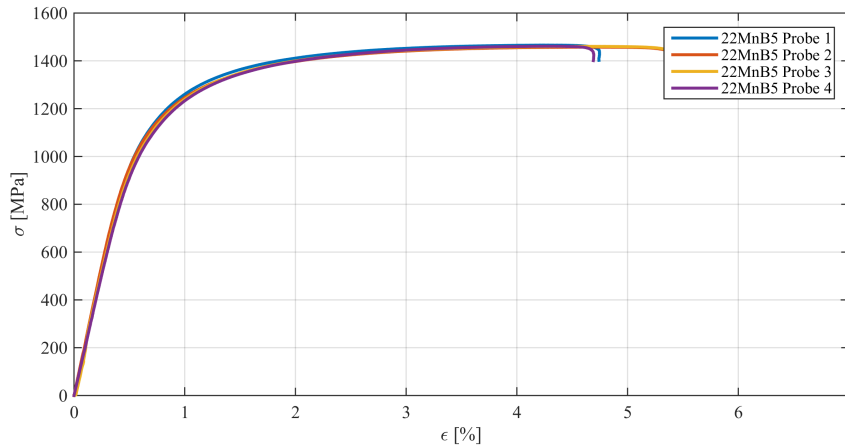


Abbildung 6.1.: Fließkurven aus den Zugversuchen für 22MnB5.

Tabelle 6.2.: Ergebnisse der Zugversuche des Warmumformstahls 22MnB5 [2].

E-Modul	209.9 GPa
Streckgrenze $R_{p0,2}$	1130 MPa
Zugfestigkeit R_m	1461 MPa
Gleichmaßdehnung A_{gl}	3.8 %
Bruchdehnung A_{ges}	6.1 %

Abb. 6.1 zeigt die aufgenommenen Fließkurven für vier gültige Zugversuche und Tab. 6.2 die Materialkennwerte nach Auswertung. Man erkennt nur geringe Abweichungen zu den Kennwerten im Datenblatt.

6.2. Probenherstellung und Präparation

In Abb. 6.2 ist die Probengeometrie der einseitig gekerbten Zugproben zu sehen.

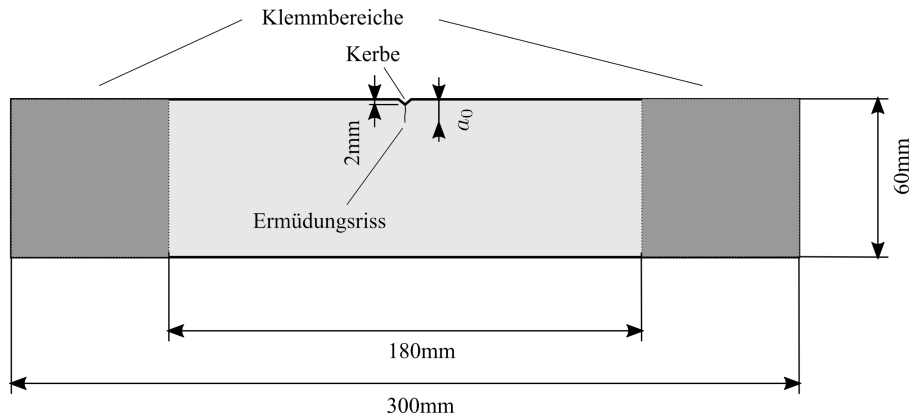


Abbildung 6.2.: Skizze der verwendeten einseitig gekerbten Zugprobe.

Um einen Bruch der Proben an der Einspannung zu verhindern, werden im Klemmbereich beidseitig kurze Blechstreifen stirnseitig verschweißt. Alle Proben werden im Ausgangszustand durch Fräsen und Sägeschnitt hergestellt und anschließend wärmebehandelt. Da sich im Strahlungssofen eine Oxidschicht auf den Proben bildet, die problematisch für die weitere Präparation und Auswertung ist, wird die Oxidschicht durch Sandstrahlen entfernt. Im Anschluss werden die Proben um den Bereich der Kerbe poliert. Im nächsten Schritt wird am Kerbgrund ein Rasierklingschnitt mit Diamantpaste eingebracht. Die Einbringung des Ermüdungsrisses erfolgt im Zugbereich mit einem Spannungsverhältnis $R = 0.1$ gemäß der Vorgaben der ISO 12108 [51]. Die Länge des Ermüdungsrisses wird dabei in regelmäßigen Abständen unter dem optischen Mikroskop gemessen.

6.3. Versuchsbeschreibung

Die Bestimmung des kritischen Risspitzenöffnungswinkel ψ_R wird über den Umweg der R-Kurven-Messung der Risspitzenöffnungsverschiebung δ_5 und einseitig gekerbten Zugproben mit unterschiedlichen Anfangsrisslängen durchgeführt. In Abb. 6.3 ist der Zusammenhang von ψ_c mit δ_5 zu sehen. Der steile Bereich zu Beginn der δ_5 -R-Kurve bildet die plastische Ausrundung und das beginnende Porenwachstum vor der Spitze des Ermüdungsrisses ab. Nach der Porenvereinigung und der damit verbundenen Rissinitiierung folgt ein Übergangsbereich in dem sich die Scherlippen des stabil wachsenden Risses ausbilden. Ab diesem Punkt wächst der Riss mit einem selbstähnlichen Rissprofil weiter, wodurch die δ_5 -R-Kurve in diesem Bereich linear ansteigt. In Abhängigkeit der Probenform und des Bruchverhaltens, d.h. der Duktilität des Werkstoffs, folgt auf diesen Bereich entweder ein instabiles Risswachstum bis zum Bruch der Probe (z.B. SEN(T)-Probe), oder die R-Kurve steigt bei langen Rissen durch Constraint-Effekte nochmals stärker an (z.B. C(T)-Probe). Für die

Charakterisierung des stabilen Risswachstums ist der lineare Bereich relevant. Hier entspricht der Rissöffnungswinkel ψ_c dem Steigungswinkel der δ_5 -R-Kurve.

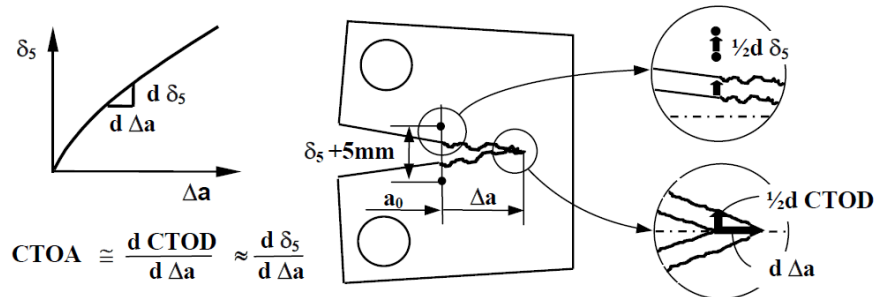


Abbildung 6.3.: Erklärung des Zusammenhangs zwischen Rissöffnungswinkel ψ_c und Risspitzenöffnungsverschiebung δ_5 [105].

Der gesamte Versuch wird, wie in Abb. 6.4 schematisch dargestellt, an einer Zugprüfmaschine quasistatisch durchgeführt. Während des Zugversuchs werden mit Hilfe einer 100 kN-Kraftmessdose die Zugkraft, die Rissverlängerung und die Risspitzenöffnungsverschiebung gemessen. Die dazu nötige Messmethodik wird im Folgenden noch detaillierter beschrieben.

Potentialmethode

Zur kontinuierlichen Messung der Rissverlängerung Δa wird die sogenannte Potentialmethode [62] verwendet. Dazu wird über Kontakte in möglichst großen Abständen vom Riss ein Strom aus einer Konstantstromquelle durch die Probe geleitet. An weiteren Kontaktpunkten, die in einem Abstand von $2y$ an der Stirnseite symmetrisch zum Riss liegen, wird die elektrische Spannung ϕ abgegriffen. Ausgehend von einer Anfangsrisslänge a_0 , bei der die Spannung ϕ_0 an den Kontaktpunkten gemessen wird, gilt für die Risslänge a während des bruchmechanischen Versuchs näherungsweise die Gl.

$$a = \frac{2W}{\pi} \cos^{-1} \frac{\cosh \frac{\pi y}{2W}}{\cosh \left[\frac{\phi}{\phi_0} \cosh^{-1} \frac{\cosh \frac{\pi y}{2W}}{\cos \frac{\pi a_0}{2W}} \right]}. \quad (6.1)$$

Um mögliche Asymmetrien in der Probenform oder der Temperatur der elektrischen Kontakte auszugleichen, empfiehlt es sich, eine Wechselstromquelle mit rechteckförmigem Ausgangssignal zu verwenden. Bei der Messung der Spannung muss diese Signalform durch Umpolen mit entsprechender Triggerung durch die Stromquelle berücksichtigt werden.

Gl. (6.1)) geht von einer homogenen Stromdichte in einem unendlich gedehnten Streifen aus und liefert somit nur eine Näherung für die Risslänge, die in der praktischen Anwendung rekaliert werden muss. Als Referenz für die Kalibrierung dient ein Mehrprobenversuch identischer Proben, bei dem die einzelnen Versuche bei unterschiedlichen Risslängen gestoppt und die Risslängen danach optisch vermessen werden. Dazu werden die Proben für 30 min bei 400 °C geglüht und anschließend restermüdet. Durch das Glühen bildet sich auf der

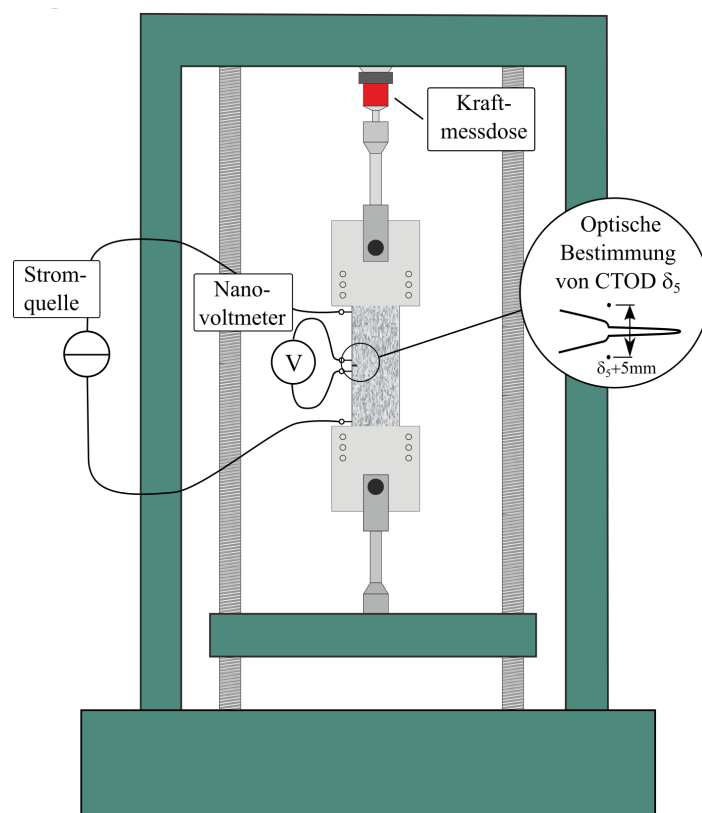


Abbildung 6.4.: Prinzipdarstellung der Versuchsdurchführung und Messmethodik.

Bruchfläche ein blauer Oxidfilm (Heat Tinting), der die optische Vermessung der Risslänge an der gebrochenen Probe unter dem Stereomikroskop ermöglicht. Mit den zugehörigen Werten der Risslänge aus der Potentialmethode kann eine Kalibrierung mit Hilfe des Potenzgesetzes

$$\Delta a_{cal} = b \Delta a_{pot}^c \quad (6.2)$$

vorgenommen werden, wobei die Parameter b und c optimal angepasst werden. Diese Prozedur wurde in Vorversuchen durchgeführt, und es wurden mit dieser Methode die Kalibrierfaktoren

$$b = 1.349$$

$$c = 0.848$$

bestimmt.

Digitale Bildkorrelation (DIC)

Die Bestimmung der Risspitzenöffnungsverschiebung δ_5 erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe der digitalen Bildkorrelation. Dazu werden mit einer digitalen Spiegelreflexkamera während der Verformung in regelmäßigen Zeitabständen Bilder des Probenausschnittes aufgenommen. Die Kamera wird dabei mit einer konstanten Bildaufnahmezeit von 2 Hz per Fernsteuerung über einen PC betrieben.

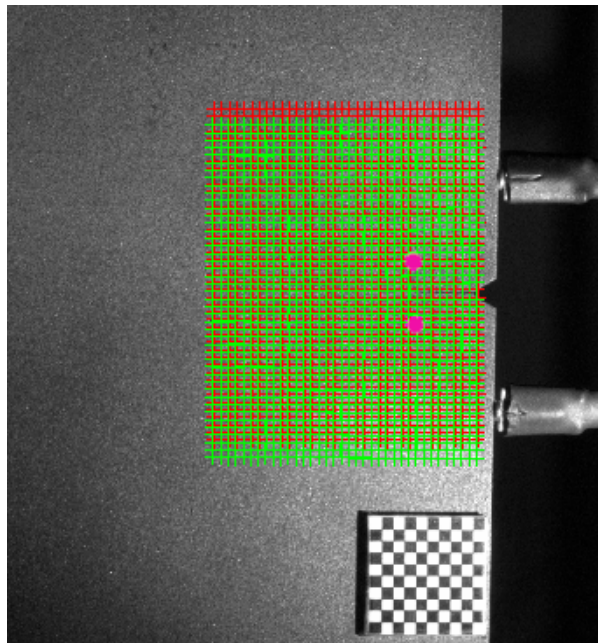


Abbildung 6.5.: Bestimmung der Risspitzenöffnungsverschiebung CTOD δ_5 mit Hilfe der digitalen Bildkorrelation.

Um die Auswertung der Risspitzenöffnungsverschiebung einer größeren Zahl an Proben zu erleichtern, wurde ein interaktives MATLAB[®]-Tool entwickelt.

Nach Auswahl eines rechteckigen Rasters im Bereich der Rissspitze, können die Positionsänderungen der Rasterpunkte (homologer Punkte) aufeinanderfolgender Bilder bestimmt werden. Die Zuordnung der homologen Punkte erfolgt mit Hilfe der Kreuzkorrelation der Grauwertmuster des gerasterten Bereichs. Wie in Abb. 6.5 zu sehen ist, wird im ersten Bild die Skalierung in Pixel pro Millimeter mit Hilfe eines Maßstabes (Schachbrett) festgelegt. Nach Markieren der Rissspitze werden die Positionen der zu verfolgenden Punkte in den vertikalen Abständen von ± 2.5 mm automatisch markiert. Die DIC und Messung der Rissspitzenöffnungsverschiebung δ_5 für die gesamte Bildfolge läuft danach automatisch ab. Zur Erzeugung des stochastischen Grauwertmusters wird die Probe vor der Messung durch einen mittels Lackspray erzeugten feinen Sprühnebel gezogen.

6.4. Versuchsergebnisse

In Abb. 6.6 sind die gesammelten, auswertbaren Versuchsergebnisse für die unterschiedlichen Anfangsriszlängen zu sehen. Man erkennt bei allen Versuchen den typischen Verlauf der R-Kurven mit starkem Anstieg zu Beginn der Rissverlängerung und den darauffolgenden Übergang in einen annähernd linearen Verlauf. Aufgrund der Probenform, des Materialverhaltens und der Versuchsführung tritt nach einem kurzen Risswachstum Instabilität auf. Die beobachtbaren Riszlängen liegen für einen Großteil der Versuche im Bereich zwischen 3 mm und 5 mm. Da sich die Rissverlängerung bei Annäherung an den Instabilitätspunkt beschleunigt, fallen in diesen Bereich deutlich weniger Messpunkte. Zusätzlich unterliegen die Messpunkte in diesem Bereich auch einer größeren Streuung, da das Risswachstum kurz vor Erreichen der Instabilität unstetig, d.h. in Form kleiner Sprünge, erfolgt.

6.4.1. Auswertemethodik

In Abb. 6.7 ist ein typisches Ergebnis eines einzelnen Versuchs dargestellt. Auch wenn das Ziel für die praktische Anwendung in der Crashsimulation in der Ermittlung eines einzelnen kritischen Rissöffnungswinkels ψ_c besteht, wird für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit der gesamte δ_5 -R-Kurven-Verlauf benötigt.

Zur einfacheren Integration in der Simulation ist es praktikabel, die Versuchsdaten mit Hilfe einer Modellfunktion anzunähern. Wie in Abb. 6.7a gezeigt, bildet die Modellfunktion

$$\delta_{5,\text{fit}} = b\Delta a + c\Delta a^d \quad (6.3)$$

den experimentellen Verlauf der Daten in guter Näherung ab. Zur Auswertung des kritischen Rissöffnungswinkels wird der lineare Bereich ab einer Rissverlängerung von mind. 1.5 mm (Probendicke) in der δ_5 -R-Kurve gewählt. Der auf diese Weise bestimmte kritische Rissöffnungswinkel wird daher mit ψ_{δ_5} bezeichnet.

