

Lehrstuhl für Umformtechnik

Department Product Engineering
Montanuniversität Leoben



MASTERARBEIT

LATTICE STRUCTURE EVALUATION

ENTWICKLUNG, BERECHNUNG UND SIMULATION

Thomas Demmerer

Montanmaschinenbau

Leoben, Juli 2018

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe.

Affidavit

I declare in lieu of oath, that I wrote this thesis and performed the associated research myself, using only literature cited in this volume.

Ort, Datum

Unterschrift

Danksagung

Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. mont. Bruno Buchmayr bin ich für das Ermöglichen dieser Masterarbeit am Lehrstuhl für Umformtechnik und die großartige Unterstützung während der Durchführung zu großem Dank verpflichtet.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Alexander Walzl. Dieser hat mir während seiner Anstellung am Lehrstuhl für Umformtechnik in Leoben sein Wissen über Gitterstrukturen mit großer Hingabe vermittelt. Nach seinem Wechsel in die Privatwirtschaft hat er als selbstverständlich angesehen diese Arbeit in seiner Freizeit weiter zu betreuen.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung bedanken.

Kurzfassung:

Zentrales Thema dieser Arbeit ist die analytische Untersuchung zur Bestimmung der mechanischen Kennwerte von Einheitszellen, welche für Gitterstrukturen in der additiven Fertigung verwendet werden. Diese Fertigungstechnologie gewinnt einen immer größeren Stellenwert in der Fertigung von optimierten und belastungsorientierten Bauteilen. Beispielsweise kann das Energieaufnahmevermögen von Crash-Bauteilen durch den gezielten Einsatz von Metallschäumen enorm verbessert werden [2]. Das mechanische Verhalten von Gitterstrukturen kann durch eine analytische Betrachtung der Einheitszelle charakterisiert werden. Dieses mechanische Verhalten beeinflusst in weiterer Folge maßgeblich die Optimierung der Bauteile und somit das finale Design. In dieser Arbeit wird eine dreidimensionale Einheitszelle mit oktaedrischer Grundform untersucht. Das entwickelte analytische Modell soll durch eine numerische Simulation auf seine Plausibilität überprüft werden. Abschließend wird die untersuchte Zelle mit anderen geometrischen Einheitszellen verglichen, um die jeweilige Performance über den Ansatz nach Ashby zu bestimmen [1].

Abstract:

Central topic of this work is the analytical investigation to determine the mechanical properties of unit cells, which are used for lattice structures in additive manufacturing. This production technology is becoming increasingly important in the production of optimized and load-oriented components. For example, the energy absorption capacity of crash components can be improved enormously by the targeted use of metal foams [2]. The mechanical behavior of lattice structures can be characterized by an analytical consideration of the unit cell. This mechanical behavior subsequently significantly influences the optimization of the components and thus the final design. In this work, a three-dimensional unit cell with octahedral basic shape is investigated. The developed analytical model should be checked for plausibility by a numerical simulation. Finally, the investigated cell is compared with other geometric unit cells to determine the respective performance via the Ashby approach [1].

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Aufgabenstellung und Zielsetzung	2
3 Stand der Technik.....	3
3.1 Gitterstrukturen in der additiven Fertigung	3
3.2 Form von zellulären Strukturen	4
3.3 Mechanische Eigenschaften von zellulären Strukturen	6
3.4 Relative Dichte	8
3.5 Bestimmung der mechanischen Kennwerte von Gitterstrukturen	9
3.5.1 Linear-elastische Deformation	10
3.5.1.1 Elastizitätsmodul	10
3.5.1.2 Poissonzahl	12
3.5.1.3 Knickung	13
3.5.2 Plastische Verformung	14
3.5.2.1 Streckgrenze.....	14
3.5.2.2 Verdichtung.....	15
3.6 Das Oktaeder	16
3.7 Analytisches Modell von Zadpoor und Hedayati	16
3.8 Performance Index	18
4 Analytische Bestimmung der mechanischen Eigenschaften	20
4.1 Geometrie.....	21
4.2 Relative Dichte	22
4.3 Elastizitätsmodul.....	23
4.4 Poissonzahl	27
4.5 Knickung.....	30
4.6 Streckgrenze	32
5 Konstruktion	33
5.1 Konstruktion der Einheitszelle.....	33
5.2 Implementierung in ein konkretes Bauteil	35
6 Simulation der Einheitszelle	36
6.1 Aufbau der Simulation	36
6.2 Linear-elastische Untersuchung.....	37
6.3 Plastische Untersuchung	39
7 Fertigung der Einheitszelle	41
8 Ergebnisse und Diskussion.....	42
8.1 Analytische Ergebnisse.....	42
8.1.1 Elastizitätsmodul.....	42
8.1.2 Poissonzahl	43
8.1.3 Knickung.....	43

8.1.4	Streckgrenze.....	45
8.1.5	Verdichtung.....	45
8.2	Auswertung der Simulationsergebnisse	46
8.3	Vergleich Oktaeder mit anderen Strukturen	50
9	Zusammenfassung und Ausblick.....	51
10	Abkürzungsverzeichnis	52
11	Abbildungsverzeichnis	54
12	Tabellenverzeichnis	56
	Literaturverzeichnis	57

1 Einleitung

Leichtbau ist ein zentrales Thema in der Entwicklung und Schaffung neuer Bauteile [2,5]. Wurde in der Vergangenheit weniger Wert auf eine materialschonende Auslegung und Dimensionierung von Bauteilen gelegt, ist heute, unter anderem getrieben durch den sogenannten „CO₂-Footprint“, eine ressourcenschonende und effiziente Bauteilgestaltung notwendig. Weitere treibende Faktoren sind die „Time-to-market“ oder speziell in der Luft- und Raumfahrt die „Buy-to-Flight“ Ansätze [3,4]. Daher ist es essentiell unsere Ressourcen bestmöglich einzusetzen und neue Wege in der Designentwicklung und Optimierung zu gehen. Wurde ein Auto früher an seiner Motorleistung gemessen, so ist es heute wichtig wegen z.B. der immer größeren werdenden „E-Mobility“ Szene möglichst energiesparend und leicht zu sein [14]. Durch die Kombination der strukturmechanischen Optimierung und der pulverbasierten additiven Fertigung, bietet sich eine neue Spielwiese für die Entwicklung und Herstellung hochkomplexer und mit Gitterstrukturen optimierten Bauteile für die Luft- und Raumfahrt, den Rennsport, die Rettungsindustrie oder auch die Schmuckindustrie. In allen diesen Anwendungen spielen die mechanischen Eigenschaften und das strukturelle Verhalten von zellulären Strukturen eine Schlüsselrolle. Um die mechanischen Eigenschaften von Gitterstrukturen beschreiben zu können ist es wichtig, das Verhalten einer einzelnen Einheitszelle zu analysieren.

2 Aufgabenstellung und Zielsetzung

Diese Arbeit soll eine Schritt für Schritt Anleitung enthalten, mit der die mechanischen Kennwerte von Gitterstrukturen bestimmt werden können. Hierzu wird ein umfangreiches Literaturstudium über zelluläre Strukturen durchgeführt. Die Form von Strukturen, deren mechanisches Verhalten unter einer Belastung sowie deren analytische Bestimmung sind wesentliche Aspekte, auf die im Literaturstudium geachtet wird. Wichtigstes Werkzeug zur Entwicklung des analytischen Modells ist die klassische Festigkeitslehre. Basis bildet eine oktaedrische Einheitszelle, die für die weiteren Untersuchungen herangezogen wird. Um die Plausibilität der analytischen Berechnung zu überprüfen, wird eine numerische Simulation mittels Abaqus durchgeführt. Für die weitere Fertigung der Einheitszellen werden diese mit CATIA V5 konstruiert und anschließend im FABLAB Leoben mittels FDM-Verfahren 3D gedruckt. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer effizienten, regulären offenen Einheitszelle für Anwendungen im Automobilbau, sowie in der Luft- und Raumfahrt. Diese wird mit bereits verwendeten Strukturen verglichen.

3 Stand der Technik

3.1 Gitterstrukturen in der additiven Fertigung

Das Prinzip von zellulären Strukturen im Leichtbau wurde aus der Natur übernommen. Der Mensch nutzt diese Technologie schon seit einiger Zeit. Einfachstes Beispiel sind bienenwabenähnliche Materialien, welche für Strukturleichtbauteile verwendet werden [1]. Ebenso besitzen Polymerschäume ein großes Anwendungsgebiet. Diese werden für Crashbauteile von Flugzeugen und Autos verwendet. Durch modernste Fertigungsverfahren, wie z.B. den 3D-Druck ist es möglich, diese Schäume nicht nur aus Kunststoff, sondern auch aus anderen Materialien wie Metall oder Keramiken herzustellen [1]. Der große Vorteil von additiv gefertigten Bauteilen liegt in deren nahezu grenzenlosen Gestaltungsmöglichkeiten. Im Vergleich zu Guss- oder Schmiedeteilen kann das Innere eines 3D gedruckten Bauteils beispielsweise durch Gitterstrukturen frei gestaltet werden.

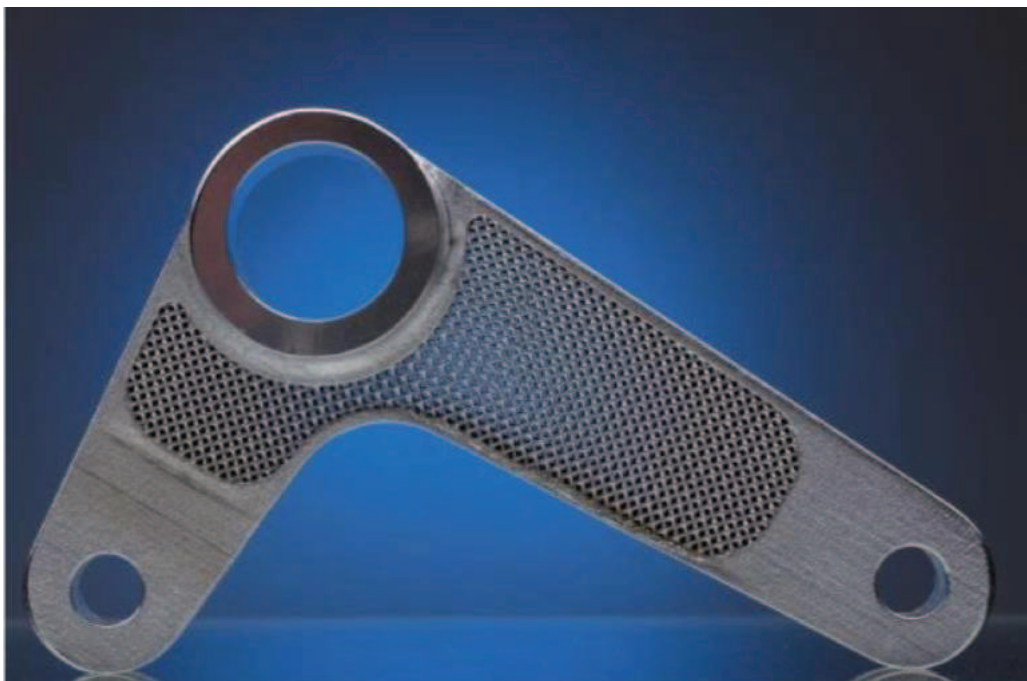


Abbildung 3.1: Hubschrauberbauteil mit Gitterstrukturen [5]

Die mechanischen, thermischen und elektrischen Eigenschaften von Gitterstrukturbauteilen stehen im direkten Zusammenhang mit den Eigenschaften der Einheitszelle [1]. Beispielsweise ändert sich die Zugfestigkeit von solchen Bauteilen mit steigender oder sinkender relativer Dichte der Einheitszelle [1,8].

3.2 Form von zellulären Strukturen

Die Eigenschaften von zellulären Strukturen hängen sehr stark von der Form der Zellen ab. Nach den Untersuchungen von M. Ashby und J. Gibson spielt die Größe in diesem Zusammenhang eine viel geringere Rolle [1]. Ist die geometrische Form der Einheitszelle in allen drei Raumebenen symmetrisch, so besitzen Gitterstrukturbauteile ein orthotropes Bauteilverhalten [1,9]. Anisotropes Verhalten tritt bei sogenannten stochastischen Strukturen auf [6]. Bestes Beispiel sind die Honeycombs, welche von Ashby und Gibson untersucht wurden. Diese bestehen aus einem hexagonalen extrudiertem Querschnitt. Dieses Konstruktionsprinzip ist der Form von Bienenwaben nachempfunden [1].

Bestehen die Einheitszellen aus einem dreidimensionalen Volumenkörper, so spricht man von dreidimensionalen Zellen. Offene Zellen besitzen einen Verbund aus Stäben, bei geschlossenen besteht der Verbund aus soliden Wänden [1].

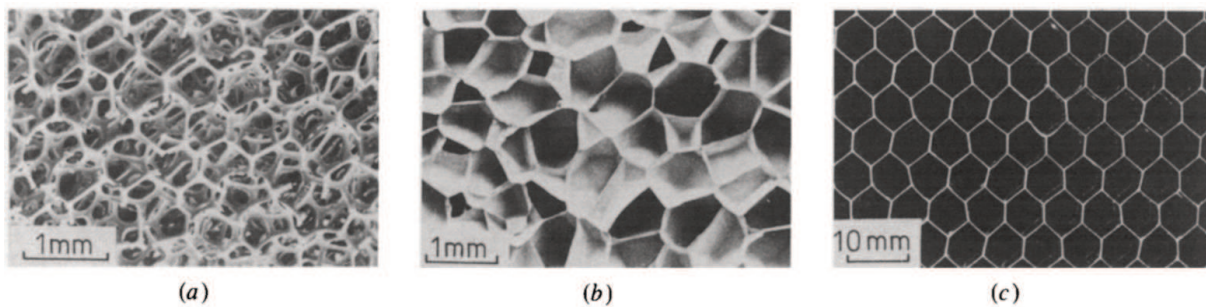


Abbildung 3.2: (a) offene 3D Gitterstruktur, (b) geschlossene 3D Gitterstruktur, (c) 2D Honeycomb [1]

In **Abbildung 3.2** sind verschiedene Gitterstrukturen dargestellt. Die offene und geschlossene Struktur in **Abbildung (a)** und **(b)** besitzt aufgrund von irregulären Zellen ein anisotropes Werkstoffverhalten [1]. Die zweidimensionale Bienenwabenstruktur weist ebenfalls ein anisotropes Verhalten auf. Dies liegt nicht an der Irregularität der Zellen, sondern an der Form der Struktur. Axial zur Querschnittsfläche weist diese Struktur einen hohen Widerstand gegen Druckbelastung auf. Wird der Verbund parallel belastet, versagt er bei einer kleinen Druckbelastung [1].

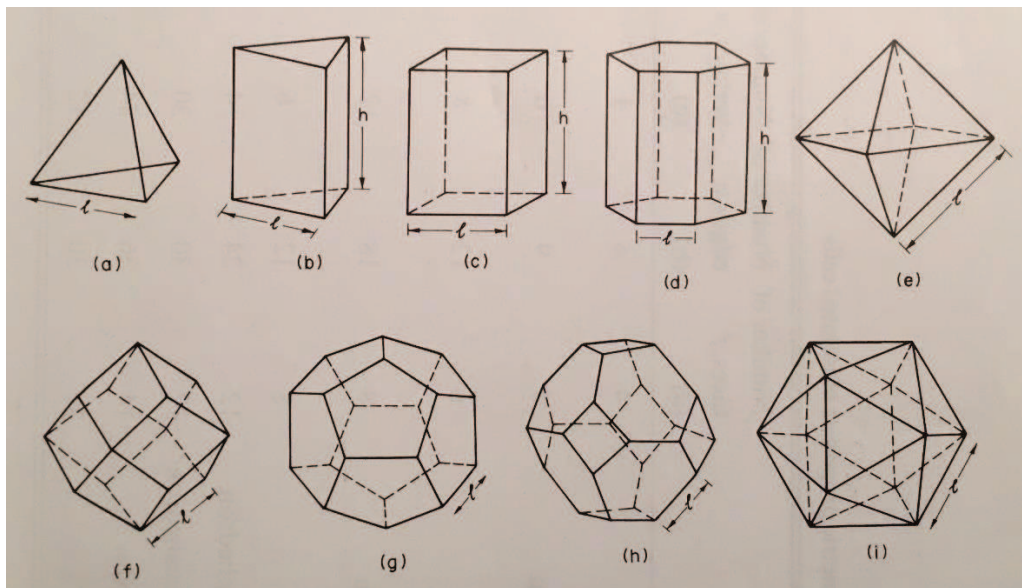


Abbildung 3.3: dreidimensionale polyedrische Zellen: (a) Tetraeder, (b) dreieckiges Prisma, (c) rechteckiges Prisma, (d) sechseckiges Prisma, (e) Oktaeder (f) Rhombendodekaeder, (g) fünfeckiges Dodekaeder, (h) Tetrakaidekaeder (i) Ikosaeder [1]

Durch aneinanderreihen der Einheitszellen in alle drei Raumrichtungen ist es möglich mit Gitterstrukturen Volumen zu füllen. So bestehen beispielsweise Sandwichstrukturen aus zwei Deckschichten und in der Mitte befindet sich ein Verbund aus Gitterstrukturen. Solche Bauteile besitzen ein hohes Leichtbaupotenzial und ein großes Energieaufnahmevermögen [1,7,8].