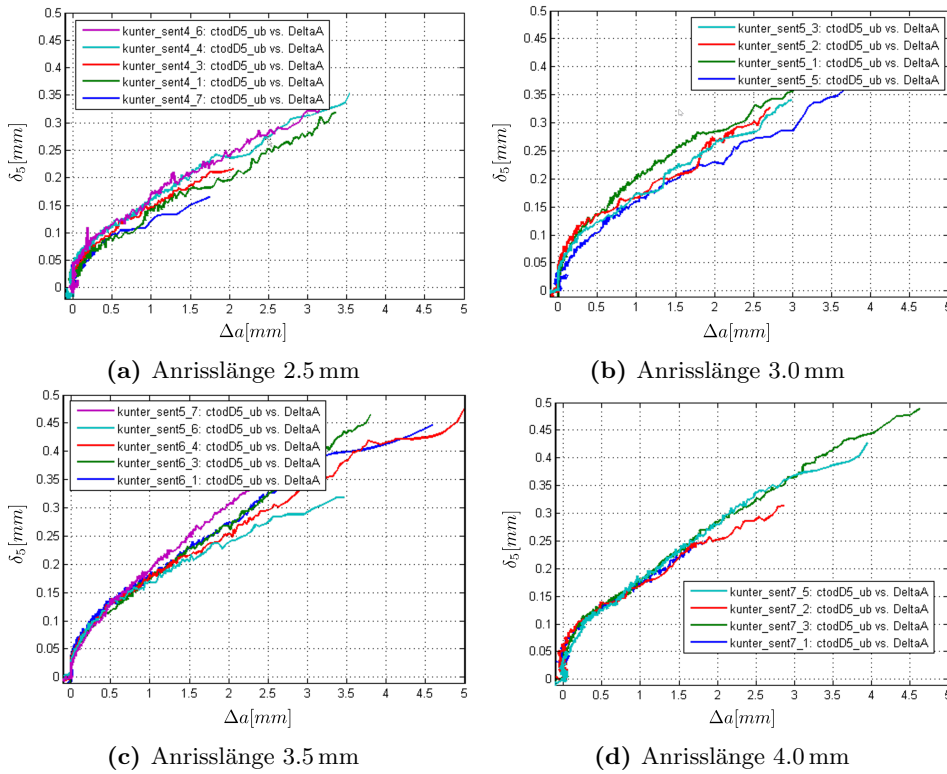


Abbildung 6.6.: Risswiderstandskurven der einseitig gekerbten Zugproben für die Risspitzenöffnungsverschiebung CTOD δ_5 bei unterschiedlichen Anfangsrisslängen (inklusive Kerb)

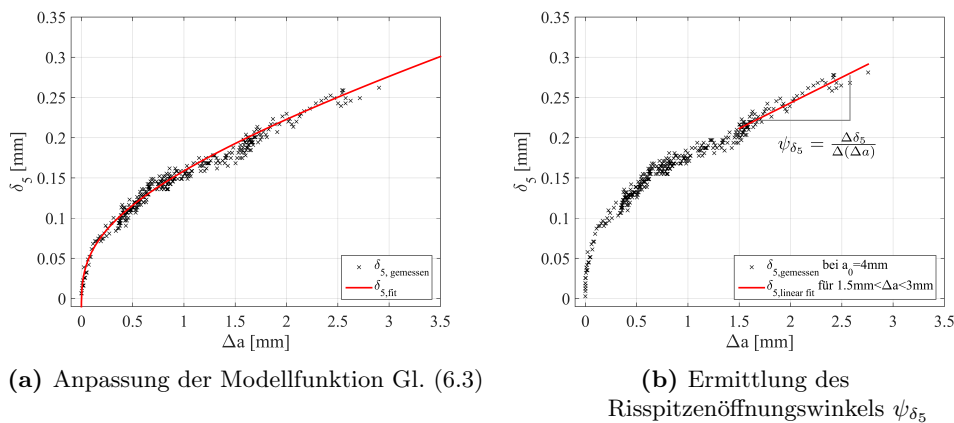


Abbildung 6.7.: Auswertung der gemessenen $\delta_5 - \Delta a$ -Risswiderstandskurven und
 (a) Parametrierung der Modellfunktion
 (b) Ermittlung eines kritischen Rissöffnungswinkels ψ_{δ_5} .

6.4.2. Auswertungsergebnisse

Abb. 6.8 zeigt die Ergebnisse der Auswertungen für die in Abb. 6.6 dargestellten Versuchsdaten. Die R-Kurven stammen aus den mit den Anfangsriszlängen korrespondierenden Messreihen.

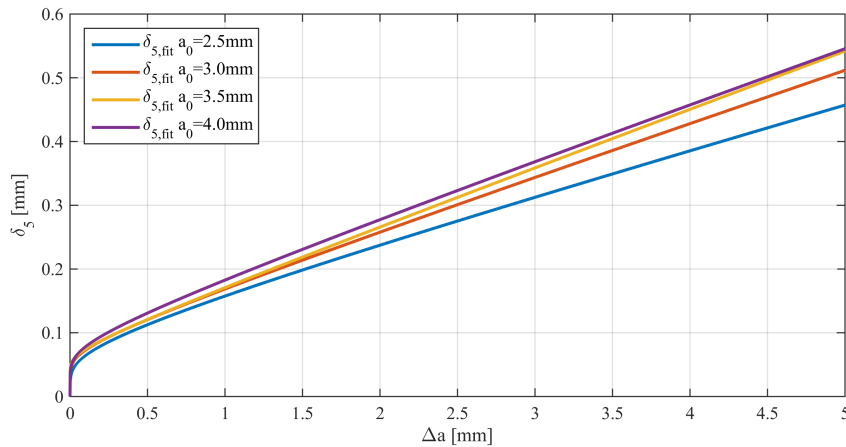


Abbildung 6.8.: $\delta_5 - \Delta a$ -Risswiderstandskurven der einseitig gekerbten Zugversuche, ermittelt durch Anpassung der Modellfunktion (6.3) an die Ergebnisse der Messreihen mit unterschiedlichen Anfangsriszlängen.

Man erkennt eine leichte Tendenz zu steileren $\delta_5 - \Delta a$ -R-Kurven mit steigenden Anfangsriszlängen. Diese Tendenz lässt sich aber aufgrund der zu geringen Datenlage nicht statistisch absichern. In Abb. 6.9 sind die Mittelwerte und die Standardabweichungen der einzelnen Messreihen als Fehlerbalken dargestellt. Der Gesamtmittelwert aller Versuche ist als durchgängige, rote Linie und das zugehörige Streuband (\pm eine Standardabweichung) als strichlierte, rote Linie zu sehen.

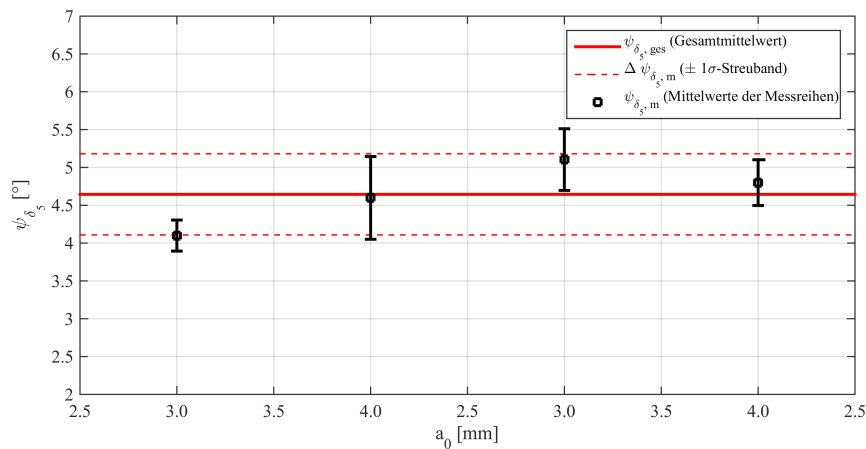


Abbildung 6.9.: Rissöffnungswinkel ψ_{δ_5} aus den Messreihen der einseitig gekerbten Zugversuche mit unterschiedlichem Anfangsriszlängen.

Nimmt man den Mittelwert und Standardabweichung aller Messungen, so erhält man

$$\psi_{\delta_5, ges} = 4.6^\circ \pm 0.5^\circ.$$

6.4.3. Diskussion und Schlussfolgerung

In [125] wurden experimentelle Untersuchungen des stabilen Risswachstums in höchstfesten Automobilstählen durchgeführt. Dabei wurden die Rissöffnungswinkel für einen AHSS (DP780) und zwei UHSS (DP980 und Warmumformstahl mit $R_m = 1500$ MPa) bestimmt. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Tab. 6.3 angeführt.

Tabelle 6.3.: Messerergebnisse für den Rissöffnungswinkel ψ_c nach [125]. Die Beifügung T-L bezeichnet eine senkrecht zur Walzrichtung stehende Laststrichtung und L-T eine parallel zur Walzrichtung liegende Last.

Probe	DP980 (T-L)	DP980 (L-T)	B-Stahl (L-T)	DP780 (L-T)
ψ_c [°]	7.0 ± 0.5	4.7 ± 0.9	3.5 ± 0.4	7.4 ± 0.8

Zieht man nun den Vergleich zwischen den in [125] gemessenen Werten mit dem Ergebnis in dieser Arbeit, so sieht man zwar, dass der ermittelte Wert von $\psi_{\delta_5, ges} = 4.6^\circ \pm 0.5^\circ$ in den Bereich der in Tab. 6.3 aufgelisteten Werte fällt, das Ergebnis jedoch in Bezug auf den korrespondierenden Bor-Stahl um ca. 1° höher liegt. Allerdings gibt es starke Unterschiede in den beiden angewendeten Messverfahren. Die in Tab. 6.3 gelisteten Werte wurden mit Hilfe von C(T)-Proben gemäß ASTM 2472 [4] und einem a_0/W -Verhältnis von 0.5 durchgeführt. Die Rissöffnung wurde optisch bestimmt. Damit unterscheidet sich die Messmethode in [125] grundsätzlich von der hier gewählten Messmethode über die Rissspitzöffnung δ_5 mit SEN(T)-Proben. Da bereits bei Rissverlängerungen Δa von 3 mm bis 5 mm instabiles Risswachstum einsetzt, können mit den SEN(T)-Proben keine längeren Risse ausgewertet werden, wodurch eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zusätzlich erschwert wird. Zur Abklärung der Diskrepanz wären zukünftige Untersuchungen mit einer alternativen Probengeometrie und einer anderen Messmethodik, beispielsweise über ein δ_5 -Clip Gage [105] oder über eine digitale Verschiebungs- bzw. Dehnungsanalyse im gesamten Rissspitzenbereich zweckmäßig.

7. Rissfortschritt in der Crash-Simulation

In diesem Kapitel werden die Methoden und Modelle aus Kapitel 5 zur Simulation laufender Risse weiterentwickelt. Die Simulationsergebnisse werden anschließend mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Im ersten Schritt wird die Rissspitzenmodellierung mit Hilfe des Kohäsivzonenmodells nach Dugdale anhand eines Zugversuchs mit einer SEN(T)-Probe überprüft und kalibriert. Dazu wird eine implizite HTM-Simulation in MATLAB[®] durchgeführt. Diese Simulationemethode liefert sehr genaue Ergebnisse und lässt sich aufgrund der identischen analytischen Ansatzfunktionen direkt auf die nachfolgenden expliziten Simulationen mit Hilfe der ASM-Technik umlegen. Im abschließenden Teil des Kapitels wird die Methode anhand eines quasistatischen Bauteilversuchs an einem Türaufprallträger demonstriert.

7.1. Implizite HTM-Simulation einer SEN(T)-Probe

In Kapitel 6 wurde gezeigt, wie der Rissspitzenöffnungswinkel ψ_{δ_5} mit Hilfe der δ_5 -R-Kurve gemessen werden kann. Der so ermittelte Winkel kann jedoch nicht direkt in die Simulation übertragen werden. Der Grund dafür liegt in der vereinfachten Modellierung der Rissspitzenverformung durch das Dugdale-Modell, das die realen Verformungen nur näherungsweise beschreibt. Zudem sind die konkret ermittelten Werte für den Rissspitzenwinkel sehr stark von der jeweiligen Definition und Messmethode abhängig. Dies gilt sowohl für die Simulation als auch für den Realversuch. In Abb. 7.1 sind die Risskontur und zwei in der Literatur benutzte Definitionen des Rissöffnungswinkels skizziert.

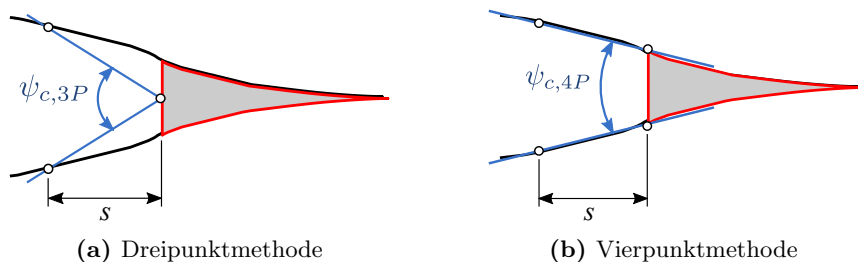


Abbildung 7.1.: Möglichkeiten zur Auswertung des Rissöffnungswinkels in der Simulation.

Bei der Dreipunktmethode werden ausgehend von der Position der physikalischen Risspitze die Rissuferverschiebungen in definiertem Abstand hinter der Risspitze s bestimmt und mit Geraden durch die physikalische Risspitze

verbunden. Der von diesen Geraden eingeschlossene Winkel bildet den Rissöffnungswinkel $\psi_{c,3P}$. Wie man leicht erkennt, ist der Winkel sehr stark von der Wahl der Schenkellänge s abhängig. In [104] wird mit der Vierpunktmethode eine zweite Variante vorgeschlagen, die sich an der optischen Messung des Rissöffnungswinkels [40, 85] orientiert und eine etwas geringere Sensitivität bezüglich der Schenkellänge s aufweist. Dazu werden die Rissflanken, wie in Abb. 7.1b dargestellt, durch Sekanten angenähert, die durch die Rissuferverschiebungen an der Rissspitze und die Verschiebungen im Abstand s hinter der Rissspitze definiert sind. In der Literatur [40, 105, 108] wird bei dünnen Blechwerkstoffen für diesen Abstand ein Wert in der Größenordnung von $s = 1$ mm vorgeschlagen. Für alle nachfolgenden Simulationen wird diese zweite Variante zur Ermittlung des Rissöffnungswinkels verwendet. Das Ziel der ersten Untersuchung besteht nun darin, das Probenverhalten mit Hilfe der Kohäsivzonenmodellierung möglichst genau abzubilden und eine $\psi_{c,4P}$ - Δa -Kurve aus der Simulation zu ermitteln. Neben der $\psi_{c,4P}$ - Δa -Kurve existiert mit der rissschließenden Randspannung $\hat{\tau}$ des Dugale-Modells noch ein weiterer Wert, der mit dieser Simulation festgelegt werden soll. Um eine sehr hohe Genauigkeit zu erreichen, werden für diesen Zweck Simulationen mit einem hybriden Trefftz-Element durchgeführt.

7.1.1. Simulationsablauf

Zur Bestimmung des kritischen Rissöffnungswinkels $\psi_{c,4P}$ und zur optimalen Wahl der Randspannung $\hat{\tau}$ des Dugdale-Modells wird folgende Strategie gewählt:

1. Modellierung des relevanten Rissausbreitungsbereichs durch das hybride Trefftz-Element
2. Steuerung des Rissfortschritts durch Vorgabe der in Abschnitt 6.4.2 ermittelten δ_5 -R-Kurve nach (6.3)
3. Optimale Wahl der Randspannung $\hat{\tau}$ in der Kohäsivzone durch Vergleich der Kraft-Verschiebungskurven von Simulation und Experiment
4. Ermittlung einer R-Kurve für $\psi_{c,4P}$ mit Hilfe der Simulation bei optimal angepasster Randspannung

Der gesamte Simulationsablauf ist in Abb. 7.2 dargestellt. Die äußere Last wird inkrementell erhöht bis der δ_5 -Wert in der Simulation über dem Wert der R-Kurve liegt. Anschließend wird der Riss inkrementell verlängert bis der Wert für δ_5 wieder unter der R-Kurve liegt. Ab einer bestimmten Rissverlängerung, d.h. ab einer bestimmten Lastverschiebung an der Probe, führt eine weitere Rissverlängerung nicht mehr zu einer Unterschreitung der R-Kurve. Ab diesem Instabilitätspunkt wächst der Riss bei konstanter Lastverschiebung weiter.

7.1.2. Simulationsmodell

Als Referenz wird eine Probe mit einer Anfangsrisslänge von $a_0 = 4$ mm gewählt. Die zugehörige experimentell ermittelte δ_5 -R-Kurve ist in Abb. 6.8 zu sehen. Abb. 7.3 zeigt die gewählte Modellierung.

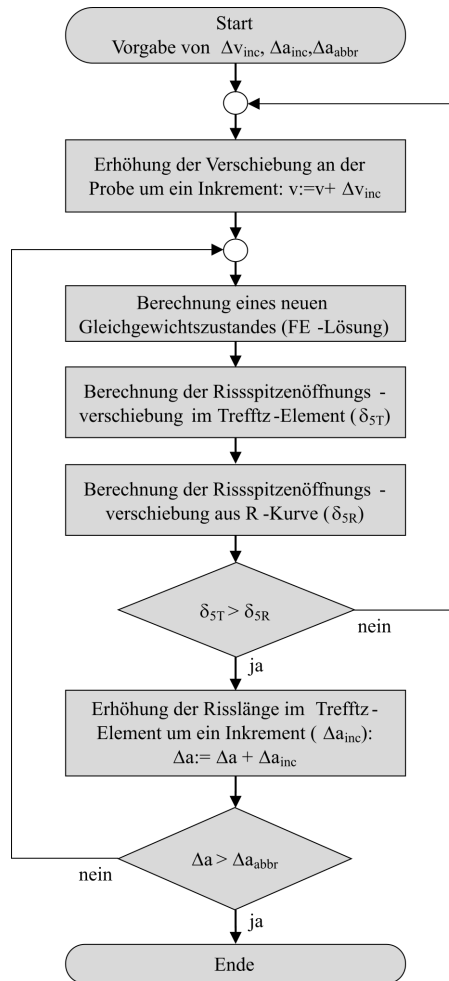


Abbildung 7.2.: Ablauf der impliziten Simulation des SEN(T)-Versuchs bei vorgegebener δ_5 -R-Kurve.