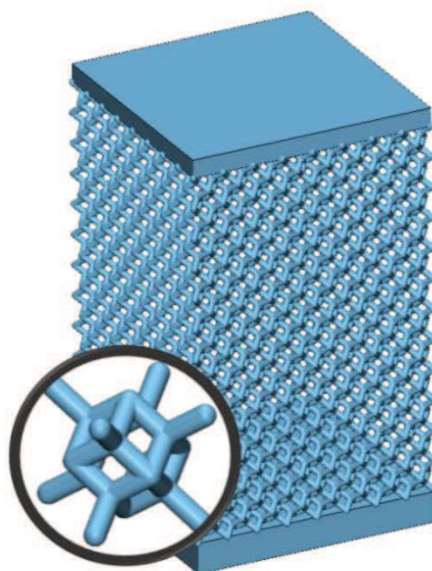


Abbildung 3.4: Sandwichstruktur mit rhombisch-dodekaedrischer Einheitszelle [7]

3.3 Mechanische Eigenschaften von zellulären Strukturen

Bauteile aus zellulären Strukturen weisen ein anderes Werkstoffverhalten als solide Bauteile auf [1,7,14]. Entscheidend für das Energieaufnahmevermögen bei einer Belastung ist die Fläche unter der Spannungs-Dehnungskurve. Unter einer Druckbelastung verformen sich Gitterstrukturen zuerst linear-elastisch (Biegen der Zellwände). Die plastische Deformation erfolgt über ein großes Plateau bei nahezu gleicher Spannung. Dies ist auf die Hohlräume von Gitterstrukturen zurückzuführen. Ist die Zelle bei fortschreitender Belastung soweit komprimiert dass sich die Zellwände ineinanderschieben, so spricht man von einer Verdichtung. Dies hat einen Anstieg der Spannung zu Folge. Im Vergleich zu soliden Bauteilen haben Gitterstrukturen beim gleichen Werkstoff ein viel höheres Energieaufnahmevermögen. Beispielsweise kann bei einem Crash-Bauteil eines Autos durch Gitterstrukturen viel mehr kinetische Aufprallenergie in Deformationsenergie umgewandelt werden [1,2,3,7].

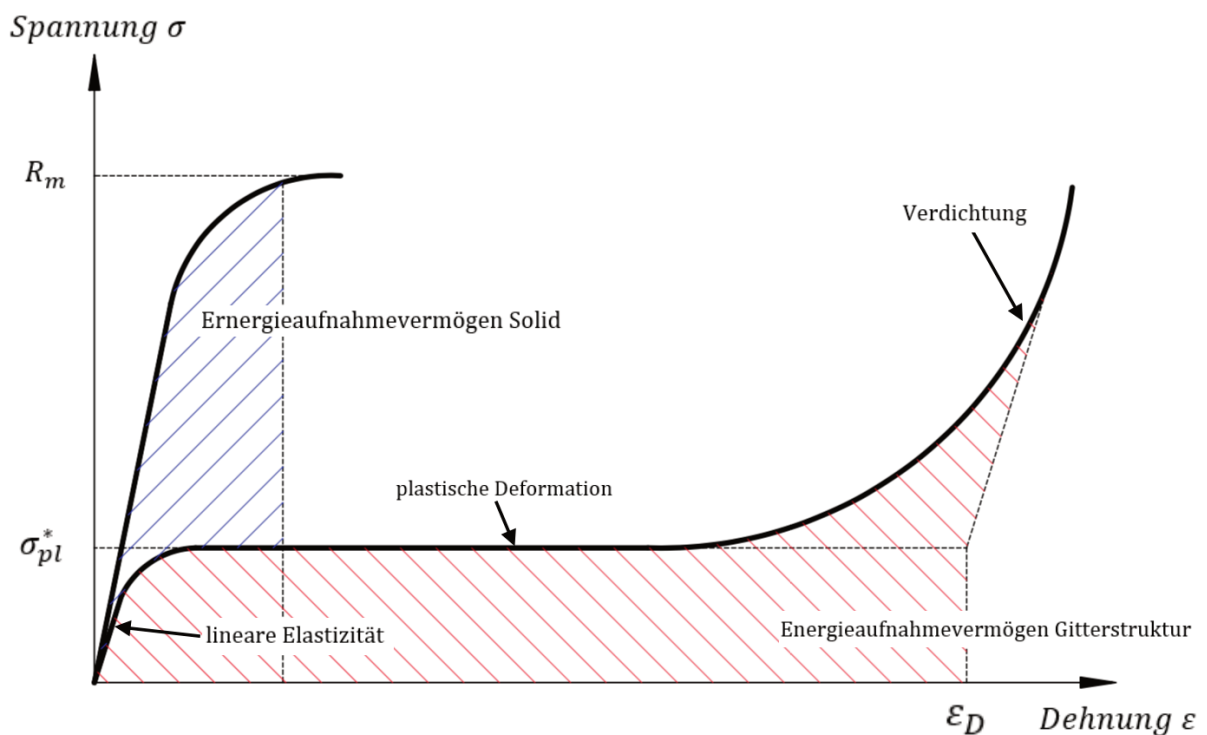


Abbildung 3.5: Spannungs-Dehnungskurve eines soliden Werkstoffes im Vergleich zu einer Gitterstruktur

In erster Linie sind für die mechanische Beschreibung von Gitterstrukturen das Elastizitätsmodul und die Streckgrenze ausschlaggebend. Jedoch können auch weitere Eigenschaften wie das elastische Aufnahmevermögen, Zug/Drucksteifigkeit sowie Knicksteifigkeit zur Beurteilung herangezogen werden [8].

Elastisches Aufnahmevermögen [8]

$$W_{el} = \frac{R_{p0,2}^2}{E} \quad (3.1)$$

Zug/Drucksteifigkeit [8]

$$S_{ZD} = \frac{E}{\rho * g} \quad (3.2)$$

Knicksteifigkeit [8]:

$$S_K = \frac{\sqrt{E}}{\rho * g} \quad (3.3)$$

3.4 Relative Dichte

Ein wichtiges Merkmal einer zellulären Struktur ist die relative Dichte $\frac{\rho^*}{\rho_s}$. Diese ist ein dimensionsloses Verhältnis der Dichte der Einheitszelle ρ^* , dividiert durch die Dichte des Materials, aus dem die Zellwände gefertigt sind ρ_s [1].

$$R = \frac{\rho^*}{\rho_s} \quad (3.4)$$

Eine weitere Kennzahl ist die Porosität. Diese beschreibt den Anteil des Hohlraumvolumens im Verhältnis zum Gesamtvolumen der Gitterstruktur. Sie steht im direkten Zusammenhang mit der relativen Dichte der Struktur. Steigt die relative Dichte, so sinkt die Porosität [1].

$$\phi = 1 - R = 1 - \frac{\rho^*}{\rho_s} \quad (3.5)$$

Tabelle 3.1: relative Dichten verschiedener Materialien [1]

Material	Relative Dichte $\frac{\rho^*}{\rho_s}$
Polymer Schäume	0,05-0,2
Kork	0,14
Weichhölzer	0,15-0,40

Steigt die relative Dichte, so nimmt entweder der Querschnitt der Zellenstreben zu oder die Länge der Streben sinkt. Oberhalb einer relativen Dichte von 0.3 gibt es einen Übergang von einer zellulären Struktur zu einem Feststoff mit isolierenden Poren [1]. In dieser Arbeit werden ausschließlich Zellen mit einem Wert kleiner 0.3 behandelt.

3.5 Bestimmung der mechanischen Kennwerte von Gitterstrukturen

Die mechanischen Kennwerte von zellulären Strukturen können über den von M. Ashby und J. Gibson entwickelten Potenzansatz mit der relativen Dichte verbunden werden [1].

$$\frac{x}{x_s} = C * \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^n \quad (3.6)$$

In dieser Beziehung beschreibt x bzw. x_s den Zusammenhang einer beliebigen Eigenschaft (Druckfestigkeit, E-Modul) der Zellstruktur mit dem Ausgangsmaterial. C und n sind strukturabhängige konstante Parameter [8]. Aus Versuchsergebnissen von z.B. Druckversuchen bei unterschiedlichen relativen Dichten ist es möglich, die Konstanten C und n für die vorliegende Zellstruktur zu bestimmen [8]. Der Potenzansatz verliert seine Gültigkeit ab einer relativen Dichte $\geq 30\%$. Darüber hinaus sind die Zellwände bzw. die Stäbe zu dick um zu knicken [1,8].

Da eine Einheitszelle als geometrisch ideal angesehen wird ist es sinnvoll, sich die Geometrie der jeweiligen Zelle zu Nutze zu machen. Beispielsweise kann eine Tetrakaidekaeder Einheitszelle geviertelt werden, um deren mechanische Eigenschaften zu bestimmen [16].

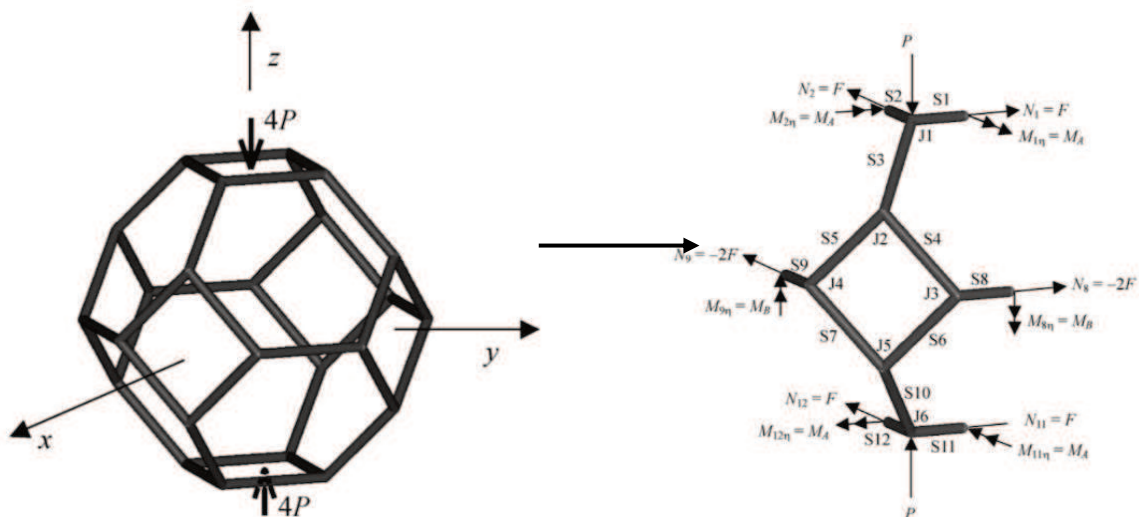


Abbildung 3.6: Untersuchung eines Viertels einer tetrakaidekaedrischen Einheitszelle [16]

3.5.1 Linear-elastische Deformation

3.5.1.1 Elastizitätsmodul

Zur Bestimmung der linear-elastischen Eigenschaften von Gitterstrukturen bedient man sich der Stabtheorie sowie dem zweiten Satz von Castigliano. Laut den Untersuchungen von M. Ashby und L. Gibson besteht der primäre Verformungsmechanismus der Zelle aus der Biegung der einzelnen Stäbe des Fachwerks [8]. Somit ist es möglich für die analytische Bestimmung des Elastizitätsmoduls einen einzelnen Stab der Einheitszelle zu betrachten. Hierfür wird ein Stab uniaxial belastet und untersucht [8].

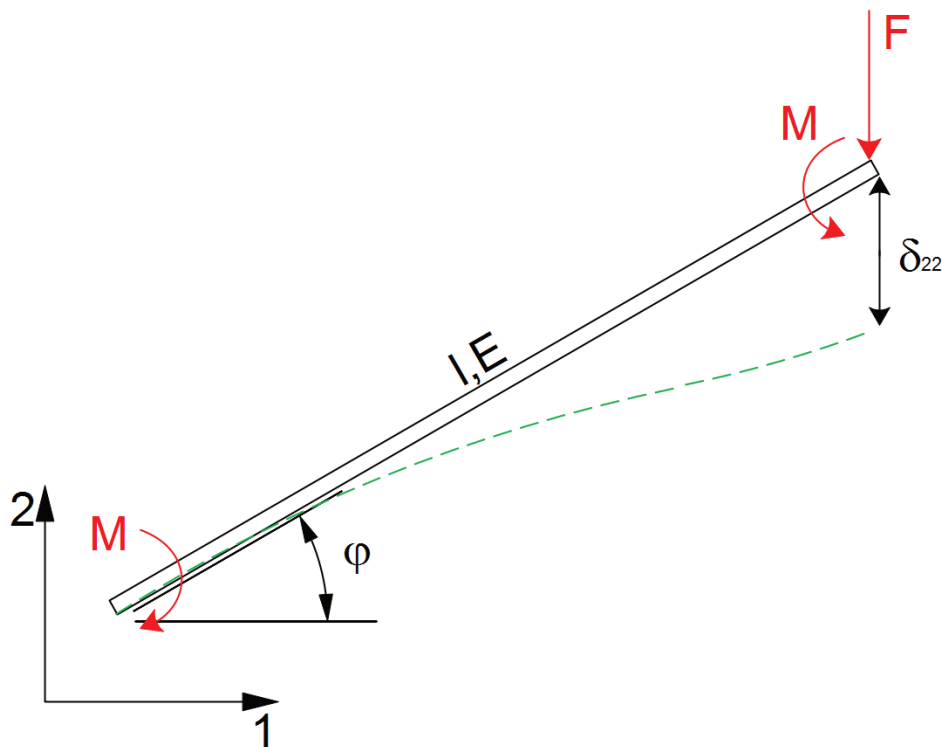


Abbildung 3.7: Systemskizze eines Stabes der Einheitszelle mit uniaxialer Belastung in Richtung 2

Mit dem zweiten Satz von Castigliano kann über die Formänderungsarbeit die lastabhängige Verschiebung in eine definierte Richtung ermittelt werden [8,9].

$$U_{N,F+B+Q} = \frac{1}{2} * \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} + \frac{M(x)^2}{EI} + \frac{Q(x)^2}{GA} dx \quad (3.7)$$

Der Schubeeinfluss kann aufgrund einer ausreichenden Schlankheit der Stäbe (relative Dichte $\leq 30\%$) vernachlässigt werden [8,9].

Somit ergibt sich für die Gesamtverschiebung in Belastungsrichtung folgender Ausdruck:

$$\delta_{22(N,F+B)} = \frac{\partial}{\partial F} * \left(\frac{1}{2} * \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} + \frac{M(x)^2}{EI} dx \right) \quad (3.8)$$

Für die Bestimmung des Elastizitätsmodus ist eine repräsentative Querschnittsfläche sowie das hookesche Gesetz notwendig [8,9].

$$\sigma_2 = E_2 * \varepsilon_2 \quad (3.9)$$

Die Spannung in einem Stab kann über Kraft pro Querschnittsfläche beschrieben werden. Jedoch ist zu beachten, dass die Stäbe geneigt sind und so beispielsweise die Querschnittsfläche bei einem Kreis elliptisch wird. F^* beschreibt jene Belastung, welche auf die gesamte Einheitszelle wirkt. Um einen einzelnen Stab zu untersuchen muss diese durch die Anzahl der verteilenden Stäbe geteilt werden [9].

$$\sigma_2 = \frac{F^*}{A_Q} \quad (3.10)$$

Über die Gesamtverschiebung in Belastungsrichtung ist es möglich die Dehnung in diese zu berechnen [9].

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_{22(N,F+B)}}{l * \sin(\varphi)} \quad (3.11)$$

Hierbei definiert l die Länge des Stabes und φ die Neigung der Stäbe zueinander [9].

3.5.1.2 Poissonzahl

Zur Bestimmung der Poissonzahl wird der Stab in Richtung 1 uniaxial belastet und die Verschiebung sowie Dehnung analog wie in 3.4.1 bestimmt [9].

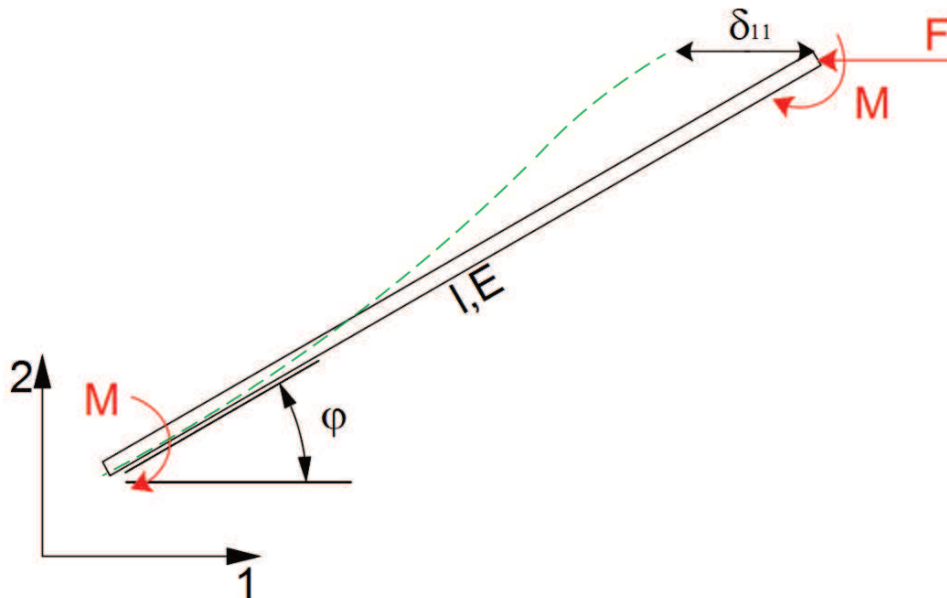


Abbildung 3.8: Systemskizze eines Stabes der Einheitszelle mit uniaxialer Belastung in Richtung 1

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_{11(N,F+B)}}{l * \cos(\varphi)} \quad (3.12)$$

Die Poissonzahl ist das linearisierte negative Verhältnis der Dehnungen in Richtung 1 und 2 bei Einwirkung eines einachsigen Spannungszustandes [1,9].

$$\vartheta = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (3.13)$$

3.5.1.3 Knickung

Der Übergang vom linear-elastischen Bereich zum plastischen Bereich in der Spannungs-Dehnungskurve für Gitterstrukturen, wird durch elastisches Beulen bzw. Knicken verursacht. Die Stäbe der Einheitszellen beginnen zu beulen sobald die auftretende Belastung die Euler-Knicklast überschreitet [1]. Das Knicken ist verbunden mit dem Ausbiegen der Stabachse eines Druckstabs in eine beliebige Richtung.

$$P_k = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{l_k} \quad (3.14)$$

Knicken nach Euler wird in vier verschiedene Knickfälle unterschieden. Die kritische Last ist die kleinste Knicklast. Sie ergibt sich für J_{min} . Die Knicklänge l_k ist der Abstand zwischen den Wendepunkten der Biegelinien. Für jeden Knickfall ergibt sich eine eigene Knicklänge.