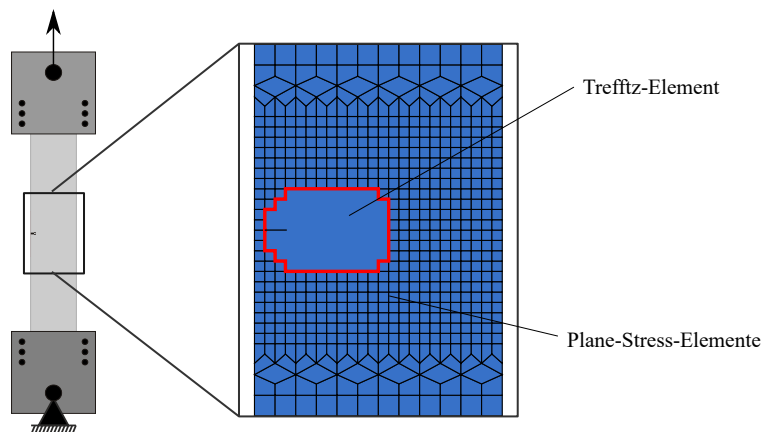


Abbildung 7.3.: Ausschnitt des FE-Netzes mit einem Trefftz-Element im Rissspitzenbereich zur Simulation des Risswachstums

7.1.3. Ergebnisse

Das Verhalten der Probe und der Übergang von stabilem zu instabilem Risswachstum lässt sich in Abb. 7.4 sehr leicht ablesen. In Abb. 7.4a erkennt man anhand des gestuften Verlaufs der δ_5 -R-Kurve das Ablaufschema der Simulation. Die steilen Anstiege entsprechen den Lastverschiebungsincrementen und die flachen Abschnitte den jeweiligen Rissverlängerungen.

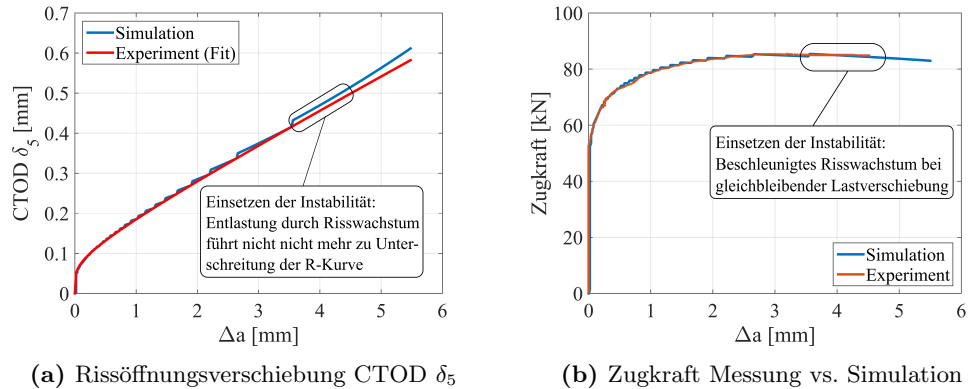


Abbildung 7.4.: Ergebnis der impliziten Simulation bei Vorgabe der δ_5 -R-Kurve.

In Abb. 7.4b sind die resultierenden Zugkräfte über der Rissverlängerung aus der Simulation dem Ergebnis des Realversuchs gegenübergestellt. Eine gute Übereinstimmung der Kraft-Rissverlängerungskurven wird bei einem Wert der Randspannung des Dugdale-Modells von $\hat{\tau}_D = 1700$ MPa erreicht. Auch bei dieser Kurve lässt sich die Instabilität ablesen. Ab einer bestimmten Lastverschiebung bricht die Probe bei konstanter Verschiebung spontan durch. Es lassen sich somit die drei Phasen der Rissausbreitung erkennen. Bis zu einer Zugkraft von 55 kN tritt keine Rissverlängerung auf. Danach folgt ein stabiles Risswachstum bis zu einer Rissverlängerung von 4 mm, gefolgt von instabiler Rissausbreitung.

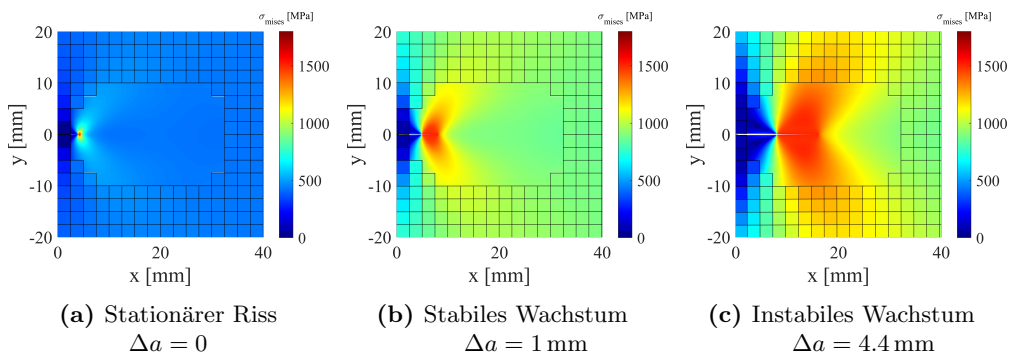


Abbildung 7.5.: Spannungsplot der Vergleichsspannung in drei unterschiedlichen Phasen der Rissausbreitung.

Abb. 7.5 zeigt die Vergleichsspannung in der Umgebung des Trefftz-Elementbereichs für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale in den drei Phasen. Wie in Abb. 7.5a gezeigt, beginnt die Kohäsivzone mit zunehmender Lastverschiebung

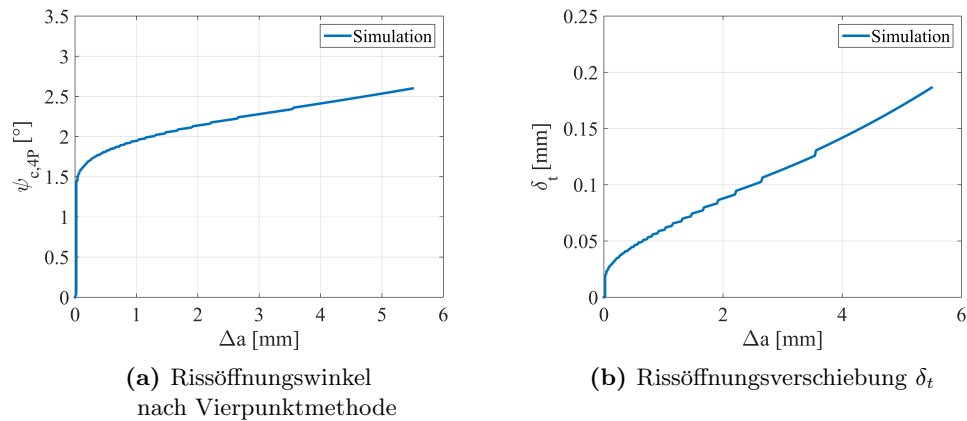


Abbildung 7.6.: Ergebnis der impliziten Simulation für

- (a) Rissöffnungswinkel $\psi_{c,4P}$
- (b) Rissöffnungsverschiebung δ_t .

zu wachsen bis die Rissverlängerung einsetzt. In der darauffolgenden stabilen Risswachstumsphase (Abb. 7.5b) ist für eine Rissverlängerung eine Erhöhung der äußeren Lastverschiebung nötig. Nach Erreichen des Instabilitätspunktes wachsen Riss und Kohäsivzone, wie in Abb. 7.5c dargestellt, bei gleichbleibender äußerer Lastverschiebung weiter¹. Im Realversuch entspricht dies dem spontanen Bruch der Zugprobe.

Da in jedem Berechnungsschritt die Koeffizienten der analytischen Lösung festgelegt werden, können diese zur Berechnung des Rissöffnungswinkels nach der Vierpunktmethode $\psi_{c,4P}$ gemäß Gl. (4.54) und der Rissöffnungsverschiebung an der physikalischen Risspitze δ_t nach Gl. (4.53) verwendet werden. Die auf diese Weise ermittelten R-Kurven sind in Abb. 7.6 dargestellt. Wie man sieht, flacht die R-Kurve des Rissöffnungswinkels mit Beginn des Risswachstums stark ab. Ein stationärer Wert, der den laufenden Riss eindeutig charakterisieren würde, stellt sich beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale im beobachtbaren, stabilen Bereich jedoch nicht ein. Daher wird für die weiteren expliziten Simulationen die gesamte $\psi_{c,4P}$ -R-Kurve zur Steuerung der Rissverlängerung verwendet. Wie bei der δ_5 -R-Kurve wird auch der Verlauf der $\psi_{c,4P}$ - Δa -Kurve, wie in Abb. 7.6 gezeigt, mit Hilfe einer Polynomfunktion approximiert.

¹Das reale Bruchverhalten der Probe im instabilen Bereich wird durch die Steifigkeit der Prüfeinrichtung stark beeinflusst. Durch die Verringerung der Probensteifigkeit infolge der Querschnittsminderung durch das Risswachstum erfolgt eine Lastverschiebung an der Probe aus der vorgespannten Prüfsäule. Die reale Versuchsführung entspricht somit keinem reinen weggeregelten Versuch. Die endliche Steifigkeit der Prüfsäule wird in den hier durchgeführten Simulationen jedoch nicht berücksichtigt.

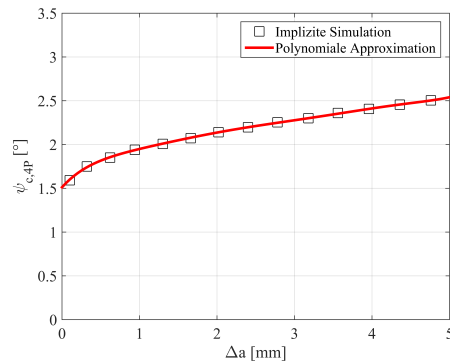


Abbildung 7.7.: Approximation der $\psi_{c,4P}$ -R-Kurve zur Verwendung in der expliziten Simulation.

7.2. Explizite ASM-Simulation

Der im Zuge dieser Arbeit implementierte Software-Prototyp zur Durchführung expliziter Rissfortschritts-Simulationen basiert auf einer Software-Kopplung zwischen MATLAB[®] und LS-DYNA[®]. Ein kurzer Abriss der Implementierung ist in Anhang B zu finden.

7.2.1. Simulationsablauf

Wie bereits in Abschnitt 5.6.3 beschrieben, wird bei der ASM ein Element-Patch in der Umgebung der Rissspitze verwendet. Dieser Patch umschließt den Integrationspfad, auf dem das Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers der Randspannungen minimiert wird. Bei einem wachsenden Riss muss sich dieser Patch dynamisch ändern können, d.h. mit jeder Änderung der Position der Rissspitze werden neue Elemente gesucht.

Patch-Suche

Anhand der Abb.7.8 wird das Schema zum Auffinden des Element-Patches illustriert. Im ersten Schritt werden alle Koordinaten in das Rissspitzenkoordinatensystem (x -Richtung in Rissrichtung) transformiert. Ausgehend von der Rissspitze an der freien Kante des Testelements werden mit einem vorgegebenen Radius alle Elemente gesucht, deren Schwerpunkte innerhalb des vorgegebenen Suchkreises liegen. Im nächsten Schritt werden die außenliegenden Randknoten der aufgefundenen Elemente in mathematisch positiver Richtung bestimmt. Der resultierende Knotenzug definiert den Integrationspfad für das ASM. Zur Berechnung der Spannungen entlang dieses Knotenzugs wird das Verfahren des Superconvergent Patch Recovery (SPR) verwendet, das bereits in Abschnitt 5.4.2 beschrieben wurde. Dazu wird der Patch im letzten Schritt so erweitert, dass der Pfad (mit Ausnahme der freien Elementkanten) vollständig von Elementen umgeben ist.

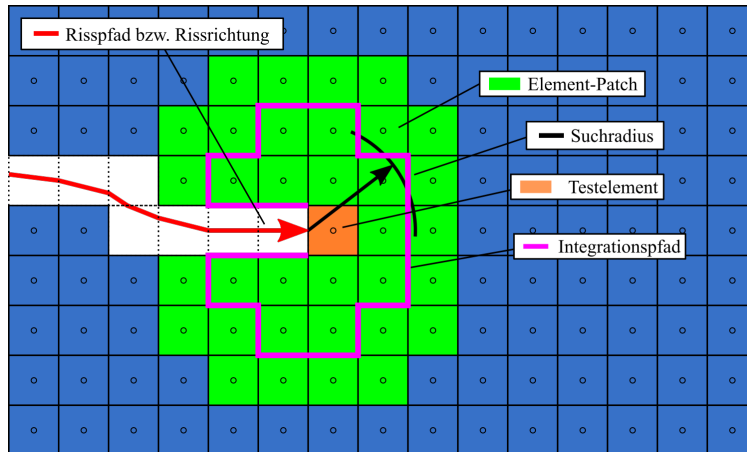


Abbildung 7.8.: Auffinden des Element-Patches zur Festlegung des ASM-Randes (Integrationspfad) und zur Rekonstruktion der Randspannung mit Hilfe des Superconvergent Patch Recovery-Verfahrens (SPR).

Rissausbreitung und Schrittweitensteuerung

Nach der Integration gemäß Gl. (5.38) und Gl. (5.39) wird die analytische Lösung durch Gl. (5.34) im Submodellbereich festgelegt, und es lassen sich Rissöffnungswinkel ψ und Rissrichtung berechnen. Durch Vergleich mit der vorgegebenen $\psi_{c,4P}$ - Δa -Kurve wird bestimmt, ob das Testelement gelöscht wird. Im Falle des Löschens wird ausgehend von der aktuellen Rissspitzenposition die nächste freie Elementkante in Rissrichtung ermittelt und das nachfolgende Testelement identifiziert. Der gesamte Algorithmus ist im Anhang B genauer beschrieben. Da die Berechnung der einzelnen Zeitintegrationsschritte im Crash-Solver unabhängig von der Auswertung des Rissöffnungswinkels mittels ASM erfolgt, ist keine Bewertung in jedem Zeitschritt nötig. Da ein Auswertezyklus mit vergleichsweise hohen numerischen Kosten verknüpft ist, ist die Einführung einer adaptiven Schrittweitensteuerung zweckmäßig. Für die Simulationen, die in dieser Arbeit durchgeführt werden, wird folgende einfache Strategie gewählt:

1. Vorgabe einer anfänglichen Auswerteschrittweite (Maximalschrittweite)
2. Herabsetzen der Auswerteschrittweite bei Einsetzen der Rissverlängerung auf einen unteren Grenzwert (z.B. 100 FE-Zeitschritte)
3. Verdoppelung der Schrittweite bis die Maximalschrittweite erreicht ist oder die nächste Rissverlängerung einsetzt

Mit dieser Strategie kann das Bruchverhalten bei den nachfolgend untersuchten Beispielen gut abgebildet werden².

²Denkbar wäre auch die Einführung einer Abhängigkeit der Auswerteschrittweite vom aktuellen Rissspitzenöffnungswinkels bezogen auf den vorgegebenen R-Wert. So könnten die Auswerteeintervalle bei kritischer Auslastung verkleinert werden, während die Schrittweiten bei unkritischer Rissspitzenbeanspruchung größer gewählt werden könnten. Diese Strategie wird in der vorliegenden Arbeit aber nicht weiter untersucht.

Eine typische Eigenschaft der expliziten Simulation (vor allem bei Verwendung unterintegrierter Elemente) ist die hohe Dynamik der Spannungen. Insbesondere durch das Löschen von Elementen treten starke Oszillationen der Spannungen in den Patch-Elementen auf. Diese Oszillationen können bei einer ausschließlichen Bewertung des Rissausbreitungsrisikos mit Hilfe dieser Spannungen zu einem falschen (zufälligen) Löschen von Elementen führen. Um den Einfluss der Oszillationen zu verringern, werden die Spannungen im Patch mittels gleitender Mittelwertbildung gefiltert. Als Fensterbreite des Mittelwertfilters wird bei den nachfolgenden Simulationen ein Wert von 100 FE-Zeitschritten gewählt. Als weitere Konsequenz der Schwingungen sollte die Auswertung nach jeder Rissverlängerung erst nach einer geeigneten Relaxationszeit stattfinden. Daher wird eine Untergrenze für die Auswertintervalle in der Größe der Fensterbreite des Mittelwertfilters festgelegt.

Einebnen des Patches in gekrümmten Strukturbereichen (Flattening)

Da die analytischen Lösungen für die Rissspitzenfelder im Rahmen der ebenen Elastizitätstheorie hergeleitet werden, muss bei gekrümmten Strukturen eine Näherung zur Übertragung der Spannungsfelder auf die Ebene des Testelement-Systems gefunden werden. Dazu wird in dieser Arbeit der in [77] vorgeschlagene Algorithmus verwendet. Die wesentlichen Schritte werden hier kurz skizziert:

1. Alle Patch-Elemente werden in Dreieckselemente geteilt.
2. Ausgehend vom zentralen Element (Testelement) werden die Elemente, die über Kanten mit dem Testelement verbunden sind, über diese Kanten in die Ebene des Testelements rotiert.
3. Über die neuen, bereits in die Testelement-Ebene gedrehten Elemente werden entlang der Kanten die weiteren Elemente gesucht und ebenso in die Ebene rotiert.
4. Im Falle von mehrfach gekrümmten Strukturen entstehen durch das Verfahren mehrdeutige Knotenpositionen. In diesem Fall wird die Knotenposition durch den Mittelwert repräsentiert. Die damit einhergehende Verzerrung der Kantenlängen wird für die jeweilige Kante gespeichert.
5. Schritt 3 und 4 werden wiederholt, bis alle Elemente in die Testelement-Ebene überführt sind.
6. Aufbau eines virtuellen Feder-Masse-Systems, in dem die Kantenverzerrungen durch vorgespannte Federn abgebildet werden.
7. Relaxation des Feder-Masse-Systems und Zuweisen der resultierenden Knotenpositionen zur Minimierung der gesamten, durch das Einebnen entstandenen Verzerrung.

Die den Elementen zugeordneten Tensoren der Integrationspunktspannungen werden bei den Drehoperationen als invariant angenommen, d.h. ins ebene Koordinatensystem mitgedreht. In Abb. 7.9 ist das Ergebnis des Flattening-Verfahrens für einen gekrümmten Patch (Abb. 7.9a) gezeigt (Abb. 7.9b).