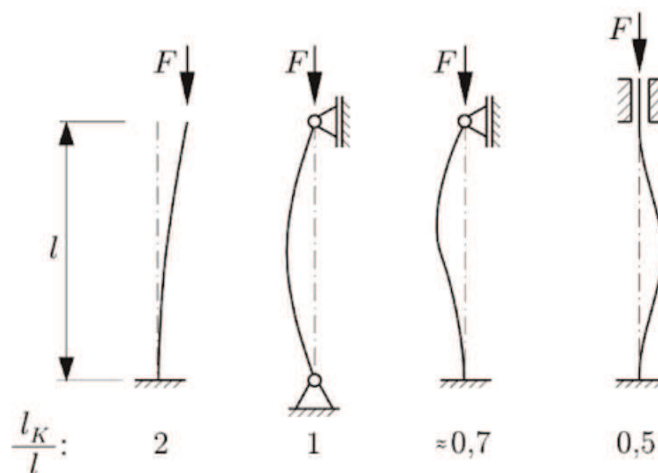


Abbildung 3.9: Euler Knickfälle [17]

Tabelle 3.2: Knicklängen für die verschiedenen Euler Knickfälle [17]

Fälle	Knicklänge l_k
Fall 1	$l_k = 2l$
Fall 2	$l_k = l$
Fall 3	$l_k = 0,7l$
Fall 4	$l_k = 0,5l$

Über die kritische Knicklast lässt sich die kritische Knickspannung definieren [17].

$$\sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{A * l_k} = \frac{\pi^2 * E * i^2}{l_k^2} \quad (3.15)$$

Wobei A die betreffende Querschnittsfläche und i den Trägheitsradius beschreibt [17].

$$i = i_{min}^2 = \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} \quad (3.16)$$

3.5.2 Plastische Verformung

3.5.2.1 Streckgrenze

Plastisches Versagen tritt ein wenn die Belastung durch das auftretende Moment und der Axialkraft das plastische Moment des Zellmaterials erreicht. Jedoch gibt es nach dem internationalen Standard für mechanische Prüfung von zellulären Materialien (ISO 13314) (13314: 2011, 2011) keine einheitliche Definition zur Bestimmung der Fließspannung. Deswegen wird die Plateauspannung, welche das arithmetische Mittel der Spannungen bei 20% und 40% Druckspannung ist, als Fließspannung verwendet. [10]. Somit ergibt sich die Belastung für einen Stab wie folgt:

$$\sigma = \sigma_B + \sigma_{N,F} + \sigma_Q \quad (3.17)$$

Wobei der Einfluss der Querkraft aufgrund der Schlankheit der Stäbe (relative Dichte $\leq 30\%$) vernachlässigt werden kann [1,8,9]. Erreicht das plastische Biegemoment ein Maximum, so kann der Anteil der Axialkraft vernachlässigt werden [1,9].

Somit ergibt sich für die Fließspannung folgender Ausdruck:

$$\sigma = \sigma_B = \frac{M_B}{w_b} \quad (3.18)$$

Laut den Untersuchungen von Gibson und Ashby tritt plastisches Versagen einer Zelle ein, wenn die Belastung das maximale plastische Moment erreicht. Für eine Zelle mit kreisrundem Stabquerschnitt gilt die Beziehung [1]:

$$\sigma_{pl}^* = \frac{M_B}{l^3} \quad (3.19)$$

3.5.2.2 Verdichtung

Bei hohen Druckspannungen werden die Zellwände ineinander gepresst und das Zellwandmaterial wird verdichtet. Unter dieser Belastung steigt die Kurve im Spannungs-Dehnungsdiagramm bis zu einer begrenzenden Belastung von ε_D rapide an [1,15].

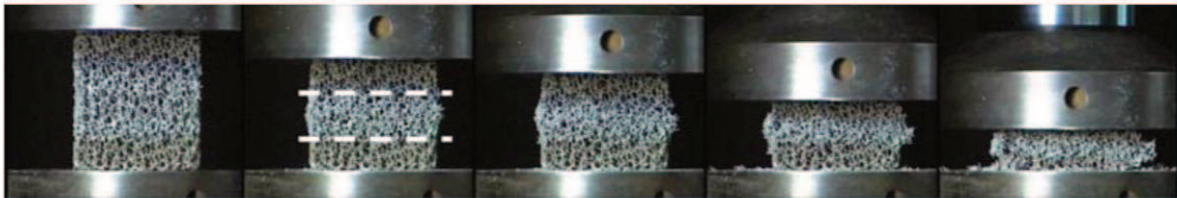


Abbildung 3.10: Schrittweise Deformation einer Gitterstruktur bis zur Verdichtung [15]

Nach den Untersuchungen von M. Ashby und J. Gibson ergibt sich für ε_D folgender Ausdruck. Diese stehen im direkten Zusammenhang mit der relativen Dichte der Einheitszelle [1].

$$\varepsilon_D = 1 - 1.4 * \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right) \quad (3.20)$$

3.6 Das Oktaeder

Das Oktaeder ist sowohl eine gleichseitige vierseitige Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche als auch ein gleichseitiges Antiprisma mit gleichseitigen Dreiecken als Grundflächen. Wegen seiner hohen Symmetrie ist es ein regulärer Polyeder [18].

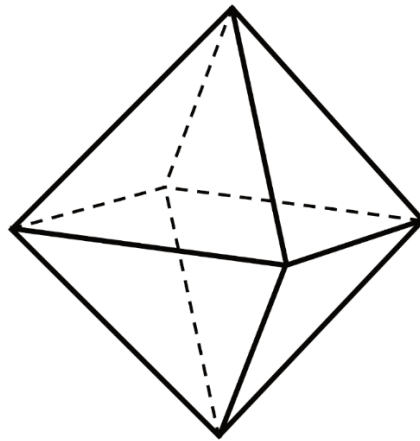


Abbildung 3.11: Skizze eines Oktaeders

Die wichtigsten Indizes zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften eines Oktaeders sind das Volumen V und die Oberfläche A [18].

$$V = \frac{l^3 * \sqrt{2}}{3} \quad (3.21)$$

$$A = 2 * l^2 * \sqrt{3} \quad (3.22)$$

3.7 Analytisches Modell von Zadpoor und Hedayati

Zadpoor und Hedayati untersuchten in deren wissenschaftlichen Arbeit das mechanische Verhalten von diversen geometrischen Einheitszellen, welche zur additiven Fertigung einer Gitterstruktur verwendet werden können. Hierzu entwickelten sie nach der Euler-Timoshenko Theorie analytische Modelle zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften unterschiedlichster Einheitszellen. Das Oktaeder wurde ebenso untersucht und für dessen Verhalten unter uniaxialer Belastung ergeben sich für die wichtigsten Kennzahlen folgende Ausdrücke [13]:

Relative Dichte [13]:

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{3 * \sqrt{2} * A}{l^2} \quad (3.23)$$

Elastizitätsmodul [13]:

$$\frac{E^*}{E_s} = \frac{\sqrt{2} * A * (A * l^2 + 36 * l)}{3 * l^2 * (A * l^2 + 4 * l)} \quad (3.24)$$

Poissonzahl [13]:

$$\vartheta = - \frac{-(A * l^2 + 12 * l)}{(3 * A * l^2 + 4 * l)} \quad (3.25)$$

Streckgrenzenverhältnis [13]:

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_s} = \frac{2 * \sqrt{2} * A}{l} * \left[\frac{A * l^2 + 36 * l}{(3 * l + 18 * c) * (A * l^2 + 4 * l) + (l - 6 * c) * (-A * l^2 + 12 * l)} \right] \quad (3.26)$$

Der Index c beschreibt die Distanz zwischen der neutralen Ebene und dem weitest entfernten Punkt des Stabquerschnitts [13].

3.8 Performance Index

Durch einen Performance Index ist es möglich die Kennwerte von Material und Formgebung miteinander zu verknüpfen. Dadurch können Vergleichswerte definiert werden, die in Abhängigkeit zur Masse des Bauteils stehen. Im folgenden Beispiel gehen wir von einem Design aus, welches maximale Biegesteifigkeit zum Ziel hat. In **Abbildung 3.12** wird anhand von Ashby-Maps dargestellt wie ein Performance Index graphisch ermittelt wird. Im linken oberen Quadranten sind auf der x- und y-Achse die Materialkennwerte Dichte und Elastizitätsmodul aufgetragen. Anstatt des Elastizitätsmodul können auch andere Materialkennwerte wie z.B. Zugfestigkeit oder die thermische Leitfähigkeit angegeben werden. Im rechten unteren Quadranten stehen die Werte für den elastischen Formfaktor bezüglich Biegung. Dieser kann durch das Flächenträgheitsmoment und die Querschnittsfläche bestimmt werden [11,12].

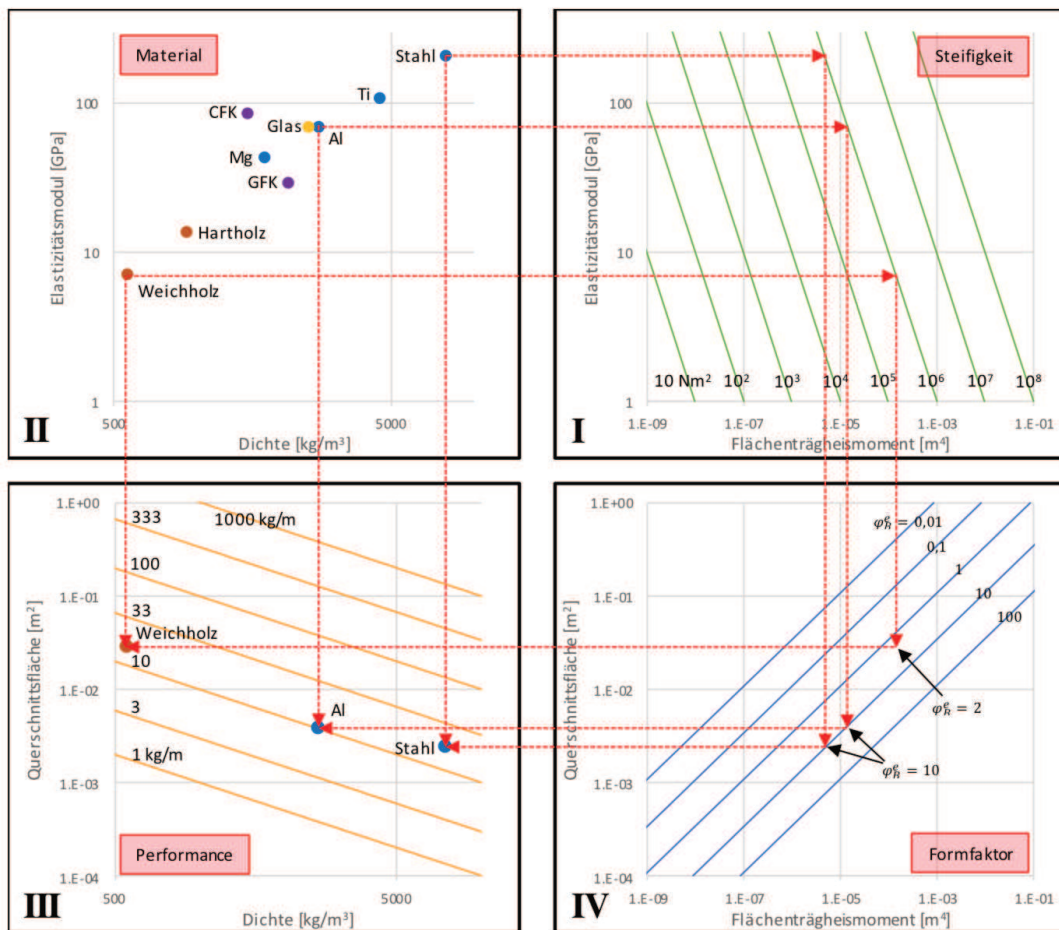


Abbildung 3.12: graphische Herleitung des Performance Index anhand von Ashby-Maps [11]

Um Werte für die Performance zu erhalten konstruiert man eine waagrechte Gerade aus dem zweiten Quadranten II vom gewünschten Material nach rechts in den ersten Quadranten I. In

diesem kann die Biegesteifigkeit ausgewählt werden. Diese wird als Randbedingung vorab festgelegt. Vom jeweiligen Schnittpunkt der Waagrechten und der Biegesteifigkeitsgeraden verschiebt man das Material in den vierten Quadranten IV zum Formfaktor. Der Performance Index wird im dritten Quadranten III ermittelt. Dieser ist der Schnittpunkt aus einer Senkrechten aus dem zweiten und einer Waagrechten aus dem vierten Quadranten [11,12]. In diesem Fall hat der Performance Index eine Einheit von Masse pro Länge $\frac{kg}{m}$ [11,12].

In **Abbildung 3.12** werden die Materialien Stahl, Aluminium und Weichholz miteinander verglichen. Für den Aluminium- und den Stahlbalken erhält man einen Formfaktor von 10. Für den massiveren Holzbalken ergibt sich ein Formfaktor von 2. Alle drei Balken sollen eine Biegesteifigkeit von 10^6 [Nm²] aufweisen. Aus dem Diagramm wird sofort ersichtlich, dass der Aluminiumträger am leichtesten ist. Jener aus Stahl ist trotz vierzehnfacher Dichte aufgrund des höheren Formfaktors fast so leicht wie Holz [11,12].

4 Analytische Bestimmung der mechanischen Eigenschaften

Zur Entwicklung des folgenden analytischen Modells wird das Oktaeder als Einheitszelle verwendet. Dieser wird uniaxial mit einer Kraft P belastet. Die Kraftverteilung durch diese Struktur ist in alle Stäbe gleichmäßig. Infolge dessen wird ein Stab des Oktaeders herausgegriffen und weiter untersucht.

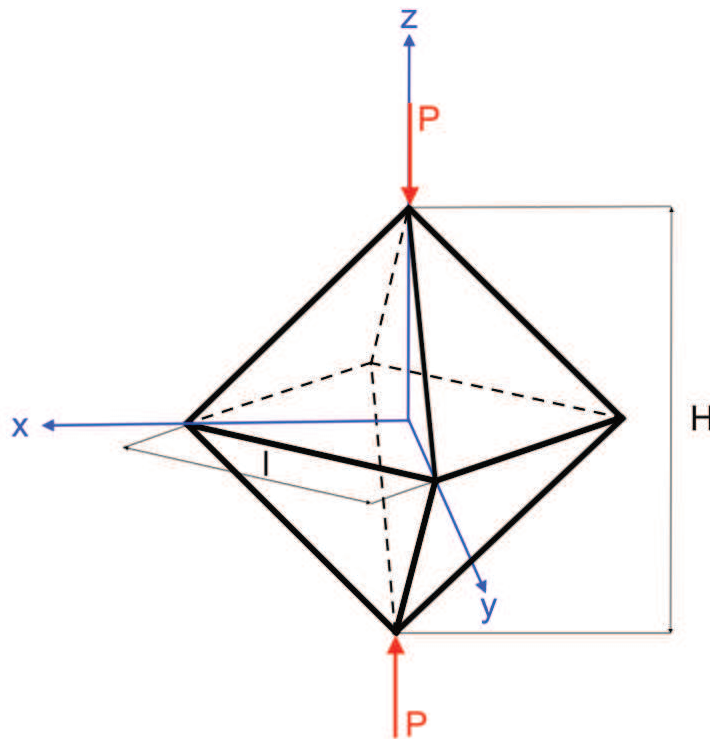


Abbildung 4.1: uniaxial belasteter Oktaeder

Sämtliche Berechnungen hängen von der Seitenlänge l , von der Höhe H , von der Querschnittsfläche A eines Stabes und vom Neigungswinkel φ ab. Für die weitere Entwicklung des mechanischen Modells wird ein gleichseitiges Oktaeder mit einem Neigungswinkel $\varphi = 45^\circ$ gewählt.

4.1 Geometrie

In den nachfolgenden Berechnungen werden die geometrischen Beziehungen des Oktaeders untersucht und analysiert. Hierfür wird ein Stab mit der Länge a über die Trigonometrie in Beziehung mit dem Neigungswinkel φ , der Höhe H und der Flächendiagonale $\sqrt{2} * l$ der Grundfläche gebracht.

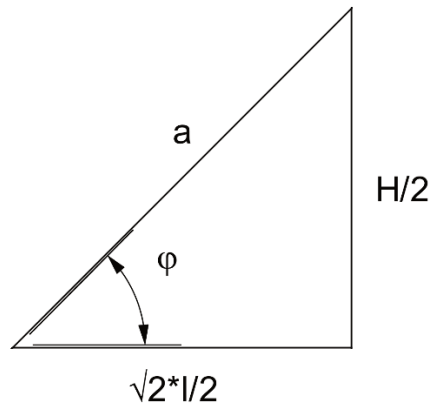


Abbildung 4.2: geometrische Beziehungen eines Oktaeders

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{\sqrt{2} * l}{2}}{a} \quad (4.1)$$

Durch Umformen von Gleichung (4.1) und einsetzen der Bedingung $\varphi = 45^\circ$, erhält man für die Seitenlänge a folgenden Ausdruck:

$$a = \frac{\frac{\sqrt{2} * l}{2}}{2 * \cos(\varphi)} = l \quad (4.2)$$

Das Zellenseitenverhältnis R_{ZSV} ist das Verhältnis aus der Zellenhöhe zur Zellendiagonale. Unter der Berücksichtigung der Bedingung $\varphi = 45^\circ$, nimmt das Zellenseitenverhältnis den Wert eins an.

$$R_{ZSV} = \frac{H}{D} = \frac{\sqrt{2} * l}{\sqrt{2} * l} = \tan(\varphi) = 1 \quad (4.3)$$

4.2 Relative Dichte

Das Verhältnis der Dichte der Gitterstruktur ρ^* zu der Dichte des Zellmaterials ρ_s , kann auch über das Volumen der Gitterstruktur V^* zum Volumen der Zellstäbe V_s beschrieben werden.

$$R = \frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{V_s}{V^*} \quad (4.4)$$

Das Volumen der Einheitszelle kann aus Gleichung (3.19) übernommen werden. Das Volumen aller Stäbe einer Einheitszelle unter Berücksichtigung eines Verbundes aus Oktaedern wird wie folgt berechnet:

$$V_s = \frac{8}{8} * A * l + \frac{4}{4} * A * l = 2 * A * l \quad (4.5)$$

Durch einsetzen von Glg.(3.19) und Glg.(4.5) in Glg.(4.4) ergibt sich für die relative Dichte eines Oktaeders folgendes Ergebnis:

$$R = \frac{V_s}{V^*} = \frac{2 * A * l}{\frac{\sqrt{2}}{3} * l^3} = \frac{3 * \sqrt{2} * A}{l^2} \quad (4.6)$$

Dieser Ausdruck wird in späterer Folge zur analytischen Auswertung der Einheitszellen herangezogen.

4.3 Elastizitätsmodul

Wie in Kap.3.5.1.1 beschrieben reicht es, einen einzelnen Stab zu untersuchen. Dieser wird uniaxial mit einer Kraft F belastet. Zur Ermittlung der Kraft- und Momentenverläufe bedient man sich der klassischen Mechanik.

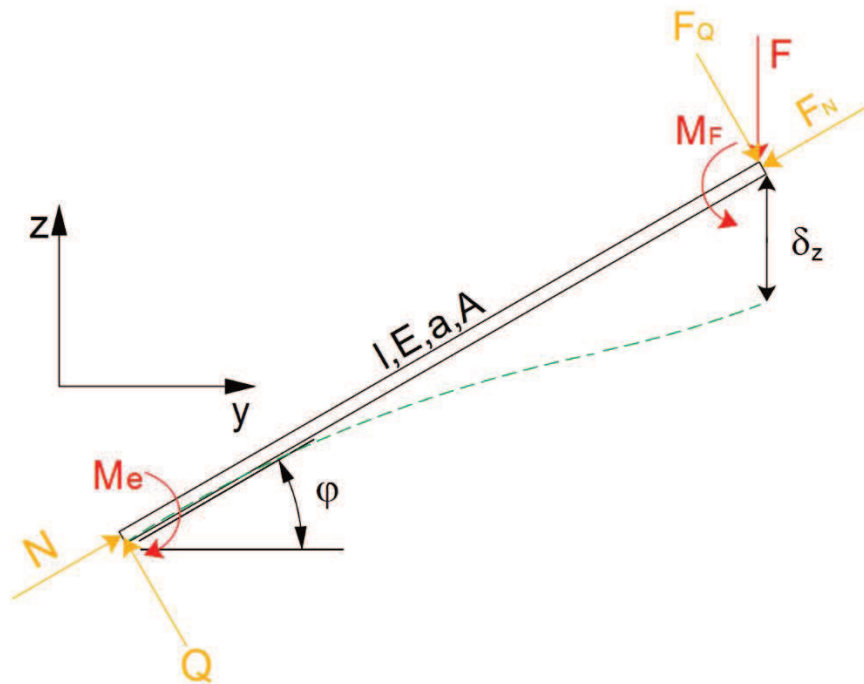


Abbildung 4.3: Freikörperbild eines uniaxial belasteten Druckstabes

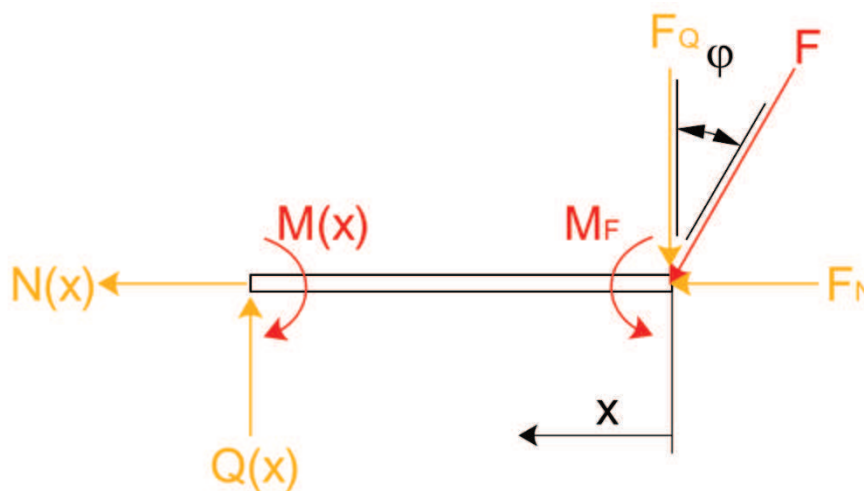


Abbildung 4.4: Schnittbild eines uniaxial belasteten Druckstabes

Für den Biegemomentenverlauf $M(x)$, sowie für den Normal $N(x)$ - und Querkraftverlauf $Q(x)$, ergeben sich für das dargestellte Schnittbild in **Abbildung 4.4** folgende Ausdrücke:

$$M(x) = F_Q * \frac{a}{2} - F_Q * x = F * \cos(\varphi) * \left(\frac{a}{2} - x\right) \quad (4.7)$$

$$N(x) = -F_N = -F * \sin(\varphi) \quad (4.8)$$

$$Q(x) = F_Q = F * \cos(\varphi) \quad (4.9)$$

Zur Ermittlung der Verformungsenergie können die Kraft- und Momentenverläufe in Glg.(3.4) eingesetzt werden. Aufgrund ausreichender Schlankheit (relative Dichte $\leq 30\%$) kann der Schubefluss vernachlässigt werden. Somit kann der Ausdruck für den Querkraftverlauf eliminiert werden.

$$U_B = \frac{1}{2} * \int_0^a \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{F^2 * \cos(\varphi)^2 * a^3}{24 * E * I} \quad (4.10)$$

$$U_{N,F} = \frac{1}{2} * \int_0^a \frac{N(x)^2}{EA} dx = \frac{F^2 * \sin(\varphi)^2 * a}{2 * E * A} \quad (4.11)$$

Zur Ermittlung der Verschiebung in Belastungsrichtung werden die Energien, verursacht durch Biegung und Normalkraft in Glg.(3.5) eingesetzt.

$$\delta_{zB} = \frac{\partial}{\partial F} * \left(\frac{1}{2} * \int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx\right) = \frac{\partial U_B}{\partial F} = \frac{F * \cos(\varphi)^2 * a^3}{12 * E * I} \quad (4.12)$$

$$\delta_{zN,F} = \frac{\partial}{\partial F} * \left(\frac{1}{2} * \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx\right) = \frac{\partial U_{N,F}}{\partial F} = \frac{F * \sin(\varphi)^2 * a}{E * A} \quad (4.13)$$

Die Gesamtverschiebung in Belastungsrichtung ergibt sich aus der Summe der einzelnen Verschiebungen verursacht durch Biegung (4.12) und Normalkraft (4.13).

$$\delta_z = \delta_{zB} + \delta_{zN,F} = \frac{F * \cos(\varphi)^2 * a^3}{12 * E * I} + \frac{F * \sin(\varphi)^2 * a}{E * A} \quad (4.14)$$

Über das hookesche Gesetz (3.6) lässt sich eine Beziehung aus dem Elastizitätsmodul der Einheitszelle mit der Gesamtdehnung eines Druckstabs (3.8) sowie seiner Spannung durch die uniaxiale Belastung (3.7) aufstellen.

$$\sigma_z = E^* * \varepsilon_z \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_{z(N,F+B)}}{a * \sin(\varphi)} \quad (4.16)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{A_Q} = \frac{4 * F}{A_Q} \quad (4.17)$$

Unter Berücksichtigung der Neigung eines kreisrunden Stabes, ergibt sich für die auftretende Kraftangriffsfläche kein Kreis sondern eine Ellipse mit folgender Fläche:

$$A_Q = \frac{d^2 * \pi}{4 * \sin(\varphi)} \quad (4.18)$$

Für die Bestimmung des Trägheitsmomentes wird ein idealer Kreis als Querschnitt angenommen.

$$I = \frac{d^4 * \pi}{64} \quad (4.19)$$

Durch Umformen von Glg.(4.15) nach E^* und einsetzen von Glg.(4.16), Glg.(4.17) und Glg.(4.18) ergibt sich für den Elastizitätsmodul einer Einheitszelle mit oktaedrischer Geometrie folgender Ausdruck:

$$E^* = \frac{P}{A_Q} * \frac{a * \sin(\varphi)}{\delta_{z(N,F+B)}} = \frac{192 * \sin(\varphi)^2 * d^2 * E}{64 * \cos(\varphi)^2 * a^2 + 48 * \sin(\varphi)^2 * d^2} \quad (4.20)$$

Gleichung (4.19) gilt für Oktaeder mit variablen Zellenseitenverhältnis R_{ZSV} .

Unter der Berücksichtigung der Bedingungen aus der Geometrie (Kap.4.1), ergibt sich für die Seitenlänge $a = l$ und $\sin(45) = \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Für das Verhältnis des Elastizitätsmoduls der Einheitszelle E^* (4.20) mit dem Elastizitätsmodul aus dem das Zellmaterial gefertigt E_s ist, erhält man nun folgende Beziehung:

$$\frac{E^*}{E_s} = \frac{96 * d^2}{32 * l^2 + 24 * d^2} \quad (4.21)$$

Diese Beziehung beschreibt das Oktaeder aus **Abbildung 4.1** und wird in weiterer Folge in der Arbeit berücksichtigt.

4.4 Poissonzahl

Zur Bestimmung der Poissonzahl wird der Stab normal zur vorherigen Belastungsrichtung uniaxial belastet. In weiterer Folge kann die Querkontraktionszahl über Glg.(3.10) berechnet werden. Hierzu ist es notwendig, die auftretende Dehnung in die aktuelle Belastungsrichtung zu bestimmen. Dies geschieht analog wie in Kap.4.3.

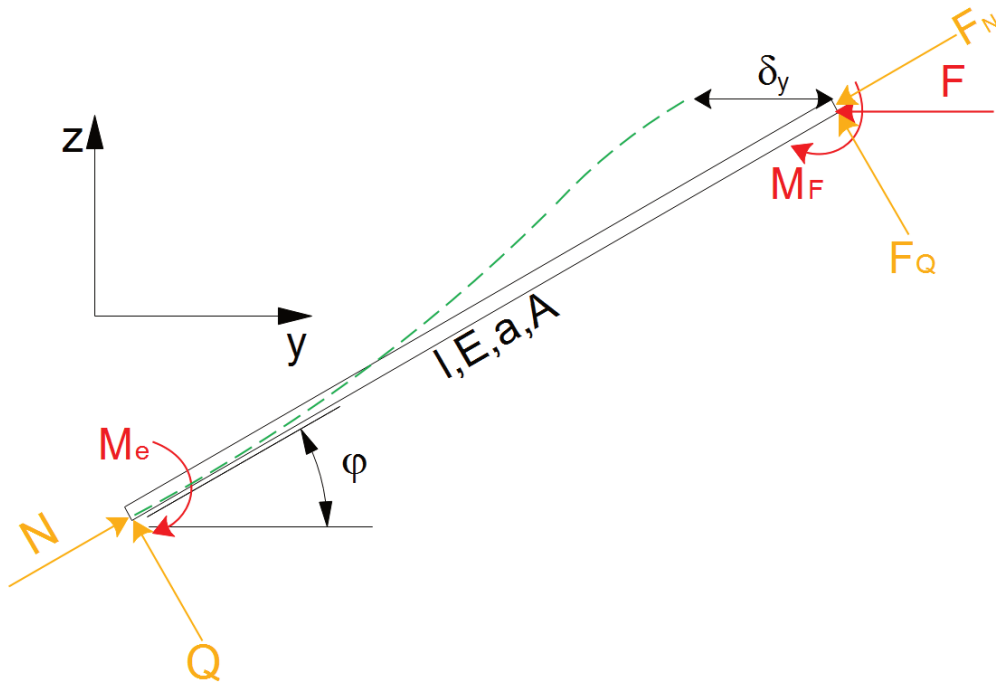


Abbildung 4.5: Freikörperbild eines uniaxial belasteten Druckstabs

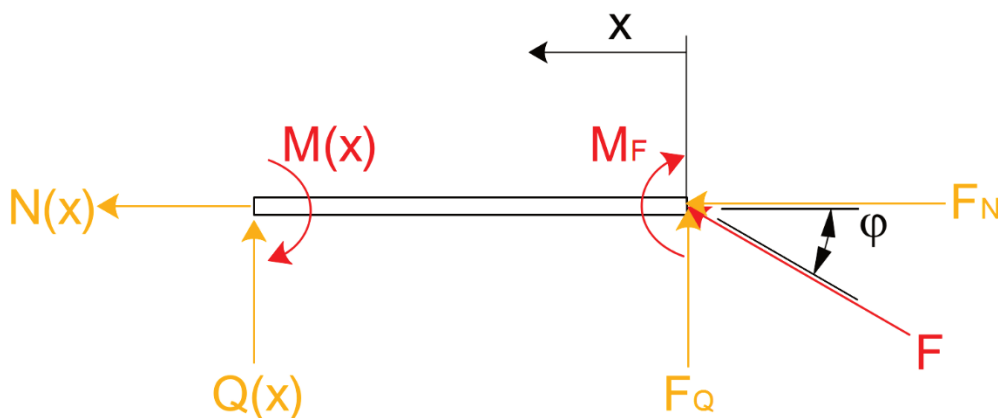


Abbildung 4.6: Schnittbild eines uniaxial belasteten Druckstabs

Zur Bestimmung der Biegemomente $M(x)$ - sowie Kraftverläufe $N(x)$, $Q(x)$ bedient man sich wieder der Methoden der klassischen Mechanik. Da der Stab nun anders belastet ist als in Kap.4.3 ergeben sich andere Vorzeichen in den Verläufen.

$$M(x) = F_Q * \frac{a}{2} + F_Q * x = F * \sin(\varphi) * \left(\frac{a}{2} - x\right) \quad (4.22)$$

$$N(x) = -F_N = -F * \cos(\varphi) \quad (4.23)$$

$$Q(x) = -F_Q = -F * \sin(\varphi) \quad (4.24)$$

Zur Ermittlung der Gestaltenänderungsenergie werden die Ausdrücke für die Kraft- und Momentenverläufe in Glg.(3.4) eingesetzt. Der Schubeinfluss kann durch ausreichende Schlankheit der Stäbe (relative Dichte $\leq 30\%$) wieder vernachlässigt werden.

$$U_B = \frac{1}{2} * \int_0^a \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{F^2 * \sin(\varphi)^2 * a^3}{24 * E * I} \quad (4.25)$$

$$U_{N,F} = \frac{1}{2} * \int_0^a \frac{N(x)^2}{EA} dx = \frac{F^2 * \cos(\varphi)^2 * a}{2 * E * A} \quad (4.26)$$

Zur Bestimmung der Verschiebung in Belastungsrichtung werden die Energiebeiträge in Glg.(3.5) eingesetzt und anschließend addiert. Dies liefert für die Gesamtverschiebung in Belastungsrichtung folgende Gleichung:

$$\delta_{yB} = \frac{\partial}{\partial F} * \left(\frac{1}{2} * \int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx\right) = \frac{\partial U_B}{\partial F} = -\frac{F * \sin(\varphi)^2 * a^3}{12 * E * I} \quad (4.27)$$

$$\delta_{yN,F} = \frac{\partial}{\partial F} * \left(\frac{1}{2} * \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx\right) = \frac{\partial U_{N,F}}{\partial F} = -\frac{F * \cos(\varphi)^2 * a}{E * A} \quad (4.28)$$

$$\delta_y = \delta_{yB} + \delta_{yN,F} = -\frac{F * \sin(\varphi)^2 * a^3}{12 * E * I} - \frac{F * \cos(\varphi)^2 * a}{E * A} \quad (4.29)$$

Die Dehnung in Belastungsrichtung wird analog wie in Glg.(4.16) bestimmt.