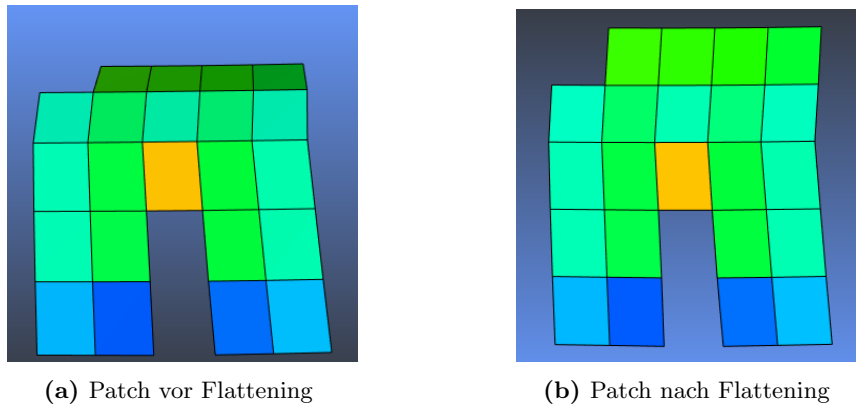


Abbildung 7.9.: Beispiel für das Ergebnis des Einebnens (Flattenings).

7.2.2. Simulation der SEN(T)-Versuche

Neben dem Ziel der erhöhten Genauigkeit stellt vor allem die Verringerung der Netzabhängigkeit die wichtigste Anforderung an die zu entwickelnde Simulationmethode dar. Zur Demonstration der Netzabhängigkeit mit FE-Standardmethoden werden daher zu Beginn Simulationen mit unterschiedlicher Vernetzung der bereits in Abschnitt 7.1 untersuchten SEN(T)-Probe mit 4 mm Anfangsrisslänge durchgeführt. Die Rissausbreitung wird über das Elementversagen mit dem einfachen Kriterium der maximalen plastischen Dehnung $\epsilon_{ps,max}$ mit $\epsilon_{ps,max} \approx \epsilon_f = 6\%$ simuliert.

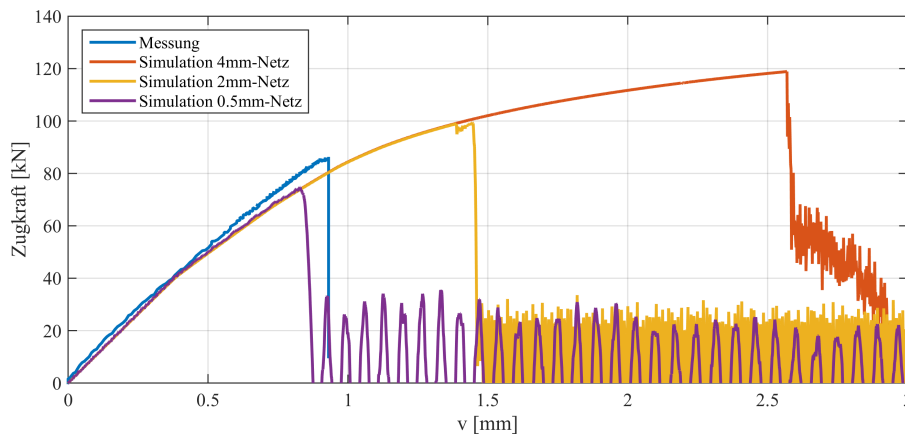


Abbildung 7.10.: Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und Standard-FE-Simulation für unterschiedliche Netzdiskretisierungen.

Abb. 7.10 zeigt den Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven der Simulationen mit dem Versuchsergebnis. Man erkennt die starke Netzabhängigkeit, die im Falle des 4 mm-Netzes zu einer Überschätzung der Probenverlängerung um den Faktor 2.5 führt. Weiters sieht man auch, dass die Bauteilsteifigkeit im Simulationsmodell etwas überschätzt wird. Die Ursache für diese Abweichung wird hier jedoch nicht weiter untersucht. Dieselben Simulationen werden nun

für zwei Netzdiskretisierungen (4 mm und 2 mm) mit der ASM-Methode durchgeführt. Dabei werden mit $\hat{\tau}_D = 1700$ MPa und der in Abb. 7.7 dargestellten $\psi_{c,4P}$ -R-Kurve die in Abschnitt 7.1 aufgefundenen Modellparameter verwendet. Als Suchradius für den Patch wird ein Wert von $r_s = 10$ mm festgelegt. Abb. 7.11 zeigt anhand der analytischen Spannungsfelder (von Mises-Vergleichsspannung) das Verhalten der ASM-Simulation am Beispiel der 4 mm-Netzdiskretisierung für drei verschiedene Risslängen während der Simulation.

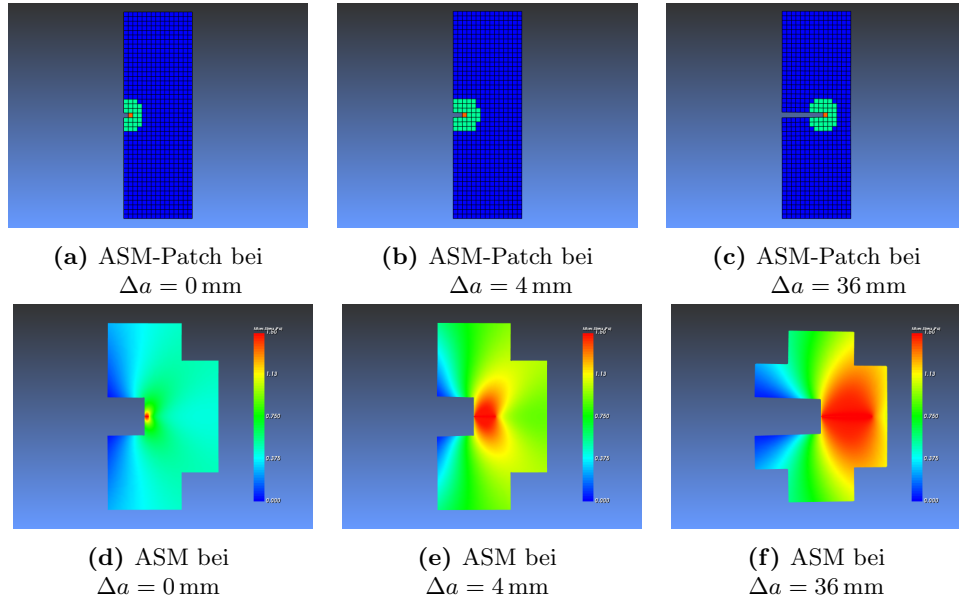


Abbildung 7.11.: Zum Ablauf der expliziten Simulation des Rissfortschritts in einer SEN(T)-Probe mit einem ASM, wobei (a)–(c) die Testelemente (orange) und ASM-Patches (grün) und (d)–(f) die analytischen Lösungen der Vergleichsspannungen bei den angegebenen Risslängen zeigen.

In Abb. 7.12 sind die Kraft-Lastverschiebungskurven der Simulation dem Ergebnis der Messung gegenübergestellt. Es zeigt sich eine sehr gute Prognose des Bruchverhaltens bei gleichzeitig minimaler Netzabhängigkeit.

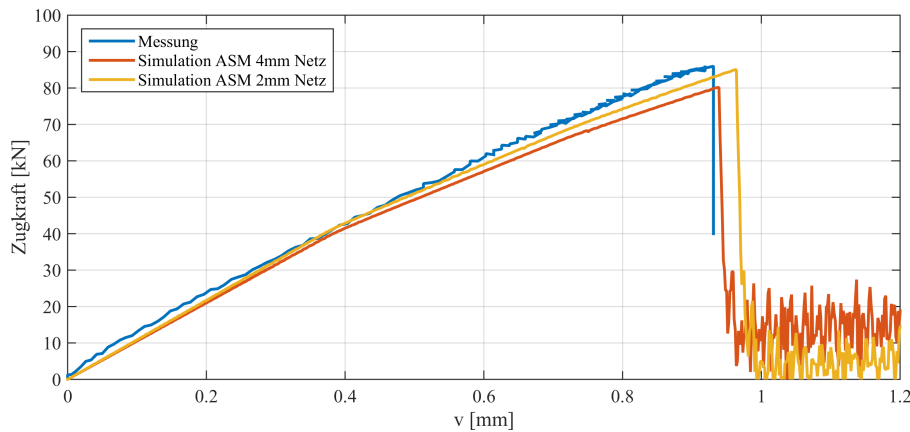


Abbildung 7.12.: Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und ASM-Simulationen für zwei unterschiedliche Netzdiskretisierungen (2 mm und 4 mm).

7.2.3. Komponentenversuch

Als Validierungsbeispiel wird ein einfacher quasistatischer Versuch an einem Realbauteil durchgeführt. Als Beispiel wird dafür ein pressgehärteter Türaufprallträger (22MnB5) gewählt. Dieses sehr steife Bauteil hat im Querschnitt die Form eines W-Profiles. Ohne künstlich eingebrachte Schwächung tritt im Dreipunkt-Biegeversuch kein Versagen durch Rissinitiierung und Rissausbreitung auf. Stattdessen beginnt sich das Bauteil bei sehr hohen Kräften plastisch zu deformieren, wobei sich die W-Form in diesem Bereich aufweitet. Um ein reproduzierbares Versagen durch Rissfortschritt zu gewährleisten, wird das Bauteil daher durch Einbringen eines definierten Sägeschnitts einseitig geschwächt. Die Versuchsanordnung und die Schwächung durch den Sägeschnitt sind in Abb. 7.13 zu sehen. Während des Versuchs werden der Traversenweg der Prüfmaschine und die Druckkraft im Stempel gemessen.

Wie bei den SEN(T)-Proben werden zu Beginn wieder zwei Standard-FE-Simulationen mit Modellen unterschiedlicher Netzdiskretisierung (5 mm-Netz und 2.5 mm-Netz) durchgeführt. Das Simulationsmodell (2.5 mm-Netz) ist in Abb. 7.14 dargestellt. Als Kriterium für das Löschen von Elementen wird wieder die Bedingung für die plastische Vergleichsdehnung $\epsilon_{ps,max} \geq 6\%$ herangezogen.

Abb. 7.15 zeigt den Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Versuchsergebnis. Die Kraft wird in der Simulation über einen Fläche-Fläche-Kontakt zwischen Stempel (Starrkörper) und Bauteil bestimmt. Auch hier erkennt man deutlich das zu späte Versagen in der Simulation und die starke Netzabhängigkeit.

Die Simulationen werden nun für beide Netzdiskretisierungen (5 mm und 2.5 mm) mit der ASM-Methode durchgeführt, wobei mit $\hat{\tau}_D = 1700$ MPa und der $\psi_{c,4P}$ -R-Kurve aus Abb. 7.7 wieder dieselben Modellparameter wie bei den SEN(T)-Proben verwendet werden. Auch für den Patch-Suchradius wird bei beiden Simulationen wieder ein Wert von $r_s = 10$ mm gewählt. In Abb. 7.16 ist das Ergebnis der Simulation für einen einzelnen Zeitpunkt dargestellt.

Abb. 7.16a zeigt das FE-Netz des Türaufprallträgers im deformierten Zu-

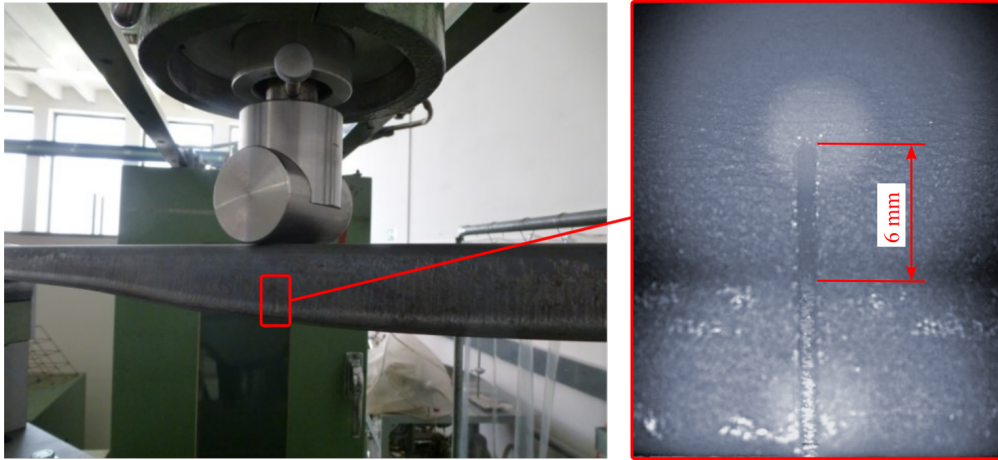


Abbildung 7.13.: Dreipunktbiegeversuch des Türaufprallträgers mit eingebrachtem Sägeschnitt mit 6 mm Länge, bezogen auf den Mittelpunkt des Übergangs von Flansch zu Bauteil-Flanke.

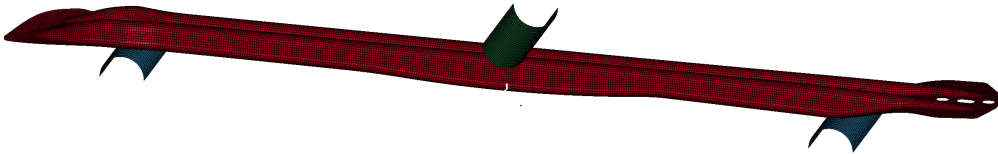


Abbildung 7.14.: FE-Modell für den Dreipunkt-Biegeversuch mit geschwächtem Türaufprallträger mit 2.5 mm-Netzdiskretisierung.

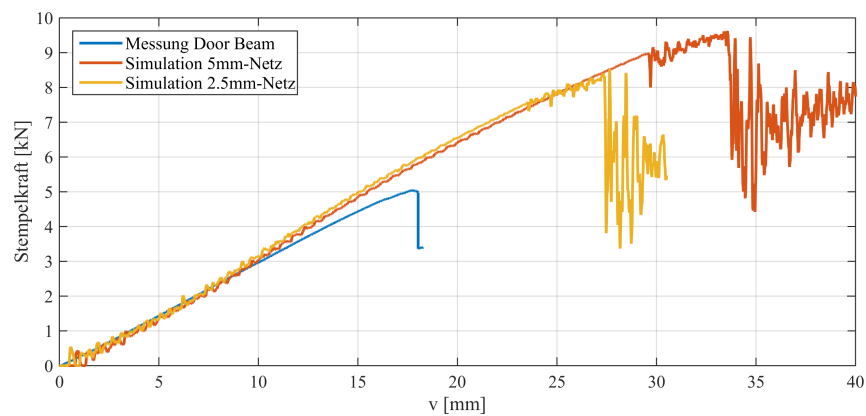
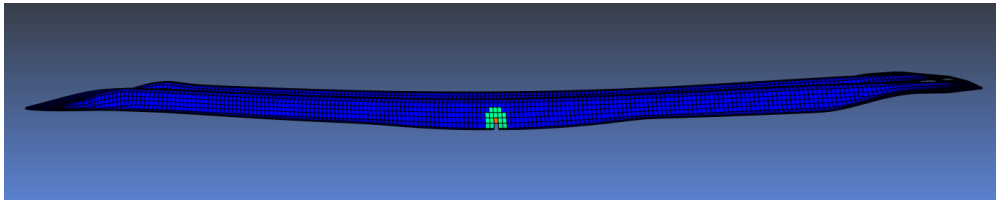
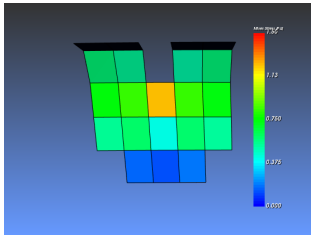


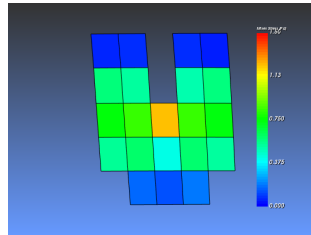
Abbildung 7.15.: Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und Standard-FE-Simulation bei zwei unterschiedlichen Netzdiskretisierungen (2.5 mm-Netz und 5 mm-Netz).



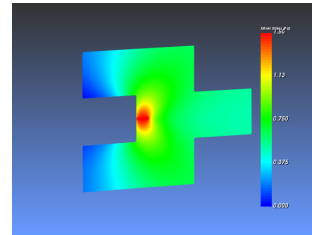
(a) FE-Modell des Türaufprallträgers mit ASM-Patch



(b) ASM-Patch im globalen Koordinatensystem



(c) ASM-Patch nach Flattening im Testelementsystem



(d) Analytische Vergleichsspannung im Riss-KS

Abbildung 7.16.: Ablauf der expliziten Simulation des Dreipunkt-Biegeversuchs mit dem Türaufprallträger.

stand, wobei die Patch-Elemente und das Testelement farblich mit grün und orange gekennzeichnet sind. In Abb. 7.16b bis Abb. 7.16d werden die Zwischenschritte zur Auswertung durch das ASM genauer erläutert. Der ASM-Patch (Abb. 7.16b in globalen Koordinaten) wird zuerst durch das in Abschnitt 7.2.1 beschriebene Flattening in die ebene Form überführt. Die Darstellung des Patches in Abb. 7.16c erfolgt dabei im lokalen Element-Koordinatensystem des Testelements. Im Anschluss wird der eingeebnete Patch in das Riss-Koordinatensystem (x -Achse in Rissrichtung und y -Achse senkrecht auf die x -Achse in der Testelementebene) transformiert und das ASM in diesem Koordinatensystem angepasst. Abb. 7.16d zeigt das ASM im Riss-Koordinatensystem mit der analytisch berechneten von Mises-Vergleichsspannung.

Die Simulation zeigt dasselbe Bruchverhalten wie der Realversuch. Ab dem Zeitpunkt der Rissinitiierung wächst der Riss instabil durch die Bauteil-Flanke und bleibt beim Erreichen der ersten Krümmung stationär. Dieser Bruchvorgang ist mit einem Kraftabfall auf ca. 60% des vorherigen Niveaus verbunden. Abb. 7.17 zeigt die Ergebnisse der Kraft-Weg-Kurven für Versuch und Simulation mit den beiden Netzdiskretisierungen. Nach dem Bruchvorgang durch die Bauteilflanke treten in der Simulation sehr starke Schwingungen in der Kontaktkraft auf. Um die Zeitpunkte des Versagens besser darstellen zu können, sind diese nachfolgenden, stark oszillierenden, Kraft-Kurven der Simulation ausgeblendet. Auch in diesem Versuch zeigt sich die geringe Netzabhängigkeit und die vergleichsweise hohe Qualität der Prognose.

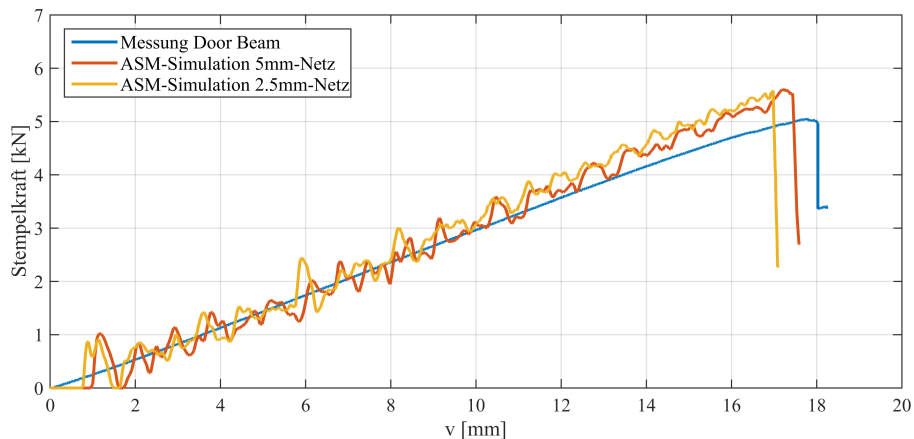


Abbildung 7.17.: Vergleich der Kraft-Lastverschiebungskurven zwischen Versuch und ASM-Simulation mit zwei unterschiedlichen Netzdiskretisierungen (2.5 mm-Netz und 5 mm)-Netz.

7.3. Diskussion und Ausblick

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Rissfortschrittssimulation mit dem ASM aufgrund der geringen Netzabhängigkeit und der numerischen Effizienz ein vielversprechender Kandidat für die Anwendung in der Crashesimulation ist. Es stellt sich nun die Frage, welche Schritte für die Industrialisierung der Methode weiter nötig sind. Der erste Schritt zur Weiterentwicklung besteht darin, die prototypische Umsetzung über die Software-Kopplung durch eine Integration über User-Routinen in der LS-DYNA-Umgebung zu ersetzen. Durch diese Vollintegration und der damit verbundenen weiteren Erhöhung der Effizienz könnten erste Erfahrungen mit komplexeren Modellen gesammelt werden. Es muss jedoch festgehalten werden, dass der praktischen Anwendung auch bei dieser Implementierung Grenzen gesetzt sind, da die Umsetzung über User-Routinen auf SMP (Shared Memory Processing) beschränkt bleibt. Der Grund für diese Einschränkung liegt in der nicht-lokalen Bewertungsstruktur des ASM. Bei einer Simulation mit MPP (Massive Parallel Computing) wird das Simulationsmodell zu Beginn der Rechnung partitioniert und jeder Bereich einem Rechenknoten zugewiesen. Die zwischen den Rechenknoten nötige Kommunikation in der weiteren Simulation findet über MPI (Message Parsing Interface) statt. Erreicht nun ein ASM-Patch die Grenzen eines Rechenknotens, so sind die Elementinformationen (Spannungen, Knotenpositionen und Verschiebungen) aus verschiedenen Rechenknoten zu sammeln und gemeinsam zu bewerten. Der damit verbundene Kommunikations-Overhead und auch die nötige Tiefe des Eingriffs kann über User-Routinen nicht mehr ohne Unterstützung des Software-Herstellers umgesetzt werden. Die Erfahrungen, die mit der SMP-Umsetzung gesammelt werden, können aber als Entscheidungsgrundlage für die weitere Umsetzung der Methode durch den Software-Hersteller dienen.

Neben diesen Schritten in Richtung der Industrialisierung besteht auch auf methodischer Ebene noch Potential für eine Weiterentwicklung. Dies betrifft

vor allem die Rissspitzenmodellierung mit dem Kohäsivzonenmodell. Wie bereits in Abschnitt 7.1 beschrieben, stellt das Dugdale-Modell die einfachste Variante einer Kohäsivzonenmodellierung dar und entspricht durch die vorgegebene konstante risschließende Randkraftdichte einem elastisch-ideal plastischem Materialverhalten. Zur besseren Abbildung der real auftretenden Rissspitzenverformungen wäre ein Kohäsivgesetz, das die Verfestigung und anschließende Entfestigung in der Prozesszone beschreibt, besser geeignet. In Kapitel 4 in Abschnitt 4.2.3 wurde ein erster Ansatz skizziert, wie das Kohäsivzonenmodell mit einer, von der Rissaufweitung abhängigen Randkraftdichte, umgesetzt werden könnte. Um einen effizienten Einsatz im Rissfortschrittsalgorithmus zu ermöglichen, ist für dieses Rissspitzenmodell jedoch noch weitere Entwicklungsarbeit zu leisten.

Ein anderer Aspekt für die methodische Weiterentwicklung betrifft die in diesem Kapitel diskutierte Umsetzung des Rissfortschritts in der expliziten Simulation. In der hier beschriebenen Variante findet der Rissfortschritt durch schrittweise Elimination der Elemente entlang des Risspfades statt. Wie die Elemente durch den Solver entfernt werden, kann in den User-Routinen allerdings nicht beeinflusst werden. Die Erfahrungen zeigen, dass durch jedes Löschen starke Oszillationen der Verschiebungen in den angrenzenden Knoten ausgelöst werden. Dies lässt auf ein Löschen der Elemente innerhalb eines oder weniger Berechnungszeitschritte schließen. Um eine stetigere Rissausbreitung zu gewährleisten, wäre anstelle des spontanen Löschvorgangs ein gezieltes Schwächen des Testelements (Fade Out), das näherungsweise mit einem Rissfortschritt durch das Element in Korrelation gebracht werden könnte, von Vorteil. Ähnliche Ansätze finden sich auch bei der Beschreibung des Element-Versagens mit Hilfe von Schädigungsmodellen.

8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden analytische Berechnungsmethoden zur Beschreibung der Rissausbreitung in der expliziten Crashsimulation mit Hilfe bruchmechanischer Bewertungskonzepte untersucht. Auf Basis dieser Untersuchungen wird im Anschluss ein durchgängiges Simulationskonzept abgeleitet und prototypisch umgesetzt.

Aufgrund der Charakteristik der expliziten Zeitintegration führt eine lokale Feinvernetzung zu einer, für die industrielle Anwendung unzulässigen, Erhöhung der Rechenzeit. In der Serienentwicklung von Fahrzeugkarosserien sehen die Modellierungsrichtlinien derzeit nominale Elementgrößen im Bereich von 2–5 mm vor. Insbesondere bei höchstfesten Blechwerkstoffen finden die maßgeblichen Bruchvorgänge jedoch auf Skalen statt, die deutlich unter dieser Diskretisierung liegen. Daher reicht die lokale Auflösung der Spannungs- und Dehnungsfelder nicht aus, um eine korrekte Prognose des Rissfortschritts durch Element-Elimination beruhend auf kontinuumsmechanischen Schädigungsmodellen zu ermöglichen.

Als Alternative zur FEM lassen sich ebene, elastische Rissprobleme mit der Theorie komplexer Funktionen auch analytisch behandeln. Die analytischen Lösungen können über verschiedene Verfahren mit der FEM kombiniert werden und liefern trotz grober Vernetzung eine sehr hohe Auflösung der lokalen Spannungs- und Dehnungsfelder an der Rissspitze. Außerdem können die riss-treibenden Kräfte mit diesen Lösungen auf direktem Weg ermittelt und in einem bruchmechanischen Rissfortschrittskriterium angewendet werden. In der vorliegenden Arbeit wird der analytische Ansatz aufgrund dieser Vorteile genauer untersucht und eine Methodik zur Erhöhung der Prognosequalität in der Crashsimulation ohne drastische Erhöhung der Rechenzeit abgeleitet.

Den ersten Teil bildet die Herleitung der analytischen Lösungen für die Riss-spitzenfelder. Neben der linear elastischen Modellierung, die für Werkstoffe anwendbar ist, bei denen idealer Sprödbbruch oder Kleinbereichsfließen auftritt, werden auch Lösungen für Kohäsivzonenmodelle gesucht. Diese Modellierung kann trotz Beibehaltung der linear-elastischen Materialbeschreibung für elastoplastisches Bruchverhalten verwendet werden. Die Riss-spitzenplastizität wird dabei durch eine virtuelle Verlängerung der Riss-spitze, auf der eine riss-schließende Randspannung wirkt, realisiert. Somit liegt ein linear-elastisches ebenes Randwertproblem mit einer nicht verschwindenden Kraft-Teilrandbedingung vor. Eine der wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit stellt das Auffinden einer vollständigen Basis komplexer Funktionen zur Beschreibung der partikulären Lösung der Differentialgleichung dar. Diese gefundenen Basisfunktionen genügen einerseits der Differentialgleichung und ermöglichen andererseits, jeden Randspannungsverlauf in einem beschränkten Bereich der Riss-spitze beliebig genau zu approximieren. In der weiteren Arbeit wird, um die Komplexität gering zu

halten und ein durchgängiges anwendbares Konzept zu entwickeln, ein konstanter Randspannungsverlauf (Kohäsivzonenmodell nach Dugdale) verwendet. Für diesen konstanten Verlauf kann mit Hilfe der komplexen Funktionenbasis eine geschlossene Lösung gefunden werden.

Im zweiten Teil werden drei verschiedene Methoden zur Kombination der analytischen Rissspitzenfelder in der FEM aufgegriffen, an die gefundenen Lösungen angepasst und in einer impliziten MATLAB[®]-Testumgebung implementiert. Den ersten untersuchten Ansatz bildet die hybride Trefftz-Methode (HTM). Bei dieser Methode wird der Bereich um die Rissspitze durch ein eigenes, spezielles Element, das sogenannte hybride Trefftz-Element (HTE), modelliert. Die Ansatzfunktionen des HTE genügen dabei a priori den zugrunde liegenden Differentialgleichungen und Kraft-Teilrandbedingungen an den Rissufern. Diese Eigenschaft ermöglicht eine sehr genaue Abbildung der lokalen Spannungs- und Verschiebungsfelder. Ein Nachteil der Methode ist jedoch, dass bei der Simulation eines sich ausbreitenden Risses das Element mit der Rissspitze mitgeführt werden muss und vorhandene Standard-Elemente ersetzt. Somit muss das Netz in der Umgebung der Rissspitze laufend neu adaptiert werden. Zudem müssen die Knotenverschiebungen und Knotenkräfte mit dem umgebenden Netz ausgetauscht werden, wodurch eine Interaktion in jedem Berechnungszeitschritt notwendig ist. Eine zweite Möglichkeit, die analytischen Rissspitzenlösungen mit der FEM zu kombinieren, besteht in der Extended Finite Element Method (XFEM). Bei diesem Ansatz werden die Knoten in der Umgebung der Rissspitze mit den analytischen Verschiebungslösungen und die Knoten bereits durchtrennter Elemente mit Sprungfunktionen angereichert. Durch diese Anreicherung mit zusätzlichen Freiheitsgraden ist es wie bei der HTM möglich, das lokale Verhalten der FE-Lösungen stark zu verbessern. Aber auch hier besteht der Nachteil, dass mit der Methode eine deutliche Steigerung der Komplexität einhergeht. Dies betrifft einerseits die Rissverfolgung, die für die adaptive Anreicherung der Knoten in der Rissumgebung nötig ist und andererseits die numerische Integrationsmethode in den durchtrennten Elementen, die hier durch Subtriangulation speziell angepasst werden muss. Da sowohl bei der HTM als auch bei der XFEM sehr tief in den Solverablauf eingegriffen werden muss, wird in der Arbeit noch eine dritte Möglichkeit untersucht, die sich leichter in die praktische Anwendung überführen lässt. Diese Variante besteht darin, den Riss, wie bei der Verwendung von Schädigungskriterien, mit dem Verfahren der Element-Elimination abzubilden. Die Entscheidung, ob ein Element gelöscht wird, erfolgt jedoch nicht lokal, d.h. auf Basis der Dehnungen und Integrationspunktspannungen im Element, sondern durch ein analytisches Submodell (ASM). Dieses Modell wird über die Anpassung der analytischen Spannungslösungen an das FE-Modell mit genügend großem Abstand von der Rissspitze realisiert. Die Methode besitzt zwar den Nachteil, dass der Diskretisierungsfehler im FE-Netz das Ergebnis stärker beeinflusst, als bei den zuvor beschriebenen Methoden, hat aber den großen Vorteil, dass nur über den Prozess des Element-Löschens in den Solverablauf eingegriffen wird. Daher können die Auswertungszyklen unabhängig von den FE-Zyklen gewählt werden, was den numerischen Overhead vergleichsweise gering hält.

Zur Konzeptionierung des durchgängigen Simulationsverfahrens gehört auch

die experimentelle Ermittlung des Risswiderstandes. Zu diesem Zweck werden bruchmechanische Versuche an einseitig gekerbten Zugproben durchgeführt, bei denen die Rissöffnungsverschiebung δ_5 in Abhängigkeit der Rissverlängerung Δa gemessen wird. Aus der Rissöffnungsverschiebung δ_5 lässt sich der Rissöffnungswinkels ψ_c , der für laufende Risse eine geeignete Bruchkenngröße darstellt, ableiten. Aufgrund der hohen praktischen Relevanz werden die experimentellen Untersuchungen und die Erarbeitung des Versuchskonzepts anhand des Warmumformstahls 22MnB5 im gehärteten Zustand durchgeführt.

Im letzten Teil der Arbeit wird eine Methode zur expliziten Simulation des Rissfortschritts durch eine Software-Kopplung zwischen MATLAB[®] und LS-DYNA[®] entwickelt. Anhand der Ergebnisse der bruchmechanischen Versuche und eines Dreipunkt-Biegeversuchs an einem Realbauteil wird die Simulationemethode validiert. Diese Validierung zeigt eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen bei gleichzeitig geringer Netzabhängigkeit. Zusammenfassend zeigt die Arbeit, dass die ASM-Methode das Potential besitzt, die Prognosequalität bei der Beschreibung des Rissfortschritts in der Crashsimulation mit nur geringen zusätzlichen Berechnungskosten stark zu verbessern. Auf dem Weg zu einer industriellen Anwendung muss jede neue Methode einen mehrstufigen Absicherungsprozess durchlaufen. Dafür muss die derzeitige prototypische Umsetzung im ersten Schritt durch die volle Integration im Crash-Solver auf die nächste Entwicklungsstufe gehoben werden. Erst dadurch können Simulationen komplexerer Fahrzeugkomponenten bzw. erste Simulationen auf Gesamtfahrzeugebene durchgeführt werden, um die weiteren Schritte in Richtung Industrialisierung einzuleiten.

A. Untersuchung der Netzabhängigkeit

In diesem Anhang werden ergänzende Untersuchungen zur Bewertung der hybriden Trefftz-Methode (HTM) und der analytischen Submodell-Methode (ASM) in Hinblick auf die Netzabhängigkeit präsentiert. Wie bei jedem Diskretisierungsverfahren ist diese Abhängigkeit auch bei den hier vorgestellten Modellierungsmethoden vorhanden. Durch eine entsprechende Variation der Einflussgrößen und dem Vergleich der Ergebnisse mit dem Referenzwert lässt sich das Ausmaß der Netzabhängigkeit besser einschätzen. Außerdem können auf Basis dieser Untersuchungen zukünftige Strategien zur Verringerung der Netzabhängigkeit entwickelt werden. Den Ausgangspunkt für alle Untersuchungen bildet die Risskonfiguration aus Tab. 5.2.

A.1. Einfluss von Geometrie und Netzdiskretisierung

Im ersten Abschnitt wird der Einfluss der Elementgrößen und der Größen des Rissspitzenbereichs untersucht. Die Rechnungen werden jeweils für das linear elastische Rissspitzenmodell und das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale durchgeführt.

A.1.1. Hybride Trefftz-Methode (HTM)

Abb. A.1 zeigt die Darstellungen für die von Mises-Vergleichsspannung bei Variation der Elementgrößen von 1.25 mm bis 5.0 mm und Variation der Größe des hybriden Trefftz-Elements (HTE) von 5x5 mm über 10x10 mm bis 15x20 mm. In Abb. A.2 sind die zugehörigen Spannungsintensitätsfaktoren K_I über der Größe des HTE-Bereichs aufgetragen, wobei diese durch die Ausdehnung in y -Richtung r_s repräsentiert wird. Die berechneten Werte sind dem exakten Wert nach [80] gegenübergestellt. Bis auf das 4-knotige TE (5 mm-Netz, 5x5 mm-HTE) sind nur geringe Abweichungen zum Referenzwert vorhanden, wobei sich ein Konvergenzverhalten in Richtung größerer HTE-Bereiche und kleinerer Elementkantenlängen erkennen lässt.

Eine ähnliche Charakteristik zeigt sich auch für die entsprechenden Ergebnisse in Abb. A.3 und Abb. A.4 für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale. Als Bruchkenngröße wird hier die Rissöffnungsverschiebung an der physikalischen Rissspitze gewählt. Da es für diese Größe keine Referenzwerte aus der Literatur gibt, dient als Vergleichswert das Ergebnis einer hochaufgelösten Standard-FE-Simulation. Man erkennt auch hier eine Konvergenz in Richtung kleinerer Elementgrößen und größerer HTE-Bereiche, wobei eine kleine Abweichung des Ergebnisses beim 15x20 mm-HTE zu sehen ist.