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_{y(N,F+B)}}{a * \cos(\varphi)} \quad (4.30)$$

Durch Einsetzen von Glg.(4.16) und Glg.(4.29) in Glg.(3.10) kann die Poissonzahl bestimmt werden. Diese ist in dem folgenden Ausdruck vom Winkel der Stäbe, sowie von deren Länge und Querschnittsfläche abhängig. Für die Fläche und das Trägheitsmoment des Querschnitts wurde ein idealer Kreis angenommen.

$$\vartheta = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} * \frac{(64 * a^2 * \cos(\varphi)^2 + 48 * d^2 * \sin(\varphi)^2)}{-(64 * a^2 * \sin(\varphi)^2 + 48 * d^2 * \cos(\varphi)^2)} \quad (4.31)$$

Unter Berücksichtigung der Geometriebedingungen aus Kap.4.1 ergibt sich eine Poissonzahl von $\vartheta = 1$. Dieser Wert besagt, dass sich die Einheitszelle bei Einfluss einer Druckbelastung in alle drei Raumrichtungen gleichmäßig verformt.

4.5 Knickung

Zur Untersuchung der Knickung eines Stabes bedient man sich der Knicktheorie nach Euler. Zuerst wird die kritische Knicklast nach der Glg.(3.11) berechnet. Für die Einheitszelle sind nur die Fälle I und III relevant. Somit können die Berechnungen auf diese beiden beschränkt werden. Wie in **Abbildung 4.7** ersichtlich muss auf die Neigung der Stäbe geachtet werden.

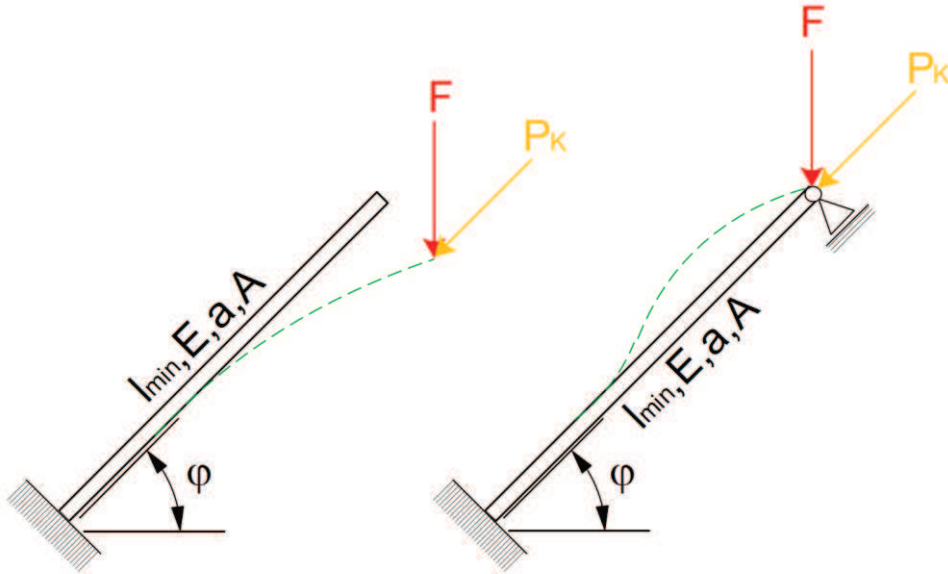


Abbildung 4.7: Euler Knickfälle I und III

$$P_K = F * \cos(\varphi) = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{l_k^2} \quad (4.32)$$

Nach Umformen der Glg.(4.32) und Einsetzen von Glg.(4.32) in Glg.(3.12) ergibt sich für die kritische Knicklast F und die kritische Knickspannung σ_K der Einheitszelle folgender Ausdruck:

$$F = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{l_k^2 * \cos(\varphi)} \quad (4.33)$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{A * l_k^2 * \cos(\varphi)} \quad (4.34)$$

Durch Einfügen der geometrischen Bedingungen aus Kap.4.1 und der Annahme eines kreisrunden Stabquerschnitts lässt sich für den Fall I mit $l_K = 2 * a$ das Verhältnis von kritischer Knickspannung σ_K zum Elastizitätsmodul des Zellmaterials ausdrücken.

$$\frac{\sigma_K}{E_s} = \frac{\sqrt{2} * \pi^2 * d^2}{64 * l^2} \quad (4.35)$$

Für den Fall III setzt man für die kritische Knicklänge $l_K = 0,7 * a$ ein.

$$\frac{\sigma_K}{E_s} = \frac{\sqrt{2} * \pi^2 * d^2}{16 * (0,7 * l)^2} \quad (4.36)$$

4.6 Streckgrenze

Die Fließ- oder Streckgrenze einer Einheitszelle wird als arithmetisches Mittel der Druckspannungen bei 20% und 40% im Stab ausgedrückt. Beeinflusst werden die Druckspannungen hauptsächlich durch das Biegemoment. In diesem Fall ist der Querkrafteinfluss ebenfalls zu vernachlässigen, da eine ausreichende Schlankheit herrscht. Die Spannungen in einem Stab, hervorgerufen durch das maximale Biegemoment, können durch klassische Mechanik und Festigkeitslehre bestimmt werden.

$$\sigma_B = \frac{M_B}{w_b} = \frac{M_B * d}{2 * I} = \frac{F * d * a * \cos(\varphi)}{4 * I} \quad (4.37)$$

Für die Auswertung wird die Geometriebedingung aus Kap.4.1 berücksichtigt, sowie ein kreisrunder Stabquerschnitt angenommen. Laut Gibson und Ashby ergibt sich für die maximal zulässige plastische Spannung einer Einheitszelle folgende Beziehung:

$$\sigma_{pl}^* = \frac{M_B}{l^3} = \frac{F}{l^2} \quad (4.38)$$

Setzt man Glg.(4.37) und Glg.(4.38) ins Verhältnis, so erhält man eine aussagekräftige Beziehung über das plastische Verhalten einer Einheitszelle im Verhältnis zur Streckgrenze aus dem das Zellmaterial gefertigt ist.

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{YS}} = \frac{d^3 * \pi}{\sqrt{2} * 2 * l^3} \quad (4.39)$$

Die in diesem Kapitel entwickelten Kennzahlen relative Dichte $\frac{\rho^*}{\rho_s}$, relativer Elastizitätsmodul $\frac{E^*}{E_s}$, Poissonzahl ν und relative Streckgrenze $\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{YS}}$ dienen zur späteren Auswertung des analytischen Modells sowie dem Vergleich mit einer linearen und nichtlinearen numerischen Simulation.

5 Konstruktion

Zur visuellen Darstellung der Einheitszelle und eines konkreten Bauteils wird mit dem 3D-Konstruktionsprogramm CATIA V5 gearbeitet. Diese Dateien werden auch zur Fertigung der Zellen und des Bauteils mittels additiver Fertigung verwendet.

5.1 Konstruktion der Einheitszelle

Für die Visualisierung eines Einheitsoktaeders werden für die Stäbe zwei verschiedene Querschnitte ausgewählt. Ein kreisrunder und ein quadratischer Querschnitt. Ein Oktaeder selbst besteht aus zwölf Stäben. Durch die vorteilhafte Geometrie besitzen alle Stäbe die gleiche Länge und somit die gleiche Form.

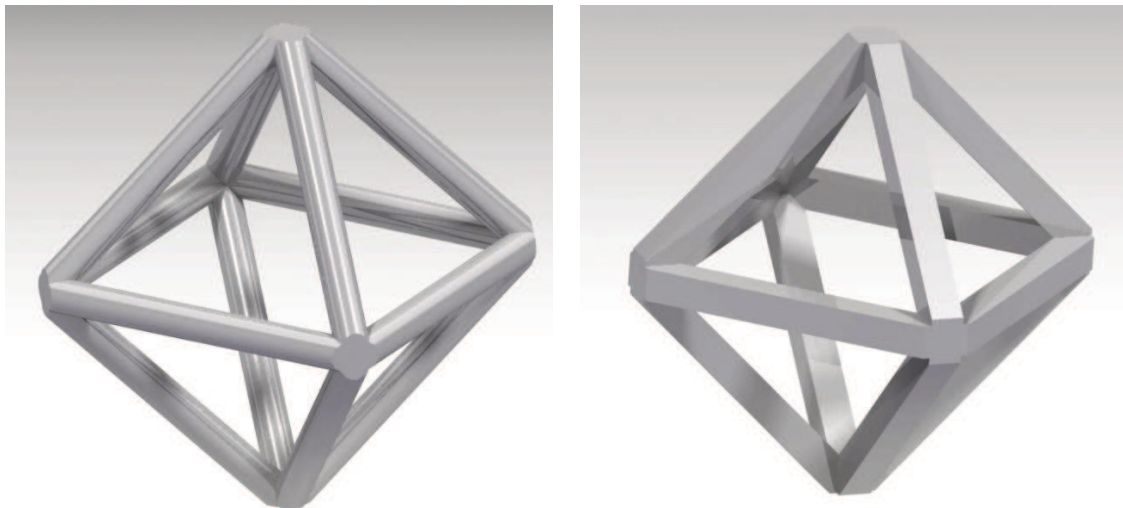


Abbildung 5.1: Einheitszelle Oktaeder mit kreisrunden Stabquerschnitt (links) und quadratischen Querschnitt (rechts)

Für die Konstruktion wird ein Zellseitenverhältnis $R_{ZSV} = 1$ sowie verschiedene relative Dichten gewählt. Die konstruierten Zellen dienen in weiterer Folge als Geometriemodell für die numerische Simulation. In dieser werden Einheitszellen mit kreisrunden Stabquerschnitt untersucht, um einen Vergleich mit dem analytischen Modell aufstellen zu können, da in diesem ebenfalls Kreisquerschnitte verwendet werden. Die Einstellung der Stabdurchmesser erfolgt über die relative Dichte. Um eine gleichbleibende Zellengröße zu erhalten bleibt die Stablänge konstant. Zur Ermittlung der Durchmesser wird Glg.(4.6) verwendet.

Tabelle 5.1: Abmessungen der Einheitszellen bei verschiedenen relativen Dichten

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	R_{ZSV}	d [mm]	l [mm]
0,05	1	0,265	2,165
0,10	1	0,375	2,165
0,15	1	0,459	2,165
0,20	1	0,530	2,165
0,25	1	0,593	2,165
0,30	1	0,650	2,165
0,35	1	0,702	2,165

5.2 Implementierung in ein konkretes Bauteil

Als Bauteil wird eine Sandwichstruktur ausgewählt. Diese besteht aus Zellen mit einer relativen Dichte von 25% und einer Stablänge von 2.165 mm. Um die Fertigungskriterien der additiven Fertigung zu implementieren werden die Querstreben der Einheitszelle entfernt, da diese die Qualität des Drucks beeinträchtigen können. Die Schichtplatten der Sandwichstruktur bestehen aus zwei 2mm dicken Platten. Dazwischen ist ein Verbund aus regelmäßig angeordneten Oktaedern aufgebaut. Der Verbund besteht aus einer 12x9x6 Anordnung. Somit ergibt sich eine Elementzahl von 648 Einheitszellen. Die Zellen sind so angeordnet, dass die Ecken einer Einheitszelle direkten Kontakt mit den Ecken anderer Einheitszellen haben. Somit hat eine Zelle in der Mitte des Bauteils maximal sechs und an den Ecken des Bauteils minimal drei Nachbarn.

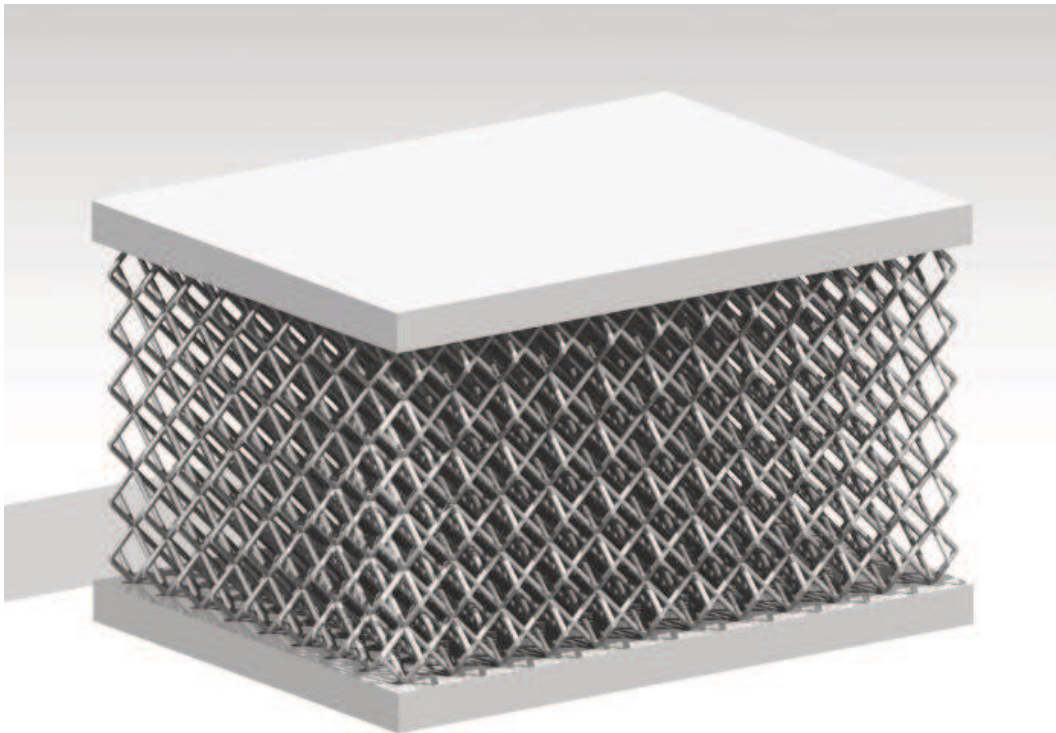


Abbildung 5.2: Sandwichstruktur mit einem Verbund aus Oktaedern

6 Simulation der Einheitszelle

Sämtliche Simulationen werden mit dem Simulationsprogramm Abaqus durchgeführt. Dieses verfügt über zwei wichtige Funktionen. Es ist möglich aus rein linear-elastischer Untersuchung oder nichtlinearer, also plastischer Untersuchung zu wählen. Simuliert werden die Einheitszellen mit einer relativen Dichte von 20%, 25%, 30% und 35%.

6.1 Aufbau der Simulation

Die vorab konstruierten Einheitszellen werden aus dem CAD-Programm in das Simulationsprogramm Abaqus importiert. Um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten, werden sämtliche Zellen mit dem gleichen Material sowie den gleichen Randbedingungen belegt. Um die Zelle auf ihr mechanisches Verhalten unter einer Druckbelastung zu untersuchen wird das Prinzip des Stauchversuches gewählt. Das Oktaeder wird an seiner Bodenfläche fest eingespannt und auf seiner Kopffläche mit einer Druckbelastung uniaxial beaufschlagt. Die Seitenflächen unterliegen keiner Einspannung und können sich somit frei in alle drei Raumrichtungen bewegen.

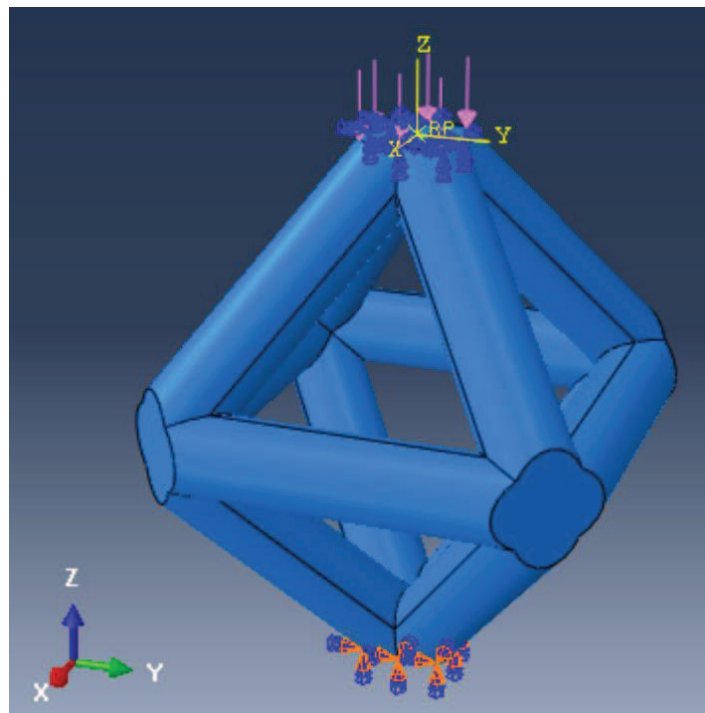


Abbildung 6.1: Beispiel der Randbedingungen

Als Material wird ein Maraging Stahl sowie eine Aluminiumlegierung mit folgenden mechanischen Kennwerten gewählt:

Tabelle 6.1: Materialeigenschaften

Werkstoffnummer	Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E – Modul [MPa]	Poissonzahl [-]	Streckgrenze [MPa]
1,2709	7850	210000	0,3	1900
AlSi10Mg	2689	70000	0,34	270

Zur plastischen Untersuchung ist es notwendig ein Materialmodell einzufügen oder eine Fließkurve aus Messdaten zu generieren. Für die weitere Simulation wird das Materialmodell Johnson Cook gewählt und die nötigen Parameter stammen aus der Literatur [19].