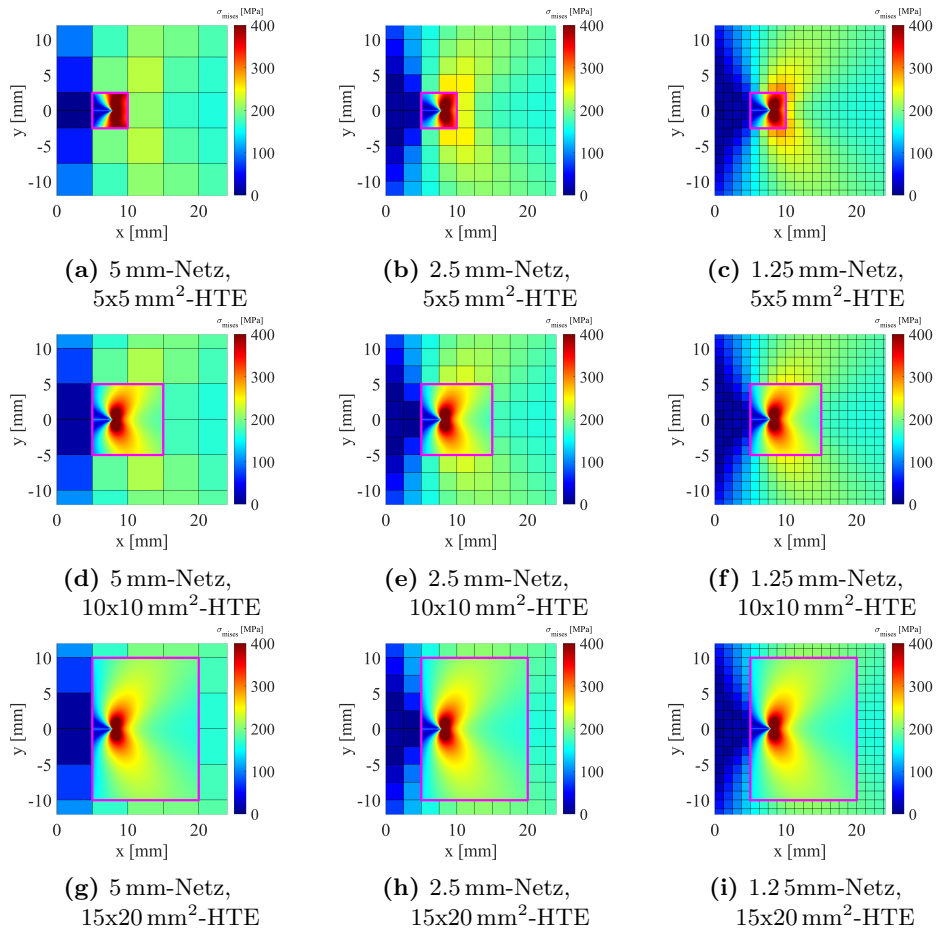


Abbildung A.1.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der HTM-Simulationen für das linear elastische Rissmodell bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) sowie der Größe des Trefftz-Elementbereichs ($5 \times 5 \text{ mm}$, $10 \times 10 \text{ mm}$ und $15 \times 20 \text{ mm}$)

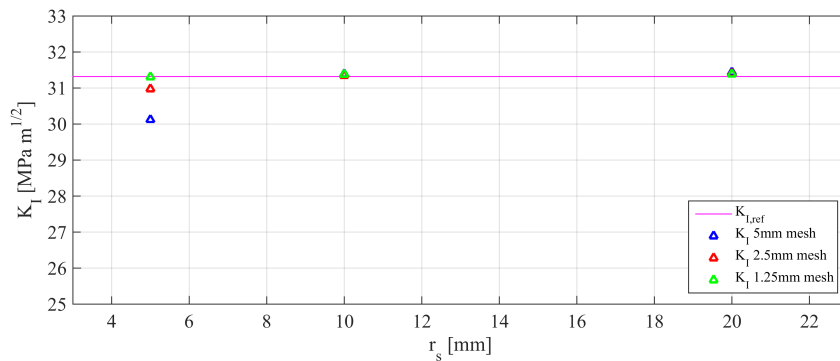


Abbildung A.2.: Simulationsergebnisse (HTM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) und der Größe des Trefftz-Elementbereichs ($5 \times 5 \text{ mm}$, $10 \times 10 \text{ mm}$ und $15 \times 20 \text{ mm}$).

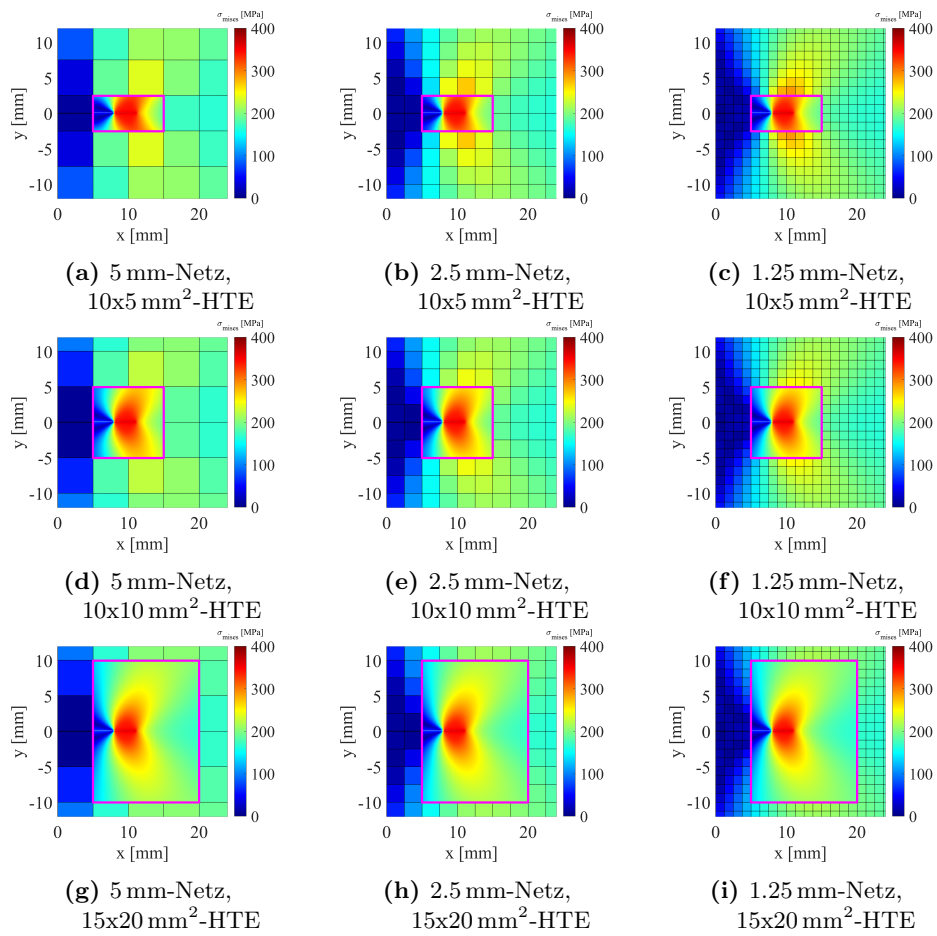


Abbildung A.3.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises Spannungen der HTM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) sowie der Größe des Trefftz-Elementbereichs (10x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm)

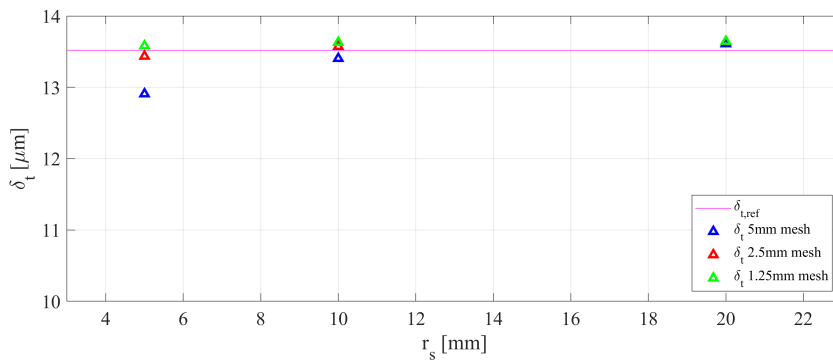


Abbildung A.4.: Simulationsergebnisse (HTM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1.25 mm bis 5 mm) und der Größe des Trefftz-Elementbereichs (10x5 mm, 10x10 mm und 15x20 mm).

A.1.2. Analytische Submodelltechnik (ASM)

Auch für die ASM werden mit Hilfe von Variantenrechnungen die Einflüsse von Netzdiskretisierung und Größe des ASM-Patches untersucht. Die Elementgrößen werden dabei zwischen 1 mm und 4 mm und die Werte für den Suchradius r_s zwischen 8 mm und 12 mm variiert. Zusätzlich wird auch noch der Einfluss des zu minimierenden Funktionals untersucht, wobei die Berechnungen für das erweiterte Potential Π_{pe} und für das Funktional des quadratischen Anpassungsfehlers der Randspannungen $\Pi_{\Delta\tau}$ durchgeführt werden. Die zugehörigen Plots für die von Mises-Vergleichsspannungen sind in Abb. A.5 zu sehen. Für die Berechnung der Spannungsplots wird das erweiterte Potential gewählt. Abb. A.6 zeigt das Ergebnis für die Spannungsintensitätsfaktoren der Variantenrechnungen. Anhand der durchgeführten Rechnungen lässt sich beim linear elastischen Rissspitzenmodell kein systematischer Unterschied der Ergebnisse für beide Funktionale ableiten. Auch das Konvergenzverhalten in Richtung größerer ASM-Bereiche und feinerer Netze ist nicht erkennbar. Man erkennt stattdessen eine leichte Abhängigkeit des Ergebnisses von der Netzfeinheit, die bei allen ASM-Größen in etwa gleich groß ist.

In analoger Weise werden die Variantenrechnungen auch für das Dugdale-Modell durchgeführt. Die entsprechenden Spannungsplots sind in Abb. A.7 und die Rissöffnungsverschiebungen für die drei untersuchten ASM-Größen in Abb. A.8 gezeigt. Hier kann man erkennen, dass die mit dem erweiterten Potential berechneten Werte systematisch zu klein sind. Der Grund dafür liegt in der prinzipiell unterschiedlichen Modellierung zwischen Grobmodell und Submodell. Da im Grobmodell keine lokale plastische Zone an der Rissspitze dargestellt werden kann, sind die Verschiebungen in diesem Bereich kleiner. Diese zu geringen Verschiebungen werden somit auch auf das Submodell übertragen und resultieren in einer systematisch zu geringen Rissspitzenöffnungsverschiebung $\delta_{t,\Pi_{pe}}$. Bezüglich des Konvergenzverhaltens lässt sich hier erkennen, dass mit zunehmender Patch-Größe die Streuung der Ergebnisse geringer wird und sich dem exakten Wert annähert. Daraus lässt sich ableiten, dass der Patch genügend groß sein sollte, um den Einfluss des Diskretisierungsfehlers auf das Ergebnis entsprechend gering zu halten.

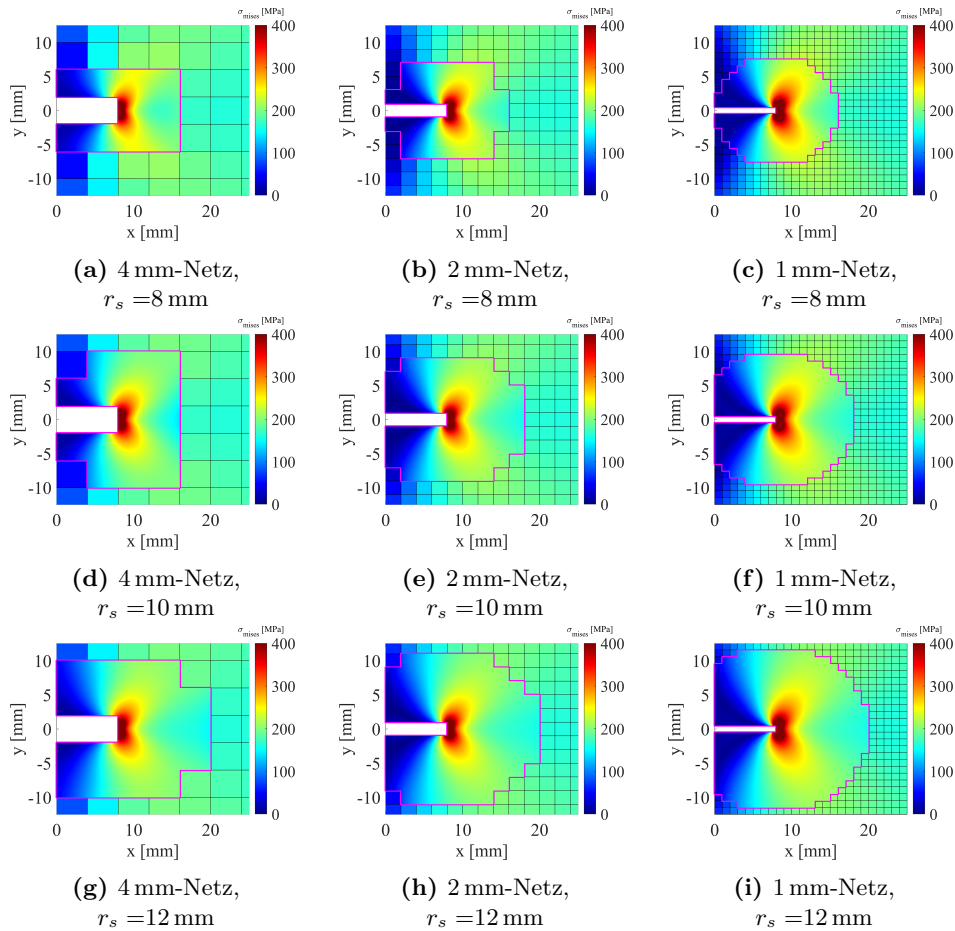


Abbildung A.5.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der ASM-Simulationen für das linear-elastische Risspitzenmodell bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).

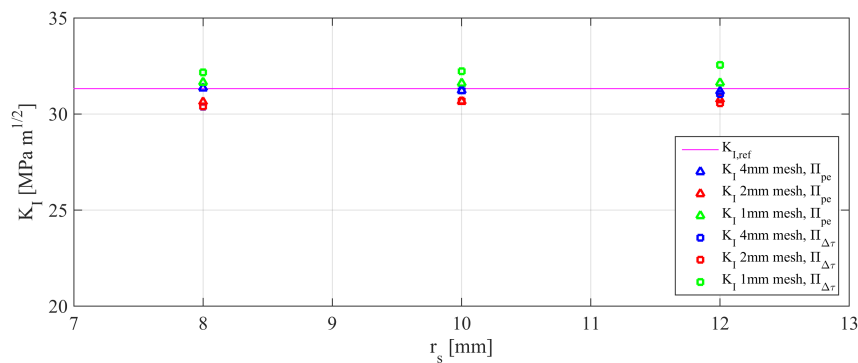


Abbildung A.6.: Simulationsergebnisse (ASM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) und der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).

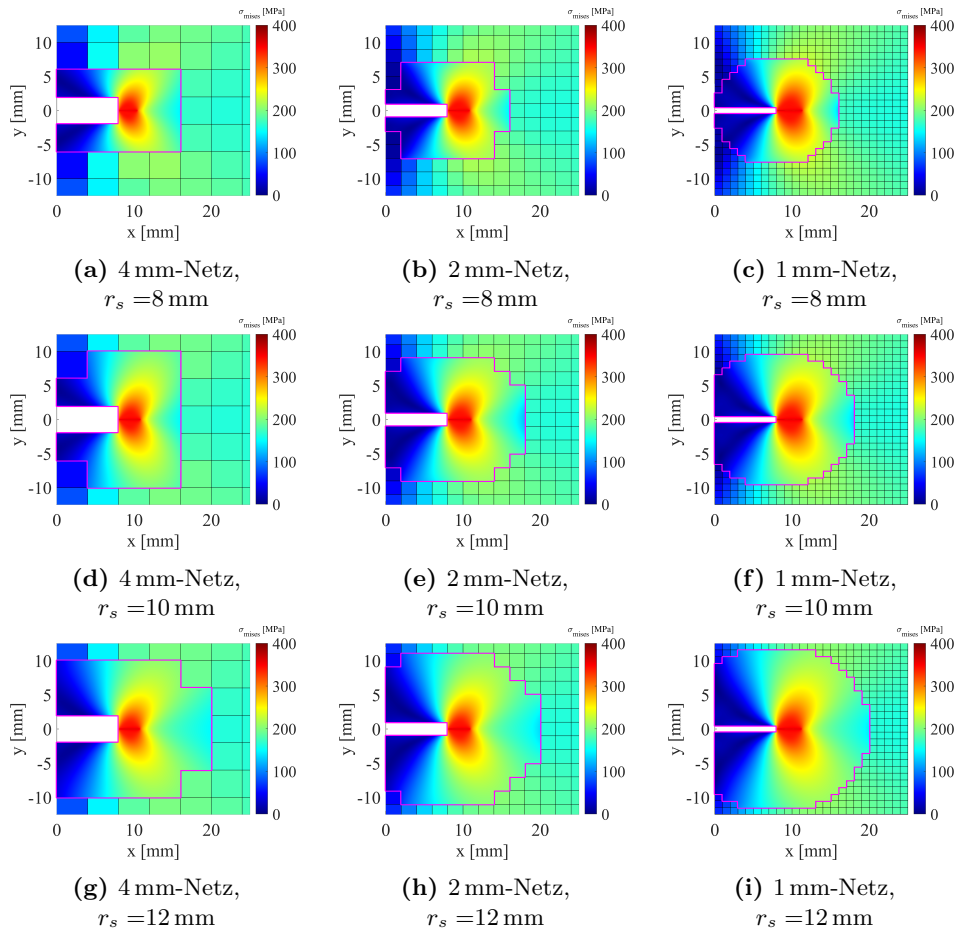


Abbildung A.7.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen der ASM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).

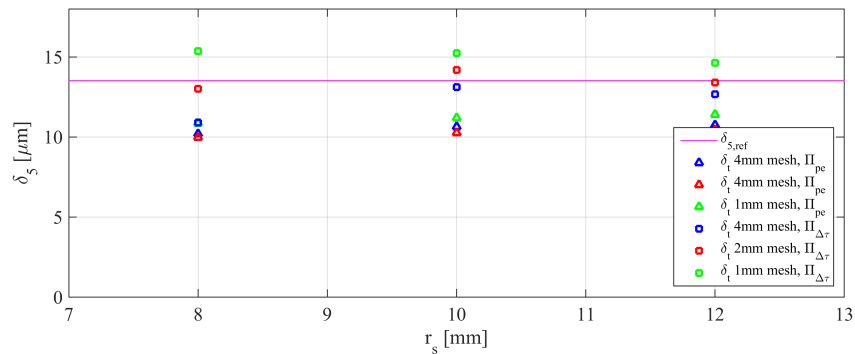


Abbildung A.8.: Simulationsergebnisse (ASM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei Variation der Netzgröße (1 mm bis 4 mm) sowie der Größe des Submodellbereichs, gegeben durch den Suchradius r_s (8 mm bis 12 mm).

A.2. Einfluss von Netzunregelmäßigkeit

Im letzten Teil der Untersuchungen wird die Sensitivität der ASM-Simulation in Hinblick auf Netzunregelmäßigkeiten untersucht. Dazu werden die innen liegenden Knotenpositionen mittels Zufallszahlen in unterschiedlichen Stärken verändert. Abb. A.9 und Abb. A.11 zeigen die jeweiligen Spannungsplots für das linear-elastische Risspitzenmodell und das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale. Bereits rein optisch erkennt man, dass es zwar einen Einfluss der Netzunregelmäßigkeiten gibt, sich dieser aber bei den hier ersichtlichen Netzunregelmäßigkeiten in Grenzen hält. Dies zeigt sich ebenso anhand der Ergebnisse für die Spannungsintensitätsfaktoren in Abb. A.10 und der Rissöffnungsverschiebungen in Abb. A.12.

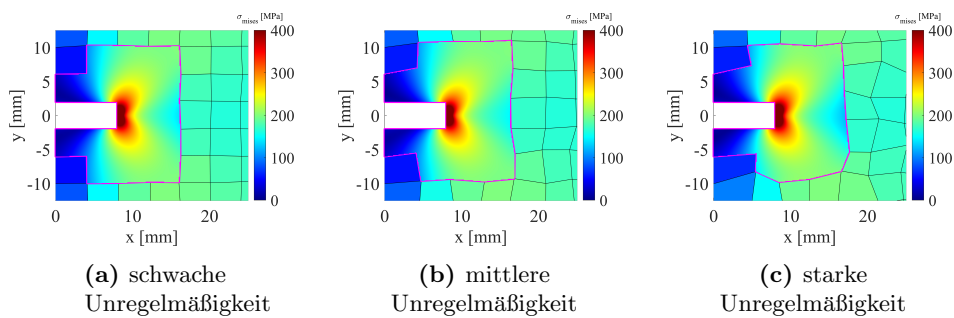


Abbildung A.9.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen von ASM-Simulationen für das linear-elastische Risspitzenmodell bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.

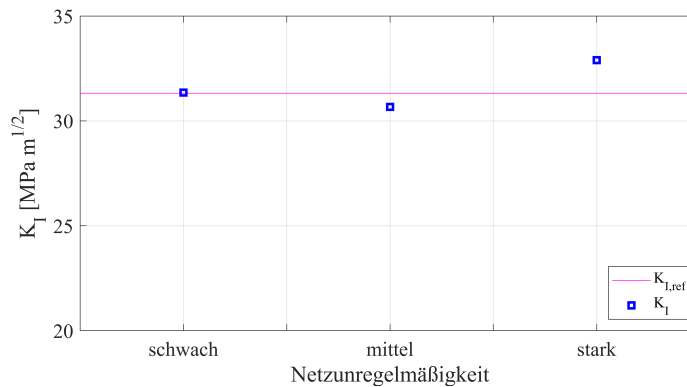


Abbildung A.10.: Simulationsergebnisse (ASM) für den Spannungsintensitätsfaktor K_I bei linear-elastischer Risspitzenmodellierung für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.

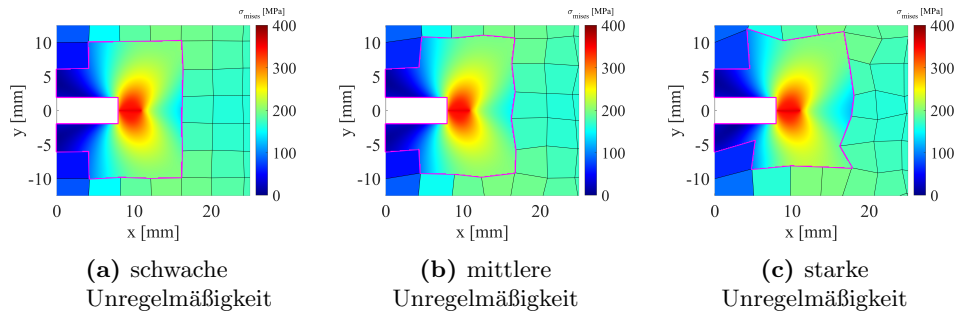


Abbildung A.11.: Vergleich der Spannungsplots für die von Mises-Spannungen von ASM-Simulationen für das Kohäsivzonenmodell nach Dugdale bei drei unterschiedlich starken Netzunregelmäßigkeiten.

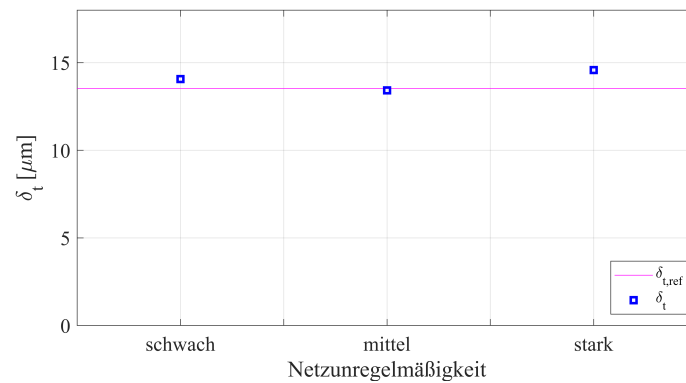


Abbildung A.12.: Simulationsergebnisse (ASM) für die Rissöffnungsverschiebung δ_t beim Kohäsivzonenmodell nach Dugdale für die Testkonfiguration in Tab. 5.2 für drei unterschiedliche starke Netzunregelmäßigkeiten.

B. Umsetzung des ASM durch Software-Kopplung

Der Algorithmus zur expliziten Simulation der Rissausbreitung ist in einem Software-Prototyp mit Hilfe einer TCP/IP-Kopplung von MATLAB[®] mit LS-DYNA[®] realisiert. Eine umfassende Dokumentation des gesamten erstellten Software-Codes würde an dieser Stelle zu weit führen. Die Darstellung beschränkt sich daher auf die wichtigsten Komponenten.

B.1. Ablauf der Simulation

Im Wesentlichen erfolgt die Steuerung des gesamten Ablaufs im MATLAB[®]-Teil der Software. Dazu wird in der Initialisierungsphase, wie in Abb. B.1 gezeigt, die gesamte Geometrie- und Netzinformation des Bauteils an MATLAB[®] gesendet. Aus dieser Information wird im MATLAB[®]-Teil des Codes ein FE-Netz erzeugt und der Element-Patch um das vorgegebene Testelement gesucht.

Nach Ablauf der ersten Auswerteschrittweite findet wieder eine Kopplung statt. Während dieser Zeit bleibt die Berechnung in MATLAB[®] geblockt, bis von LS-DYNA[®] die Zeit des aktuellen Integrationssschrittes gesendet wird. Auf den Empfang dieser Simulationszeit reagiert der MATLAB[®]-Teil durch das Senden der Anforderung der Knotenpositionen und Spannungen für den Patch. Gleichzeitig wird bei dieser Kopplung auch die Liste der zu löschenden Elemente an LS-DYNA[®] gesendet. Falls keine Elemente gelöscht werden sollen, bleibt diese Liste entsprechend leer. Nach dem Empfangen der Knoten- und Elementliste, sowie der Zeit bis zum nächsten Auswerte-Zyklus werden im LS-DYNA[®]-Teil die entsprechenden Knotenpositionen gesucht und mit Hilfe des Flattening-Algorithmus auf die ebene Darstellung überführt. Dasselbe gilt auch für die Elementschwerpunkte. Diese eingeebneten Positionen werden gemeinsam mit den Integrationspunktspannungen im lokalen System des Testelements an MATLAB[®] gesendet. In MATLAB[®] werden anschließend die Spannungen entlang des Knotenzugs mit Hilfe des SPR berechnet und auf das ASM übertragen. Nach erfolgter Anpassung im ASM kann der Rissöffnungswinkel berechnet werden. Falls das Ergebnis des Rissöffnungswinkels den vorgegebenen kritischen Wert übersteigt, wird das aktuelle Testelement an LS-DYNA[®] gesendet, um im nächsten Berechnungszeitschritt gelöscht zu werden. Der Patch wird in Rissrichtung mit Hilfe der in MATLAB[®] gespiegelten Netzinformation neu gesucht nach Ablauf der Zeit bis zum nächsten Auswertungszyklus beginnt die Auswertung von neuem. Das Ablaufschema einer Auswertung ist in Abb. B.2 dargestellt.

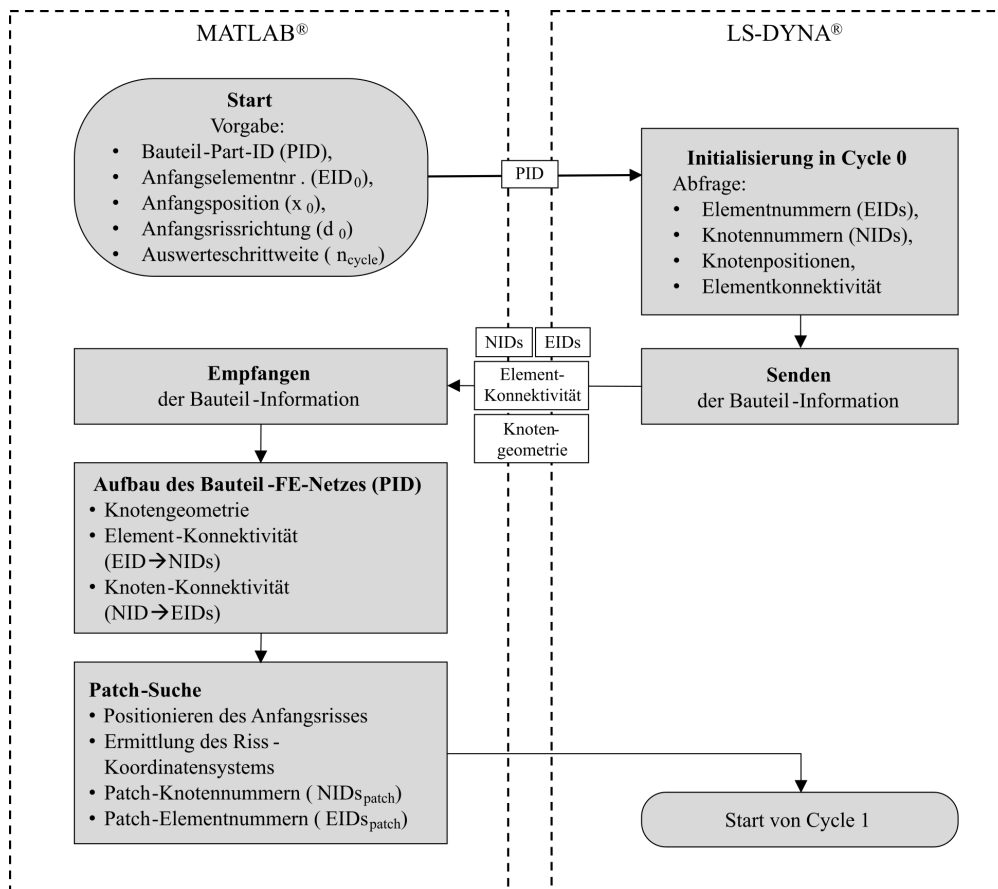


Abbildung B.1.: Ablauf der Initialisierungsphase im ersten Berechnungszyklus nach Start des FE-Solvers.

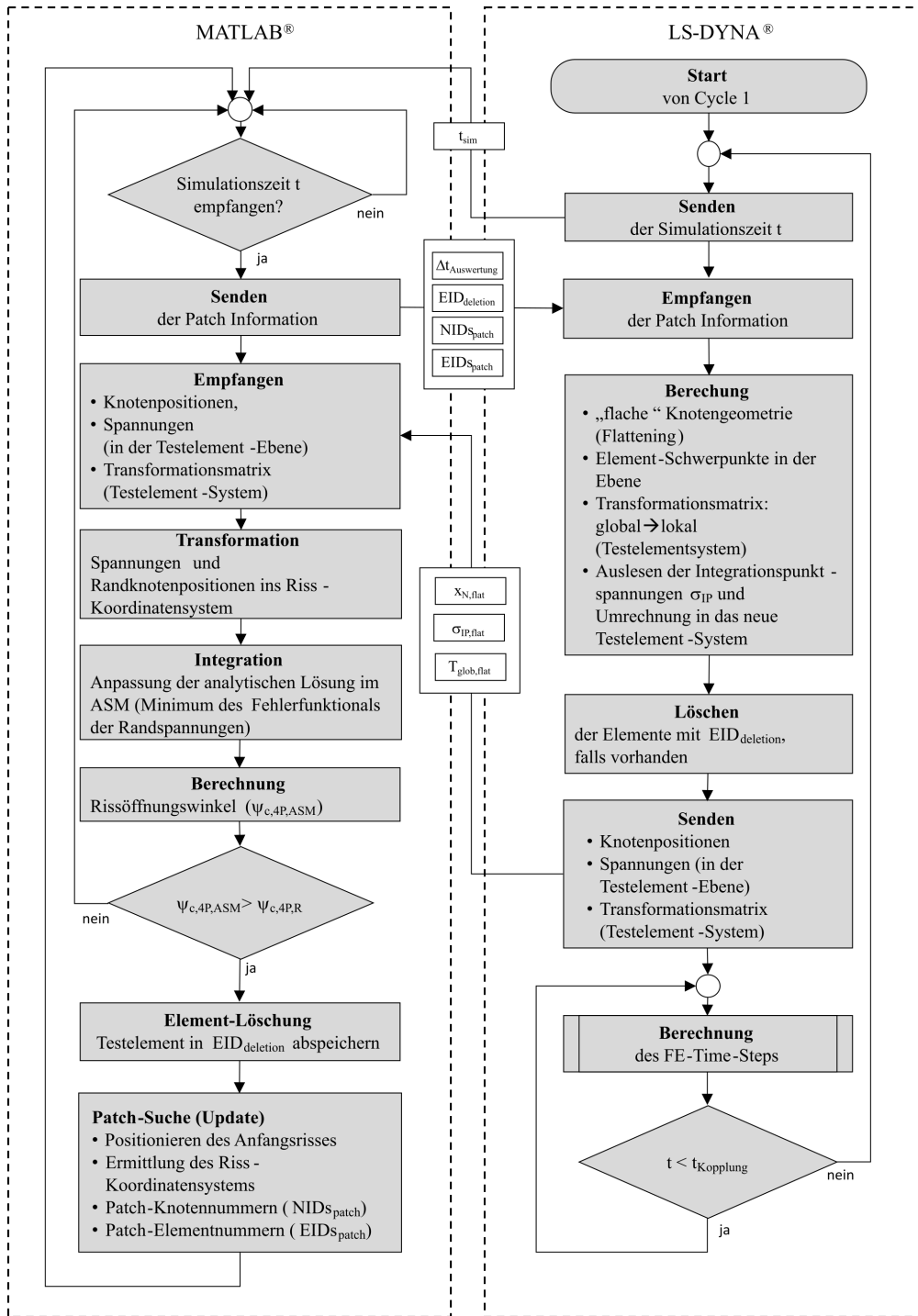


Abbildung B.2.: Ablauf eines Auswertezyklus mit der Darstellung der Informationen, die zwischen MATLAB® und LS-DYNA® ausgetauscht werden.

B.2. Softwarestruktur

In Abb.B.3 ist die Struktur der wesentlichen MATLAB[®]-Klassen abgebildet.

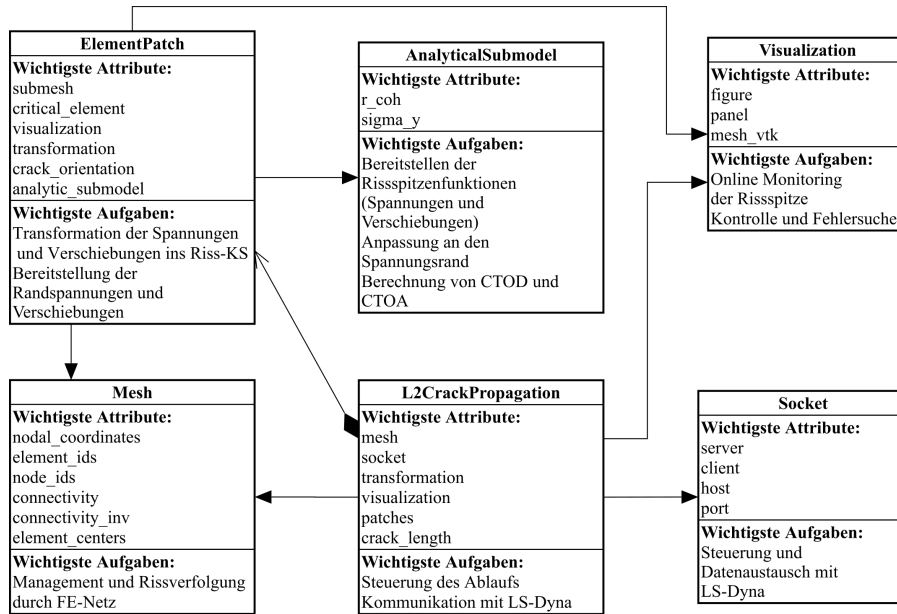


Abbildung B.3.: Übersicht der wichtigsten MATLAB[®]-Klassen für die Implementierung der ASM

Die gesamte, oben beschriebene, Ablaufsteuerung findet in der zentralen L2CrackPropagation-Klasse statt. Die Bauteil-Geometrie sowie der Element-Patch sind als Instanzen der Mesh-Klasse abgespeichert. Diese Klasse beinhaltet auch sämtliche Methoden zur Geometrie-Suche, die zur Steuerung der Rissausbreitung benötigt werden. Die eigentliche Berechnung des Rissöffnungswinkels mit Hilfe der Anpassung der analytischen Spannungslösungen an den Patch erfolgt in der AnalyticalSubmodel-Klasse. Zwecks Kontrolle und Illustration des Simulationsablaufs existiert noch eine Visualization-Klasse, welche die Verformungen des gesamten Bauteils, die Änderungen der Patch-Konfigurationen sowie die Spannungsplots des ASM in jedem Auswertezwischen schritt darstellen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] T. L. Anderson. *Fracture Mechanics*. CRC Press, 2005.
- [2] ArcelorMittal. Warmumformstähle -usibor. online, Jan. 2014.
- [3] ASTM E1820-08:2008-04. Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness, 2008. ASTM E1820-01:1996.
- [4] ASTM-E2472-06:2006. Standard test method for determination of resistance to stable crack extension under low-constraint conditions, 2006. ASTM-E2472-06:2006.
- [5] Y. Bai and T. Wierzbicki. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence. *International Journal of Plasticity*, 24(6):1071 – 1096, 2008.
- [6] Y. Bai and T. Wierzbicki. Application of extended mohr-coulomb criterion to ductile fracture. *International Journal of Fracture*, 161(1):1, 2009.
- [7] Y. Bao. *Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Ocean Engineering., 2003.
- [8] Y. Bao and T. Wierzbicki. A Comparative Study on Various Ductile Crack Formation Criteria . *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126(3):314–324, 06 2004.
- [9] Y. Bao and T. Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1):81 – 98, 2004.
- [10] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech*, VII:63 – 78, 1962.
- [11] F. Barlat and K. Lian. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. part i: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *International Journal of Plasticity*, 5(1):51 – 66, 1989.
- [12] K. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006.
- [13] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [14] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Meth Eng*, 45(5):601–620, 1999.