Tabelle 6.2: Parameter für plastisches Johnson Cook Modell [19]

Material	A [MPa]	B [MPa]	n [-]	c [-]
1,2709	324,1	113,8	0,42	0,002
AlSi10Mg	792	510	0,26	0,014

6.2 Linear-elastische Untersuchung

Das Modell der linearen Untersuchung rechnet nur bis zum Erreichen der Plastifizierung des Werkstoffes. Diese einfache und schnell rechnende Methode ist sehr praktisch um erste Aussagen über das linear-elastische Verhalten eines Bauteils zu treffen. In erster Linie wird der E-Modul und das Querkontraktionsverhalten untersucht.

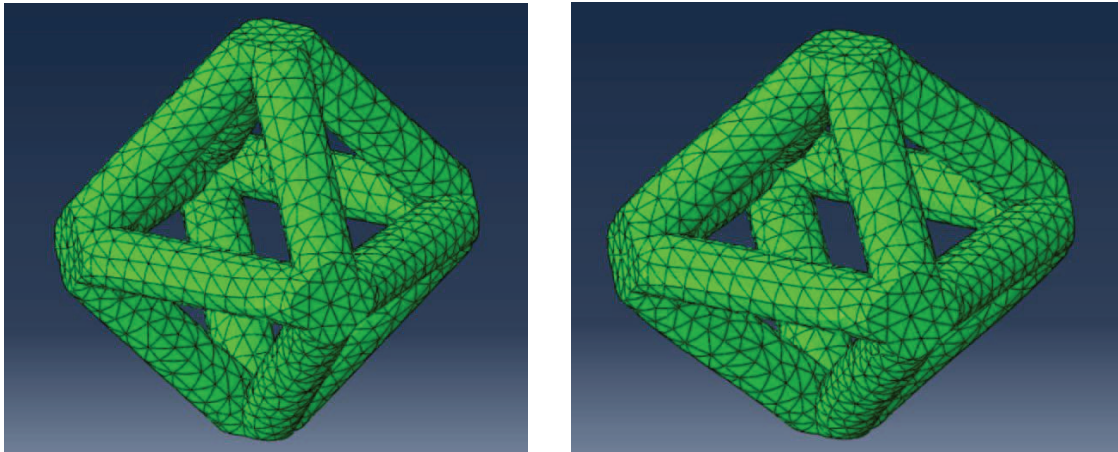


Abbildung 6.2: Einheitszelle vor (links) und nach (rechts) der Belastung

In **Abbildung 6.2** ist das Belastungsverhalten der Einheitszelle dargestellt. Die unter Druck stehende Zelle komprimiert sich in Belastungsrichtung bis zum Erreichen der Plastifizierung der Stäbe. Dabei verschieben sich die seitlichen Stirnflächen nach außen um das Zellvolumen konstant zu halten. Das vorab entwickelte analytische Modell der Poissonzahl besagt, dass bei einem Wert von $\nu = 1$ sich die Zelle in eine andere Richtung in gleichem Maße ausdehnt, wie sie sich in die Belastungsrichtung komprimiert. Um dieses Modell zu bestätigen wird die Verschiebung in Belastungsrichtung sowie die Verschiebung normal dazu über die Zeit aufgetragen.

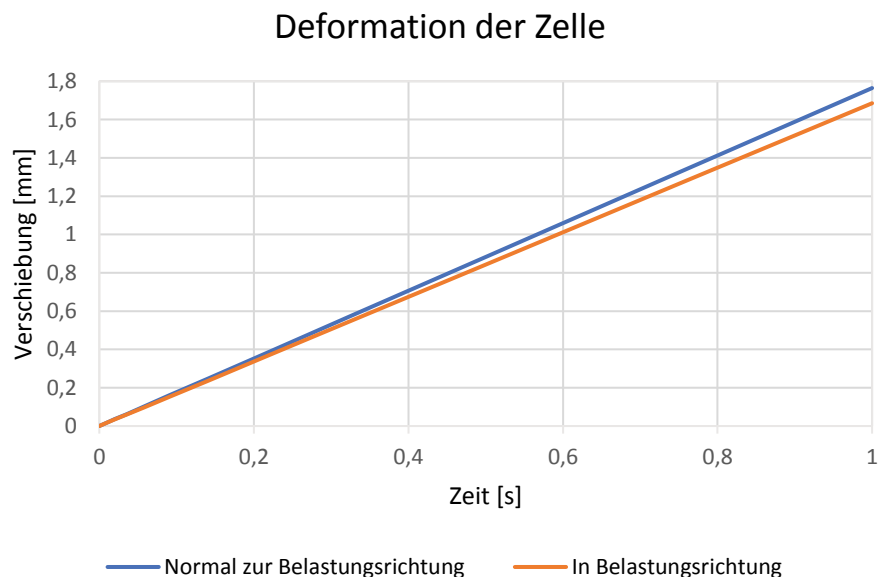


Abbildung 6.3: Deformation der Einheitszelle

In **Abbildung 6.3** ist das gleichmäßige Deformationsverhalten der Einheitszelle deutlich ersichtlich. Die Differenz der Verschiebung beträgt lediglich 0,012 mm. Diese ist auf etwaige Rechenungenauigkeiten in der Simulationssoftware zurückzuführen. Da sich die Zelle in Belastungsrichtung in gleichem Maße verschiebt wie normal zur Belastungsrichtung ist das analytische Modell für die Poissonzahl $\nu = 1$ bestätigt.

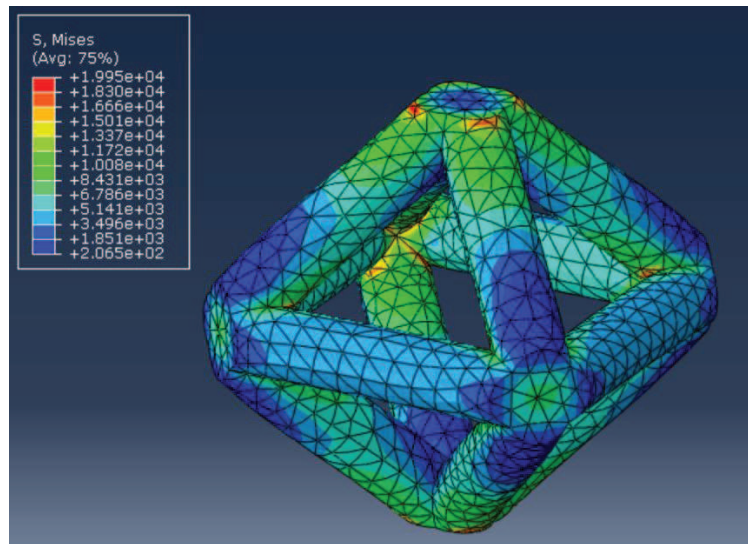


Abbildung 6.4: Spannungszustand einer uniaxial belasteten Einheitszelle

Analog zur linearen Deformation verhält sich auch das Spannungs-Stauchungsverhalten innerhalb der Zelle. Um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten werden die Spannungen und Stauchungen an mehreren Knotenpunkten gemessen und ausgewertet. Wie in **Abbildung 6.4** ersichtlich treten an den Knotenpunkten der Zelle deutliche Spannungsspitzen auf. Diese würden das Ergebnis verfälschen. Für die Auswertung des Spannungs-Stauchungsdiagrammes ist zu beachten, dass die Stauchung die negative Dehnung ist. Somit müssen die Werte negiert werden um eine Kurve mit einer positiven Steigung zu erhalten. Das lineare Rechenmodell der Simulationssoftware liefert für das Spannungs-Stauchungsverhalten für eine uniaxial belastete Einheitszelle die hookesche Gerade.

6.3 Plastische Untersuchung

Um ein vergleichbares Ergebnis mit der linearen Rechenmethode zu erhalten werden für die plastischen Versuche die gleichen Belastungen und Randbedingungen eingefügt. In der linear-elastischen Simulation hat sich herausgestellt, dass die Querstreben der Einheitszellen keinen deutlichen Einfluss auf das mechanische Verhalten bewirken. Um daher die Rechenleistung zu optimieren werden die vier Querstreben aus dem Bauteil entfernt. Anschließend wird unter

Verwendung des Johnson Cook Materialmodell die plastische Simulation bis zur vollständigen Deformation der Einheitszelle durchgeführt. Die Parameter für dieses Materialmodell werden aus der **Tabelle 6.2** entnommen.

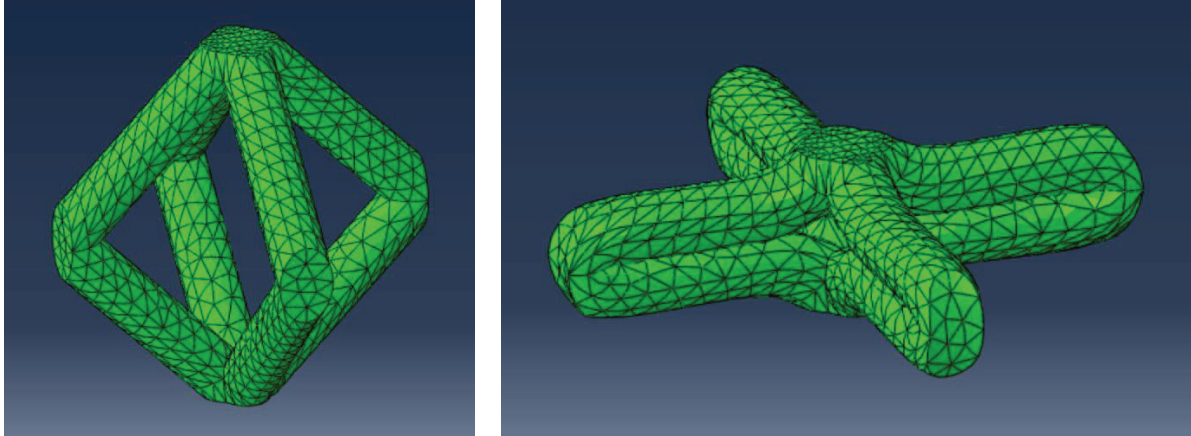


Abbildung 6.5: Einheitszelle vor (links) und nach (rechts) der Belastung

In **Abbildung 6.5** ist deutlich ersichtlich wie sich die Zelle nach Erreichen des Elastizitätsmaximums verformt. Dabei schieben sich die seitlichen Stirnflächen immer weiter nach Außen, während die Zelle komprimiert wird.

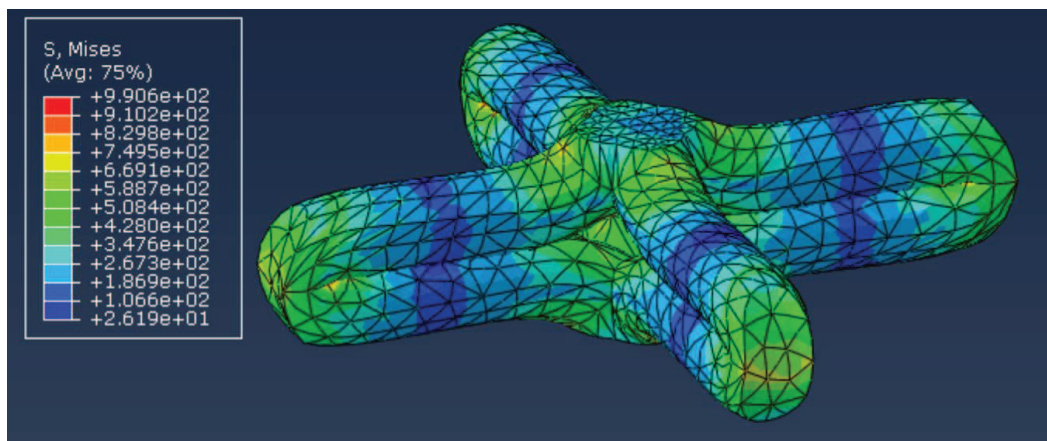


Abbildung 6.6: Spannungszustand der deformierten Zelle

In **Abbildung 6.6** ist klar erkenntlich, dass die Spannungen an den Knotenpunkten der Einheitszellen deutlich höher sind als in der Mitte der Zellenstäbe. Dies ist auf die erhöhte Deformation durch die Druckbelastung zurückzuführen.

7 Fertigung der Einheitszelle

Die Einheitszellen werden im FABLAB-Leoben mittels FDM Verfahren gefertigt. Als Grundlage für die Fertigung dienen die Konstruktionen aus Kap.5.1. Diese können als exportierte STL-Dateien direkt in die Fertigungssoftware überspielt werden.

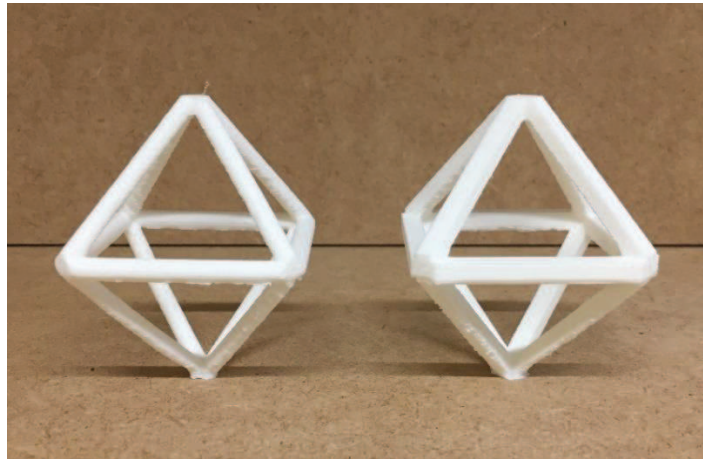


Abbildung 7.1: Durch FDM-Verfahren gefertigte Einheitszellen

Diese Modelle dienen als Anschauungsobjekte und besitzen eine Seitenlänge von 50mm und einen Stabdurchmesser von 5mm. Für die Fertigung ist es notwendig eine Stützstruktur zu implementieren. Diese dient zur Abstützung der horizontalen Querstreben. Die Stützstruktur wird nach der Fertigung manuell entfernt.



Abbildung 7.2: Einheitszelle mit Stützstruktur

8 Ergebnisse und Diskussion

Im folgenden Kapitel wird das analytische Modell durch den Vergleich mit der Literatur und den Ergebnissen der Simulation auf seine Plausibilität überprüft. Untersucht werden vier Zellen mit den relativen Dichten 20%, 25%, 30% und 35%. Für die analytische Auswertung des entwickelten Modells sowie für die Gleichungen der Literatur werden die selben Parameter aus **Tabelle 5.1** verwendet. Diese dienen ebenso als Grundlage für die Simulationsauswertung. Die Materialeigenschaften für sämtliche Untersuchungen sind in **Tabelle 6.1** und **Tabelle 6.2** zusammengefasst. Überprüft wird der Maraging Stahl (1.2709) sowie die Aluminiumlegierung (AlSi10Mg).

8.1 Analytische Ergebnisse

Die analytischen Ergebnisse stammen aus dem entwickelten Modell aus Kap.4.

8.1.1 Elastizitätsmodul

Die Ergebnisse für den Elastizitätsmodul sind nach Glg.(4.21) tabellarisch dargestellt.

Tabelle 8.1: Analytische Ergebnisse für den Elastizitätsmodul (Maraging Stahl 1.2709)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	$d [mm]$	$l [mm]$	$\frac{E^*}{E_s}$	$E^* [MPa]$
0,20	0,530	2,165	0,172	36184
0,25	0,593	2,165	0,213	44748
0,30	0,650	2,165	0,253	53132
0,35	0,702	2,165	0,292	61340

Tabelle 8.2: Analytische Ergebnisse für den Elastizitätsmodul (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	$d [mm]$	$l [mm]$	$\frac{E^*}{E_s}$	$E^* [MPa]$
0,20	0,530	2,165	0,172	12061
0,25	0,593	2,165	0,213	14916
0,30	0,650	2,165	0,253	17710
0,35	0,702	2,165	0,292	20446

8.1.2 Poissonzahl

Die Poissonzahl errechnet sich für die folgenden Strukturparameter nach Glg.(4.31). Da die entwickelte Gleichung vom verwendeten Werkstoff unabhängig ist gilt sie für sämtliche Werkstoffe.

Tabelle 8.3: Analytische Ergebnisse für die Poissonzahl

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	$d [mm]$	$l [mm]$	ϑ
0,20	0,530	2,165	1
0,25	0,593	2,165	1
0,30	0,650	2,165	1
0,35	0,702	2,165	1

Unter der Voraussetzung, dass die Geometriebedingung aus Kap.4.1 erfüllt ist, ist die Poissonzahl unabhängig von der relativen Dichte der Einheitszelle. Sie besitzt für jede relative Dichte den Wert $\vartheta = 1$. Bestätigt wird dieses analytische Modell durch die Ergebnisse der linear-elastischen Simulation. Wird die Zelle in Belastungsrichtung komprimiert, so dehnt sie sich normal dazu im gleichen Maße aus. Dies gilt aber nur bis zum Erreichen der Plastifizierung.

8.1.3 Knickung

Zur Untersuchung der kritischen Knickspannung werden laut Kap.4.5 Fall I und III untersucht. Die mechanischen Modelle für diese beiden Fälle sind durch Glg.(4.35) und Glg.(4.36) beschrieben. Die kritischen Knickspannungen für verschiedene relative Dichten und unterschiedliche Werkstoffen sind für den Knickfall I in den folgenden beiden Tabellen dargestellt.