- [15] S. Bordas, P. V. Nguyen, C. Dunant, A. Guidoum, and H. Nguyen-Dang. An extended finite element library. *Int J Numer Meth Eng*, 71(6):703–732, 2007.
- [16] F. M. Burdekin and D. E. W. Stone. The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. *J Strain Anal*, I:145 – 153, 1966.
- [17] F. Bussamra, P. Pimenta, and J. De Freitas. Hybrid-Trefftz stress elements for three-dimensional elastoplasticity. *Comp Ass Mech Eng Sc*, 8(2-3):235–246, 2001.
- [18] L. Chen, T. Rabczuk, S. Bordas, G. Liu, K. Zeng, and P. Kerfriden. Extended finite element method with edge-based strain smoothing (ESm-XFEM) for linear elastic crack growth. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 209 - 212(0):250 – 265, 2012.
- [19] Corus Automotive, editor. *Pocket book of steel*. Third edition edition, Dec. 2009.
- [20] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, Dec. 1928.
- [21] J. A. T. De Freitas and Z. M. Wang. Hybrid-trefftz stress elements for elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(4):655–683, 1998.
- [22] M. Y. Demeri. *Advanced High-Strength Steels: Science, Technology, and Applications*. ASM International, Materials Park, Ohio 44073-0002, 2013.
- [23] T. A. Driscoll and L. N. Trefethen. *Schwarz-Christoffel mapping*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [24] C. A. Duarte and J. T. Oden. Hp clouds a mesh less method to solve boundary-value problems. Technical report, TICAM - Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 1995.
- [25] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys Solids*, 8(2):100–104, 1960.
- [26] A. H. England. *Complex Variable Methods in Elasticity*. Dover Publications, Inc., 2003.
- [27] F. Erdogan and G. C. Sih. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):519–525, 12 1963.
- [28] W. Fischer and I. Lieb. *Einführung in die Komplexe Analysis: Elemente der Funktionentheorie*. Vieweg+Teubner, 2010.

- [29] T.-P. Fries. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *Int J Numer Meth Eng*, 75(5):503–532, 2008.
- [30] M. Gologanu, J.-B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Recent extensions of gurson’s model for porous ductile metals, 1997.
- [31] E. Goursat. Sur l’existence des fonctions intégrales d’un système d’équations aux dérivées partielles. *B Soc Math Fr*, 26:129–134, 1898.
- [32] G. Green and J. Knott. On effects of thickness on ductile crack growth in mild steel. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 23:167–183, 1975.
- [33] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582–593):163–198, 1921.
- [34] D. Gross and T. Seelig. *Bruchmechanik*. Springer, Heidelberg, 5., erweiterte auflage edition, 2011.
- [35] A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99(1):2–15, Jan. 1977.
- [36] H. Hahn. *Bruchmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1976.
- [37] O. Hahn and A. Rohde. Fat schriftenreihe nr. 148: Stanznieten von aluminium mit stahl mittels halbhoehniet. Technical report, Laboratorium für Werkstoff- und Fügetechnik, Universität-GH Paderborn, 1999.
- [38] J. Hartmann, T. Heubrandtner, K. Kunter, R. Pippan, B. Fellner, and D. Martinez. A special purpose trefftz-element for mode iii crack tip loading. *Engineering fracture mechanics*, 192:210–224, 4 2018.
- [39] J. Hartmann and V. D. Ingenieure. *Simulation von Rissen in höchstfesten Stahlblechen mit einem Trefftz-Element für Mixed-Mode-Beanspruchungen*. Fortschritt-Berichte VDI. Reihe 18, Mechanik/Bruchmechanik. VDI-Verlag, 2019.
- [40] J. Heerens and M. Schödel. On the determination of crack tip opening angle, ctoa, using light microscopy and δ_5 measurement technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(3):417 – 426, 2003.
- [41] T. Heubrandtner. Metamodelle für das versagen punktförmiger verbindungen in der gesamtfahrzeug-crashsimulation - umsetzung und bewertung der modellansätze. In *Simvec Spezial - Simulation von gefügten-Komponenten in der automobilen Anwendung*, 2015.
- [42] T. Heubrandtner, K. Kunter, T. Porsch, B. Fellner, J.-D. Martinez, and M. Kopenig. Ein non local modellansatz für die rissinitiierung an punktförmiger fügetechnik ohne lokale netzanpassung. In *In: LSDYNA Anwenderforum*, 2018.

- [43] T. Heubrandtner, J.-D. Martinez, and B. Fellner. Some aspects on modelling the failure of point connections by using the example of spot welds. In *CAE Grand Challenge*, 2015.
- [44] G. Holzapfel. *NONLINEAR SOLID MECHANICS. A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, second print edition, 2001.
- [45] T. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2003.
- [46] J. Hutchinson. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J Mech Phys Solids*, 16(5):337–342, Sept. 1968.
- [47] C. Inglis. Stresses in a plate to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects*, 55:219–241, 1913.
- [48] G. R. Irwin. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. NRL Report 4763, Naval Research Laboratory, 1956. Report.
- [49] G. R. Irwin. Plastic zone near a crack and fracture toughness. In *Proc. 7th Sagamore Conf.*, pages IV–63, 1960.
- [50] ISO 22889:2013. Metallic materials — Method of test for the determination of resistance to stable crack extension using specimens of low constraint, 2013. ISO 22889:2013.
- [51] ISO12108:2002-12. Metallic materials–Fatigue testing–Fatigue crack growth method, 2002. ISO12108:2002-12.
- [52] ISO12135:2002-12. Metallic materials– Unified method of test for the determination of quasistatic fracture toughness, 2002. ISO12135:2002-12.
- [53] J. Jirousek. Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations. *Comput Method Appl Mech*, 14:65–92, 1978.
- [54] J. Jirousek. *Local Effects in the Analysis of Structures*, chapter Implementation of local effects into conventional and non conventional finite element formulations, page 279–298. Elsevier Science Publishers, 1985.
- [55] J. Jirousek. Hybrid-Trefftz plate bending elements with p-method capabilities. *Int J Numer Meth Eng*, 24(7):1367–1393, 1987.
- [56] J. Jirousek and L. Guex. The hybrid-trefftz finite element model and its application to plate bending. *Int J Numer Meth Eng*, 23:651–693, 1986.
- [57] J. Jirousek and Q. Qin. Application of hybrid-trefftz element approach to transient heat conduction analysis. *Computers & Structures*, 58(1):195 – 201, 1996.

- [58] J. Jirousek and P. Teodorescu. Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity. *Computers & Structures*, 15(5):575 – 587, 1982.
- [59] J. Jirousek and A. P. Zielinski. Survey of Trefftz-type element formulations. *Comput Struct*, 63(2):225–242, 1997.
- [60] M. Jirásek. Objective modeling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil*, 6(6):1119–1132, 2002.
- [61] G. R. Johnson and W. H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates. In *Proceedings 7th International Symposium on Ballistics, The Hague*, pages 541–547, The Hague, 1983.
- [62] H. H. Johnson. Calibrating the electric potential method for studying slow crack growth. *ASTM Materials Research and Standards*, MRS6509-EB:442–445, 1965.
- [63] A. Kamoulakos. Continuum scale simulation of engineering materials. In *Continuum Scale Simulation of Engineering Materials*, chapter 43 The ESI-Wilkins-Kamoulakos (EWK) Rupture Model, pages 795–804. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [64] M. Kanninen, C. Popelar, and D. Broek. A critical survey on the application of plastic fracture mechanics to nuclear pressure vessels and piping. *Nuclear Engineering and Design*, 67(1):27 – 55, 1981.
- [65] B. Karihaloo and Q. Xiao. Asymptotic fields at the tip of a cohesive crack. *International Journal of Fracture*, 150(1-2):55–74, 2008.
- [66] B. L. Karihaloo and Q. Z. Xiao. Accurate simulation of mixed-mode cohesive crack propagation in quasi-brittle structures using exact asymptotic fields in XFEM: an overview. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 6(1-4):267–276, 2011.
- [67] J. F. Knott. *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Butterworth & Co Ltd, 1973.
- [68] J. A. Kolodziej and A. P. Zielinski. *Boundary Collocation Techniques and their Application in Engineering*. WIT Press, Southampton, Boston, 2009.
- [69] G. V. Kolosov. “On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory elasticity. Yuriev, 1909.
- [70] M. Kuna. *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory - Numerics - Applications*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2013.

- [71] K. Kunter, T. Heubrandtner, and R. Pippan. Simulation of crack propagation using hybrid Trefftz method based on a strip-yield crack-tip plasticity model for automotive crash applications. In *Proceedings of the 19th European Conference on Fracture*, 2013.
- [72] K. Kunter, T. Heubrandtner, B. Suhr, and R. Pippan. A hybrid crack tip element containing a strip-yield crack-tip plasticity model. *Eng Fract Mech*, 129:3–13, 2014.
- [73] K. Kunter, T. Heubrandtner, B. Suhr, and R. Pippan. XFEM for a crack model with strip-yield crack tip plasticity. *Proceedings WCCM XI*, pages 364–375, 2014.
- [74] Y. Kwon and H. Bang. *The finite element method using MATLAB*. Advanced topics in mechanical engineering series. CRC Press, 1997.
- [75] J. Lemaitre. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107(1):83–89, 01 1985.
- [76] Z.-C. Li, T.-T. Lu, H.-Y. Hu, and A. H.-D. Cheng. *Trefftz and Collocation Methods*. WIT press, 2008.
- [77] X. Liu, S. Li, X. Zheng, and M. Lin. Development of a flattening system for sheet metal with free-form surface. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(2):1687814016630517, 2016.
- [78] J. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1):289 – 314, 1996.
- [79] B. Moran and C. Shih. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(6):615 – 642, 1987.
- [80] Y. Murakami, editor. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press, 1987.
- [81] N. I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Netherlands, 1977.
- [82] S. Natarajan, S. Bordas, and D. Roy Mahapatra. Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz-Christoffel conformal mapping. *Int J Numer Meth Eng*, 80(1):103–134, 2009.
- [83] F. Neukamm. *Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen*. PhD thesis, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, 2018.
- [84] F. Neukamm, M. Feucht, A. Haufe, and K. Roll. On closing the constitutive gap between forming and crash simulation. In *Proceedings of*

- the10th international LS-DYNA users conference. Detroit, MI, United States, 2008.*
- [85] J. C. Newman Jr., M. A. James, and U. Zerbst. A review of the ctoa/ctod fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:371–385, 2003.
- [86] J. Oden and J. Reddy. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. Dover Books on Engineering. Dover Publications, 2012.
- [87] H. Parisch. *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Teubner Studienbücher Technik. Vieweg+Teubner Verlag, 2013.
- [88] T. Pian and C.-C. Wu. A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10):2331–2343, 1988.
- [89] T. Pian and C. C. Wu. *Hybrid and Incompatible Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2005.
- [90] R. Piltner. *Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen*. Fortschritt-Berichte der VDI Zeitschriften: Konstruktionstechnik, Maschinenelemente. VDI-Verlag, 1982.
- [91] R. Piltner. Special finite elements with holes and internal cracks. *Int J Numer Meth Eng*, 21(8):1471–1485, 1985.
- [92] R. Piltner. Recent developments in the trefftz method for finite element and boundary element applications. *Adv Eng Softw*, 24(1-3):107–115, 1995.
- [93] R. Piltner. Some remarks on finite elements with an elliptic hole. *Finite Elem Anal Des*, 44(12–13):767 – 772, 2008.
- [94] T. Porsch. *Ersatzmodellentwicklung zur Prognose des kerbinduzierten Fügeteilversagens von Halbhohlstanznietverbindungen unter Crashbelastung*. Number 148. Shaker Verlag, May 2020.
- [95] Q. Qin. Trefftz plane elements of elastoplasticity with p-extension capabilities. *J Mech Eng*, 56(1):50–59, 2005.
- [96] Q. Qin and H. Wang. *MATLAB and C programming for Trefftz Finite Element Methods*. CRC Press, 2008.
- [97] Q.-H. Qin. Trefftz finite element method and its applications. *Appl Mech Rev*, 58(5):316–337, 2005.
- [98] J. Rice and D. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3):201 – 217, 1969.

- [99] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386, 1968.
- [100] J. R. Rice. Elastic-plastic models for stable crack growth. In *Mechanics & Mechanisms of Crack Growth, Proceedings*, pages pp. 14–38, 1973.
- [101] J. R. Rice and G. Rosengren. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J Mech Phys Solids*, 16(1):1–12, 1968.
- [102] M. H. Sadd. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press, Burlington, second edition edition, 2009.
- [103] D. Salamon. *Funktionentheorie*. Grundstudium Mathematik. Springer Basel, 2011.
- [104] I. Scheider, M. Schödel, W. Brocks, and W. Schönfeld. Crack propagation analyses with ctoa and cohesive model: Comparison and experimental validation. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(2):252 – 263, 2006. Advanced Fracture Mechanincs for Life Safety Assessments.
- [105] M. Schödel. *Bruchmechanische Untersuchungen der Rissöffnung bei stabilem Risswachstum in dünnem Blech aus Al 5083*. PhD thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2006.
- [106] K.-H. Schwalbe. *Bruchmechanik metallischer Werkstoffe*. Carl Hanser Verlag, München-Wien, 1980.
- [107] K.-H. Schwalbe, editor. *The Crack Tip Opening Displacement in Elastic-Plastic Fracture Mechanics - Proceedings of the Workshop on the CTOD Methodology GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, GmbH, Geesthacht, Germany*. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, GmbH, Geesthacht, Springer, Berlin, Heidelberg, Apr. 1985.
- [108] K.-H. Schwalbe, J. C. N. Jr., and J. L. S. Jr. Fracture mechanics testing on specimens with low constraint—standardisation activities within iso and astm. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:557–576, 2005.
- [109] N. K. Simha, F. D. Fischer, G. X. Shan, C. R. Chen, and O. Kolednik. J-integral and crack driving force in elastic-plastic materials. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 56(9):2876–2895, Jan. 2008.
- [110] I. N. Sneddon and N. F. Mott. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 187(1009):229–260, 1946.
- [111] E. Stein. *Finite Elemente in der Statik*, chapter Die Kombination des modifizierten Trefftzchen Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente, pages 172–185. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1973.

- [112] E. Stein and Ruoff. *Finite Elemente in der Statik*, chapter Die Kombination des modifizierten Trefftz'schen Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente, pages 242–259. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [113] M. Stolarska, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*, 51(8):943–960, 2001.
- [114] P. Tong, T. H. H. Pian, and S. J. Lasry. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *Int J Numer Meth Eng*, 7(3):297–308, 1973.
- [115] E. Trefftz. *Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik*, chapter Ein Gegenstück zum Ritz'schen Verfahren, pages 131–137. Orell Füssli, Zürich, 1927.
- [116] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32(1):157 – 169, 1984.
- [117] Volkswagen Aktiengesellschaft, Wolfsburg. *Service Training: Fahrzeugvorstellung - Der Touareg 2019*, 2018.
- [118] A. A. Wells. Unstable crack propagation in metals, cleavage and fast fracture. In *Proceedings of the Crack Propagation Symposium, Cranfield*, volume Vol. I, pages 210–230, 1961.
- [119] H. M. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6:49–53, 1939.
- [120] M. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J Appl Mech*, pages 526–528, 1952.
- [121] M. L. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24(1):109–114, 1957.
- [122] M. L. Williams. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech*, 28:78, 1961.
- [123] Q. Z. Xiao and B. L. Karihaloo. Asymptotic fields at frictionless and frictional cohesive crack tips in quasibrittle materials. *J Mech Mater Struct*, 1(5):881 – 910, 2006.
- [124] Q. Z. Xiao, B. L. Karihaloo, and X. Y. Liu. Incremental-secant modulus iteration scheme and stress recovery for simulating cracking process in quasi-brittle materials using XFEM. *Int J Numer Meth Eng*, 69(12):2606–2635, 2007.
- [125] S. Xu, W. R. Tyson, P. Martin, and N. Petri. Constitutive behaviour and crack tip opening angle of ultra high strength steel sheets. In *SAE 2010 World Congress & Exhibition*. SAE International, apr 2010.

- [126] A. Zieliński. Trefftz method: Elastic and elastoplastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69(2):185 – 204, 1988.
- [127] O. Zienkiewicz, D. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(2):355–375, 1977.
- [128] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method Volume 1: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, fifth edition, 2005.
- [129] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364, 1992.
- [130] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382, 1992.