Tabelle 8.4: Kritische Knickspannung für den Knickfall I (Maraging Stahl 1.2709)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	$d [mm]$	$l [mm]$	$\frac{\sigma_k}{E_s}$	$\sigma_k [MPa]$
0,20	0,530	2,165	0,013	2749
0,25	0,593	2,165	0,016	3436
0,30	0,650	2,165	0,019	4321
0,35	0,702	2,165	0,022	4810

Tabelle 8.5: Kritische Knickspannung für den Knickfall I (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_k}{E_s}$	σ_k [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,013	916
0,25	0,593	2,165	0,016	1145
0,30	0,650	2,165	0,019	1374
0,35	0,702	2,165	0,022	1603

Für den Fall III ergeben sich laut Glg.(4.36) für die untersuchten Werkstoffe folgende Werte:

Tabelle 8.6: Kritische Knickspannung für den Knickfall III (Maraging Stahl 1.2709)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_k}{E_s}$	σ_k [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,107	22439
0,25	0,593	2,165	0,133	28049
0,30	0,650	2,165	0,160	33659
0,35	0,702	2,165	0,186	39269

Tabelle 8.7: Kritische Knickspannung für den Knickfall III (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_k}{E_s}$	σ_k [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,107	7479
0,25	0,593	2,165	0,133	9349
0,30	0,650	2,165	0,160	11219
0,35	0,702	2,165	0,186	13089

Aus den Ergebnissen wird ersichtlich, dass die Werte für die kritische Knickspannung für beide Werkstoffe im ersten Knickfall deutlich geringer sind als für den dritten Fall. Dieser tritt auf, wenn das Ende einer Zellstrebe nicht in einem Knoten mit anderen Streben verbunden ist, sondern frei belastet wird. Dies ist beim Oktaeder nicht der Fall, weil jeder Stab der Einheitszelle in einem Knoten zusammenläuft. Somit ist für die Bewertung der Struktur der dritte Knickfall laut Euler heranzuziehen.

8.1.4 Streckgrenze

Laut Glg.(4.40) besteht ein formelmäßiger Zusammenhang zwischen der Streckgrenze der Einheitszelle und der Streckgrenze aus dem das Zellmaterial gefertigt ist. Diese wurde für beide Werkstoffe aus **Tabelle 6.1** ausgewertet.

Tabelle 8.8: Streckgrenze der Einheitszelle (Maraging Stahl 1.2709)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{YS}}$	σ_{pl}^* [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,0152	31,03
0,25	0,593	2,165	0,0228	43,37
0,30	0,650	2,165	0,0300	57,01
0,35	0,702	2,165	0,0377	71,84

Tabelle 8.9: Streckgrenze der Einheitszelle (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{YS}}$	σ_{pl}^* [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,0152	4,04
0,25	0,593	2,165	0,0228	6,16
0,30	0,650	2,165	0,0300	8,10
0,35	0,702	2,165	0,0377	10,20

8.1.5 Verdichtung

Der Zeitpunkt, ab dem die Zelle keine Energie mehr durch Änderung ihrer Form umwandeln kann, wird Verdichtung genannt. Berechnet wird diese nach den Untersuchungen von Gibson und Ashby nach der Glg.(3.14).

Tabelle 8.10: Verdichtung der Zellen

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	ϑ
0,20	0,530	2,165	0,72
0,25	0,593	2,165	0,65
0,30	0,650	2,165	0,58
0,35	0,702	2,165	0,51

8.2 Auswertung der Simulationsergebnisse

Ein aussagekräftiges Ergebnis über die mechanischen Eigenschaften der Einheitszelle liefert ein Spannungs-Stauchungsdiagramm. Für die Auswertung sind die Einheitszellen mit einer relativen Dichte von 20%, 25%, 30% und 35% herangezogen worden. Als Werkstoff wird die Aluminiumlegierung gewählt.

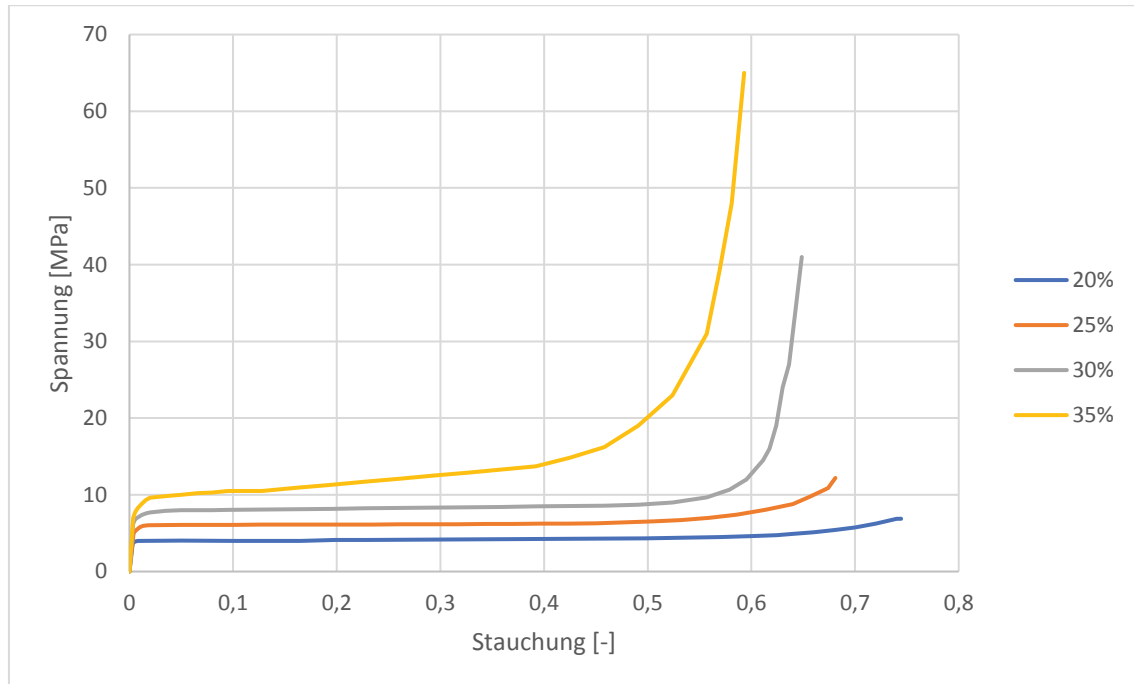


Abbildung 8.1: Spannungs-Stauchungsdiagramm für verschiedene Einheitszellen

In **Abbildung 8.1** ist der Spannungsverlauf der vier verschiedenen Zellen dargestellt. Deutlich zu erkennen ist das große Spannungsplateau, in dem die Zelle viel Energie durch plastische Verformung umwandelt. Der elastische Bereich beschränkt sich bei allen Strukturen auf einen sehr kleinen Bereich. Für die Auswertung der Simulationsergebnisse wird der E-Modul über das hookesche Gesetz und die Plateauspannung bei 20% und 40% als arithmetisches Mittel ausgewertet. In weiterer Folge werden die Simulationsergebnisse mit dem analytischen Modell und den Literaturwerten verglichen.

Tabelle 8.11: Simulationsergebnisse für den Elastizitätsmodul der Aluminiumlegierung AlSi10Mg

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{E^*}{E_s}$	E^* [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,165	11533
0,25	0,593	2,165	0,201	14738
0,30	0,650	2,165	0,249	17457
0,35	0,702	2,165	0,283	19827

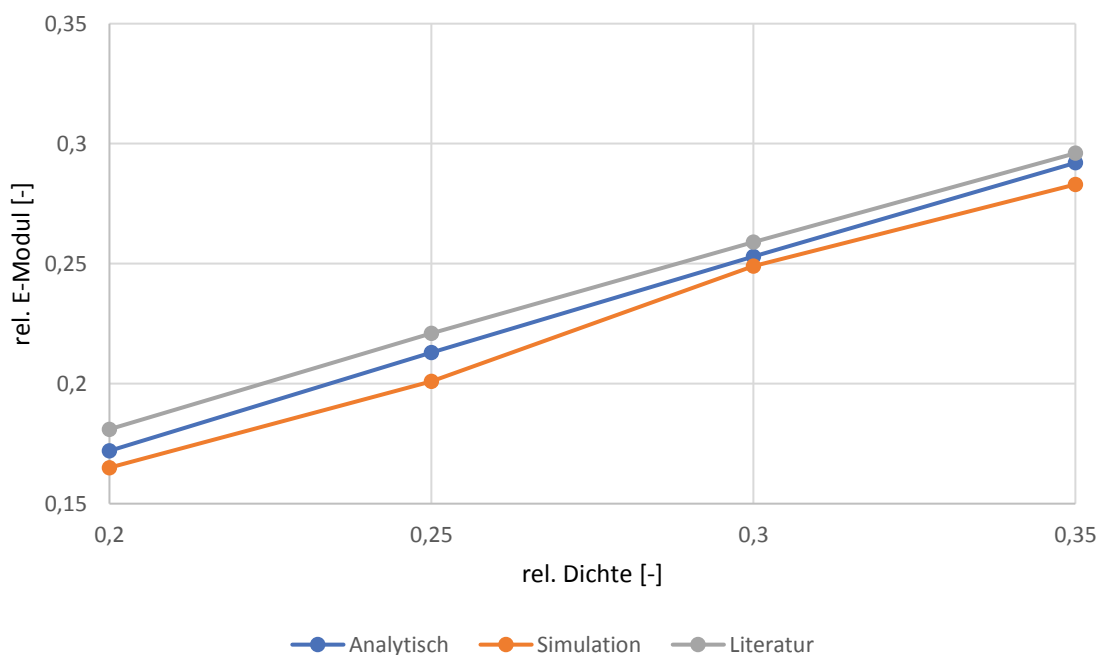


Abbildung 8.2: Vergleich der analytischen Ergebnisse mit den Simulationswerten

Die Abweichung der Werte aller drei Methoden ist relativ gering. Alle Modelle besitzen den gleichen Trend. Mit steigender relativer Dichte steigt auch der E-Modul der Einheitszellen an. Auffällig ist, dass die Werte der beiden analytischen Modelle über der Simulation liegen. Da aber die Streuung zwischen den drei untersuchten Methoden sehr gering ist, können die analytischen Entwicklungen als plausibel betrachtet werden.

Tabelle 8.12: Simulationsergebnisse für die Streckgrenze der Aluminiumlegierung AlSi10Mg

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{YS}}$	σ_{pl}^* [MPa]
0,20	0,530	2,165	0,0145	4,24
0,25	0,593	2,165	0,0225	6,09
0,30	0,650	2,165	0,0306	8,33
0,35	0,702	2,165	0,0466	12,6

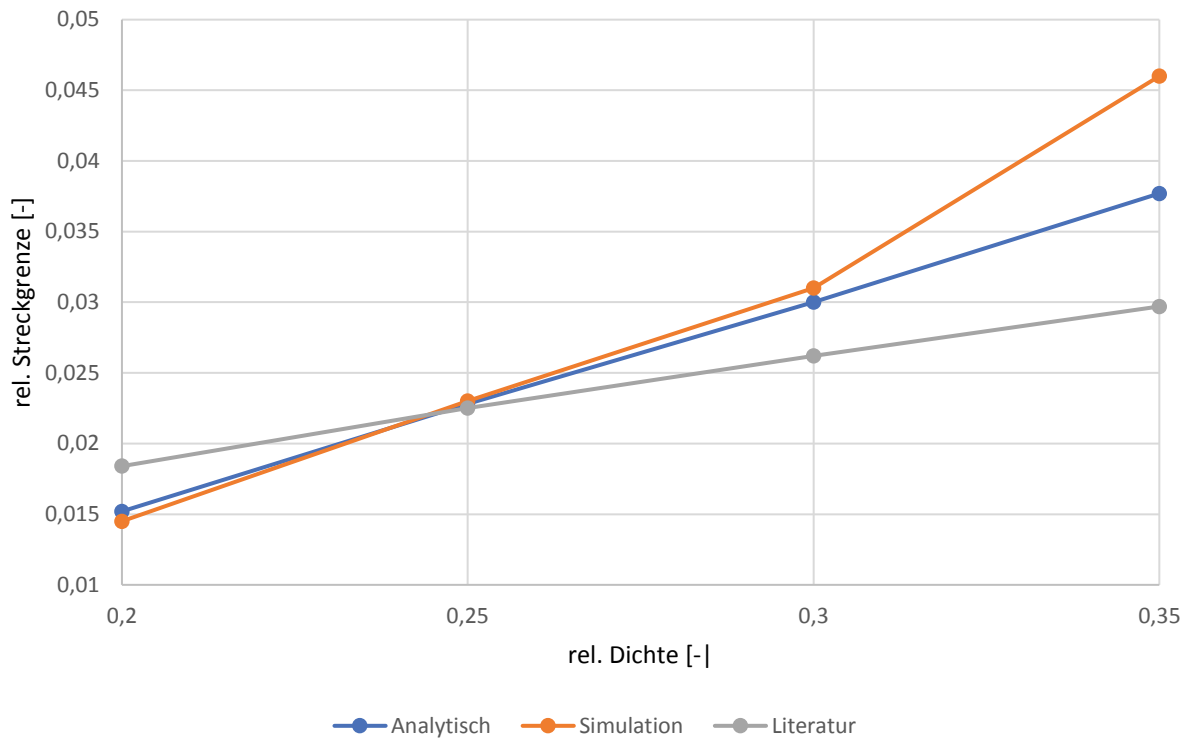


Abbildung 8.3: Vergleich der analytischen Ergebnisse mit den Simulationswerten

Die Streckgrenzen des analytischen Modells und der Simulation besitzen den gleichen Trend, lediglich die Werte der Literatur haben ein anderes Verhalten. Für die relativen Dichten 20%, 25% und 30% werden zwischen für das analytische Modell und der Simulation nahezu idente Werte erzielt, bei 35% ist die Streuung größer. Eine mögliche Erklärung für diesen Unterschied könnte die Vernachlässigung des Normalkraft- sowie Schubanteils im Rechenmodell sein. Dieses analytische Modell kann für die relativen Dichten 20%, 25% und 30% für plausibel erklärt werden, weil eine deutliche Übereinstimmung mit der Simulation vorliegt. Die Abweichung mit den Literaturwerten kann auf eine andere Wahl des Koordinatensystems bei der analytischen Untersuchung zurückgeführt werden.

Durch Anlegen von Tangenten an die plastische Deformationskurve kann im Spannungs-Stauchungsdiagramm die Grenze bestimmt werden, ab der die Verdichtung der Einheitszelle beginnt. Für die vier Zellen ergeben sich nach Ablesen der Werte aus dem Diagramm folgende Grenzen:

Tabelle 8.13: Verdichtung

$\frac{\rho^*}{\rho_s}$	d [mm]	l [mm]	ε_D
0,20	0,530	2,165	0,53
0,25	0,593	2,165	0,61
0,30	0,650	2,165	0,67
0,35	0,702	2,165	0,74

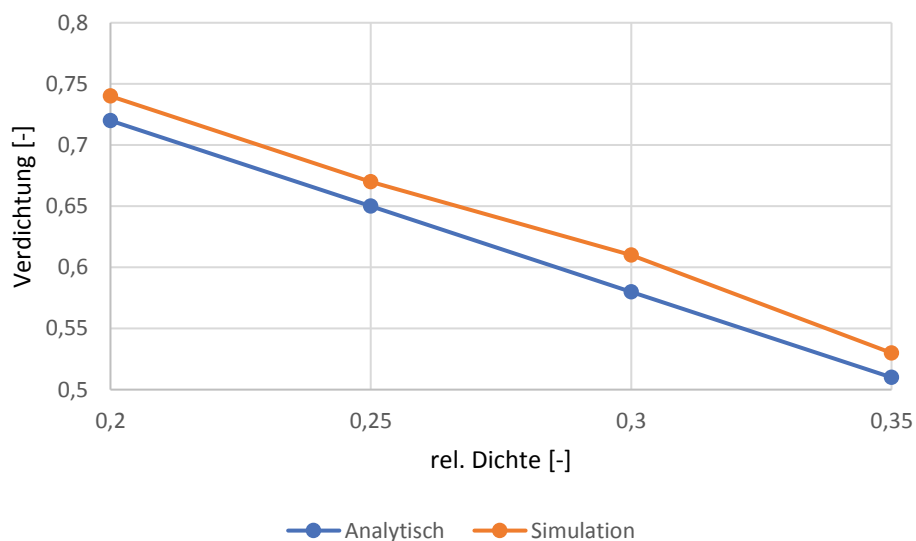


Abbildung 8.4: Vergleich der analytischen Werte mit der Simulation

Die Simulationsergebnisse liefern bei allen relativen Dichten einen späteren Zeitpunkt, bei dem sich die Einheitszelle zu verdichten beginnt. Schwierig ist es die Verdichtung bei der Zelle mit 20% relativer Dichte grafisch zu ermitteln, da kein signifikanter Anstieg der Spannungs-Stauchungskurve zu erkennen ist. Bei allen untersuchten Zellen liegt der gleiche Trend vor. Die Verdichtung beginnt früher, je höher die relative Dichte und somit je dicker die Zellstreben sind. Durch diese Ähnlichkeit kann das analytische Modell durch die Simulationsergebnisse bestätigt werden.

8.3 Vergleich Oktaeder mit anderen Strukturen

Um die Oktaeder Struktur mit anderen Gitterstrukturen vergleichen zu können werden vier Diagramme erstellt und miteinander in Relation gesetzt. Ziel ist es, die Performance der jeweiligen Struktur an ihrem Volumen zu bestimmen. Als Vergleich wurde eine rhombisch-dodekaedrische sowie eine diamantene Zelle verwendet. Zur Auswertung der Ergebnisse für diese anderen Zellen dienen die analytischen Entwicklungen von Zadpoor und Hedyayti [13]. Um ein anschauliches Ergebnis zu liefern werden alle drei Zellen mit einer relativen Dichte von 30% untersucht.

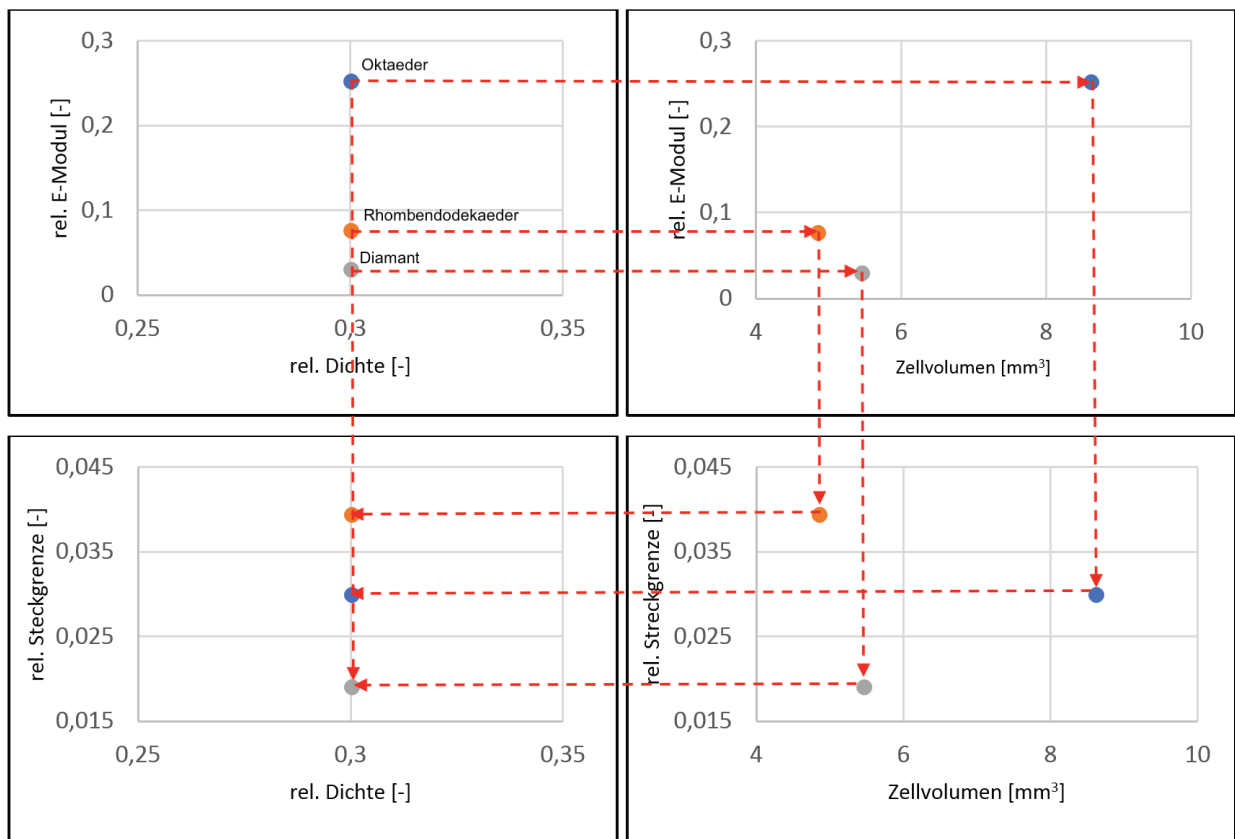


Abbildung 8.5: Performance Index verschiedener Einheitszellen

In diesen vier Diagrammen wurden wesentliche Kennzahlen wie der relative E-Modul oder die relative Streckgrenze den Einheitszellen gegenübergestellt. Das Oktaeder besitzt zwar den höchsten E-Modul, jedoch ist auch das Zellvolumen im Vergleich zu den anderen beiden Zellen deutlich höher. In Anbetracht der relativ hohen Streckgrenze im Vergleich zum Zellvolumen besitzt die rhombisch-dodekaedrische Einheitszelle allgemein bessere Eigenschaften.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Eine große Herausforderung dieser Arbeit zeigte sich in der Entwicklung des analytischen Modells, da nahezu keine Literaturwerte vorhanden waren. Es gibt zwar klar definierte Vorgehensweisen um Gitterstrukturen mechanisch und festigkeitstechnisch zu beschreiben, diese lassen sich aber aufgrund der unterschiedlichen Geometrien nur schwer auf eine konkrete Einheitszelle umlegen. Die analytischen Untersuchungen haben gezeigt, dass die oktaedrische Einheitszelle sehr gute mechanische Kennwerte aufweist. Durch seine geometrische Form lässt sich diese Struktur sehr weit komprimieren. Dies zeigt sich im Energieaufnahmevermögen. Die neu entwickelten analytischen Modelle erweisen sich als plausibel. Unterstützt wird diese Behauptung durch eine Reihe an numerischen Simulationen. Im Zuge der Untersuchungen sind Aspekte aufgetreten, welche den Einsatz als Einheitszelle für einen Gitterstrukturverbund wahrscheinlich behindern. Dies ist das Raumkonzept. Es ist nur schwer möglich einen Raum, nur bestehend aus Oktaedern, zu füllen. Wie in Kap.5.2 beschrieben können Oktaeder nur mit deren Stirnflächen miteinander verbunden werden. Dies hat zur Folge, dass das Strukturvolumen aus sehr viel Luft besteht und somit eine hohe Porosität besitzt. Um das Problem der geometrischen Raumfüllung zu lösen müsste ein Hybridverbund aus Tetraedern und Oktaedern verwendet werden. Im Vergleich zu diesem Problem besitzt die rhombisch-dodekaedrische Einheitszelle bessere geometrische Eigenschaften zur Raumfüllung. Dadurch wird sie auch wesentlich häufiger in der additiven Fertigung eingesetzt. Um die in dieser Arbeit entwickelten Thesen wissenschaftlich zu unterstreichen wäre es notwendig, die beschriebenen Zellen zu fertigen und praktischen Versuchen zu unterziehen. Erst dann ist es möglich, genaue Aussagen über das mechanische Verhalten zu treffen.

10 Abkürzungsverzeichnis

Glg.	Gleichung	
Kap.	Kapitel	
R	relative Dichte	$[-]$
R_{ZSV}	Zellenseitenverhältnis	$[-]$
ρ^*	Dichte der Einheitszelle	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
ρ_s	Dichte aus dem das Zellmaterial gefertigt ist	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
ϕ	Porosität	$[-]$
$U_{N,F+B+Q}$	Formänderungsarbeit	$[Nm]$
$N(x)$	Normalkraftverlauf	$[N]$
$Q(x)$	Querkraftverlauf	$[N]$
$M(x)$	Momentenverlauf	$[Nm]$
E	Elastizitätsmodul	$[MPa]$
G	Schubmodul	$[MPa]$
A	Querschnitt	$[m^2]$
I	Flächenträgheitsmoment	$[m^4]$
$\delta_{22(N,F+B)}$	Gesamtverschiebung	$[m]$
σ	Spannung	$[MPa]$
ε	Dehnung	$[-]$
F^*	Gesamtkraft auf eine Einheitszelle	$[N]$
A_Q	Wirkquerschnitt	$[m^2]$
ϑ	Poissonzahl	$[-]$
P_k	Knickkraft	$[N]$
J_{min}	minimales Flächenträgheitsmoment	$[m^4]$
l_k	Wirklänge	$[m]$
σ_k	Knickschubspannung	$[MPa]$
i	Trägheitsradius	$[m]$
ε_D	plastische Verdichtung	$[-]$
σ_{pl}^*	Streckgrenze der Einheitszelle	$[MPa]$
M_B	Biegemoment	$[Nm]$
w_b	Widerstandsmoment gegen Biegung	$[m^3]$
V	Volumen	$[m^3]$
E^*	Elastizitätsmodul der Einheitszelle	$[MPa]$

E_s	Elastizitätsmodul des Zellmaterials	[MPa]
σ_s	Streckgrenze des Zellmaterials	[MPa]
c	Abstand zur neutralen Faser	[m]
φ	Neigungswinkel der Zellstreben	[°]

11 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 3.1: Hubschrauberbauteil mit Gitterstrukturen [5]	3
Abbildung 3.2: (a) offene 3D Gitterstruktur, (b) geschlossene 3D Gitterstruktur, (c) 2D Honeycomb [1]	4
Abbildung 3.3: dreidimensionale polyedrische Zellen: (a) Tetraeder, (b) dreieckiges Prisma, (c) rechteckiges Prisma, (d) sechseckiges Prisma, (e) Oktaeder (f) Rhombendodekaeder, (g) fünfeckiges Dodekaeder, (h) Tetrakaidekaeder (i) Ikosaeder [1].....	5
Abbildung 3.4: Sandwichstruktur mit rhombisch-dodekaedrischer Einheitszelle [7]	5
Abbildung 3.5: Spannungs-Dehnungskurve eines soliden Werkstoffes im Vergleich zu einer Gitterstruktur	6
Abbildung 3.6: Untersuchung eines Viertels einer tetrakaidekaedrischen Einheitszelle [16]	9
Abbildung 3.7: Systemskizze eines Stabes der Einheitszelle mit uniaxialer Belastung in Richtung 2	10
Abbildung 3.8: Systemskizze eines Stabes der Einheitszelle mit uniaxialer Belastung in Richtung 1	12
Abbildung 3.9: Euler Knickfälle [17]	13
Abbildung 3.10: Schrittweise Deformation einer Gitterstruktur bis zur Verdichtung [15]	15
Abbildung 3.11: Skizze eines Oktaeders	16
Abbildung 3.12: graphische Herleitung des Performance Index anhand von Ashby-Maps [11]	18
Abbildung 4.1: uniaxial belasteter Oktaeder	20
Abbildung 4.2: geometrische Beziehungen eines Oktaeders	21
Abbildung 4.3: Freikörperbild eines uniaxial belasteten Druckstabes.....	23
Abbildung 4.4: Schnittbild eines uniaxial belasteten Druckstabes	23
Abbildung 4.5: Freikörperbild eines uniaxial belasteten Druckstabs.....	27
Abbildung 4.6: Schnittbild eines uniaxial belasteten Druckstab.....	27
Abbildung 4.7: Euler Knickfälle I und III	30
Abbildung 5.1: Einheitszelle Oktaeder mit kreisrunden Stabquerschnitt (links) und quadratischen Querschnitt (rechts).....	33
Abbildung 5.2: Sandwichstruktur mit einem Verbund aus Oktaedern.....	35
Abbildung 6.1: Beispiel der Randbedingungen	36
Abbildung 6.2: Einheitszelle vor (links) und nach (rechts) der Belastung	38
Abbildung 6.3: Deformation der Einheitszelle	38
Abbildung 6.4: Spannungszustand einer uniaxial belasteten Einheitszelle	39
Abbildung 6.5: Einheitszelle vor (links) und nach (rechts) der Belastung	40

Abbildung 6.6: Spannungszustand der deformierten Zelle40

Abbildung 7.1: Durch FDM-Verfahren gefertigte Einheitszellen41

Abbildung 7.2: Einheitszelle mit Stützstruktur41

Abbildung 8.1: Spannungs-Stauchungsdiagramm für verschiedene Einheitszellen46

Abbildung 8.2: Vergleich der analytischen Ergebnisse mit den Simulationswerten47

Abbildung 8.3: Vergleich der analytischen Ergebnisse mit den Simulationswerten48

Abbildung 8.4: Vergleich der analytischen Werte mit der Simulation49

Abbildung 8.5: Performance Index verschiedener Einheitszellen.....50

12 Tabellenverzeichnis

Tabelle 3.1: relative Dichten verschiedener Materialien [1]	8
Tabelle 3.2: Knicklängen für die verschiedenen Euler Knickfälle [17].....	13
Tabelle 5.1: Abmessungen der Einheitszellen bei verschiedenen relativen Dichten.....	34
Tabelle 6.1: Materialeigenschaften	37
Tabelle 6.2: Parameter für plastisches Johnson Cook Modell [19]	37
Tabelle 8.1: Analytische Ergebnisse für den Elastizitätsmodul (Maraging Stahl 1.2709).....	42
Tabelle 8.2: Analytische Ergebnisse für den Elastizitätsmodul (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)	42
Tabelle 8.3: Analytische Ergebnisse für die Poissonzahl	43
Tabelle 8.4: Kritische Knickspannung für den Knickfall I (Maraging Stahl 1.2709)	43
Tabelle 8.5: Kritische Knickspannung für den Knickfall I (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)....	44
Tabelle 8.6: Kritische Knickspannung für den Knickfall III (Maraging Stahl 1.2709)	44
Tabelle 8.7: Kritische Knickspannung für den Knickfall III (Aluminiumlegierung AlSi10Mg)	44
Tabelle 8.8: Streckgrenze der Einheitszelle (Maraging Stahl 1.2709)	45
Tabelle 8.9: Streckgrenze der Einheitszelle (Aluminiumlegierung AlSi10Mg).....	45
Tabelle 8.10: Verdichtung der Zellen	45
Tabelle 8.11: Simulationsergebnisse für den Elastizitätsmodul der Aluminiumlegierung AlSi10Mg.....	47
Tabelle 8.12: Simulationsergebnisse für die Streckgrenze der Aluminiumlegierung AlSi10Mg	48
Tabelle 8.13: Verdichtung	49

Literaturverzeichnis

- [1] L.J. Gibson and M.F. Ashby. Cellular solids. Structure and properties. Cambridge solid state science series. Cambridge University Press, Cambridge, New York. 1999.
- [2] H.A.Richard, B.Schram, T.Zipsner, Additive Fertigung von Bauteilen und Strukturen, Springer Vieweg, 2017
- [3] M.Kumke, Methodisches Konstruieren von additiv gefertigten Bauteilen, Springer, 2018, 20
- [4] B.Riegraf, A.L. Berscheid, Wissenschaft im Angesicht „großer gesellschaftlicher Herausforderungen“ – Das Beispiel der Forschung an hybriden Leichtbaumaterialien, Transcript Verlag Bielefeld, 2018,102-103
- [5] S.J.Merkt, Qualifizierung von generativ gefertigten Gitterstrukturen für maßgeschneiderte Bauteilfunktionen, Fakultät für Maschinenwesen, TU Aachen, 2015, 2-3
- [6] M.Welsch, T.Blöß, Effektive mechanische Materialeigenschaften von Werkstoffen mit stochastischen verteilten Agglomeraten, Institut für Maschinenlemente und Rechnergestützte Produktentwicklung, Helmut-Schmidt Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg, 2013,
- [7] Brotan V., Fergani O., Sorby K., Welo T., Mechanical properties of biocompatible 316L steel rhombic dodecahedron lattice structures, Solid Freeform Fabrication Symposium, Austin, Texas, (2016), 2087-2094
- [8] Walzl. A, Buchmayr B., Entwicklung von Gitterstrukturen für die Anwendung im automotiv Bereich hergestellt mittels Additiver Fertigung, 1-7,
- [9] S. Babae, B.H. Jahromi, A. Ajdari, H. Nayeb- Hashemi, and A. Vaziri. Mechanical properties of open-cell rhombic dodecahedron cellular structures. Acta Materialia 60, 6-7, 2873–2885. 2012.
- [10] S.M. Ahmadi, G. Campoli, S. Amin Yavari, B. Sajadi, R. Wauthle, J. Schrooten, H. Weinans, A.A. Zadpoor, Mechanical behavior of regular open-cell porous biomaterials made of diamond lattice unit cells, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials 34 (2014) 106-115
- [11] Ashby, M. F.: Materials selection in mechanical design. Burlington, MA: Butterworth-Heinemann 2011
- [12] A.Aigner, Einsatz der additiven Fertigung beim Design bionischer Strukturen für den Leichtbau, Lehrstuhl für Umformtechnik Leoben, 2016

- [13] Zadpoor AA, Hedayati R. 2016. Analytical relationships for prediction of the mechanical properties of additively manufactured porous biomaterials. J Biomed Mater Res Part A 2016:104A:3164–3174.
- [14] B. Klein. Leichtbau-Konstruktion. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden. 2013.
- [15] A.Jung, Offenporige, nanobeschichtete Hybrid-Metallschäume – Herstellung und Eigenschaften, Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften der Universität des Saarlandes, 2011
- [16] K. Li, X.-L. Gao, A.K. Roy, Micromechanics model for three-dimensional open-cell foams using a tetrakaidecahedral unit cell and Castigliano's second theorem, Composites Science and Technology 63, 2003, 1769–1781
- [17] H.Balke, Einführung in die Technische Mechanik – Festigkeitslehre, 3.Auflage, Springer Vieweg, 2014
- [18] C.Leopold, Über Form und Struktur – Geometrien in Gestaltungsprozessen, Springer Vieweg, 2014
- [19] A. Banerjee, S. Dhar, S. Acharyya, D. Datta, N. Nayak, Determination of Johnson cook material and failure model constants and numerical modelling of Charpy impact test of armour steel Materials Science & Engineering A, 2015,