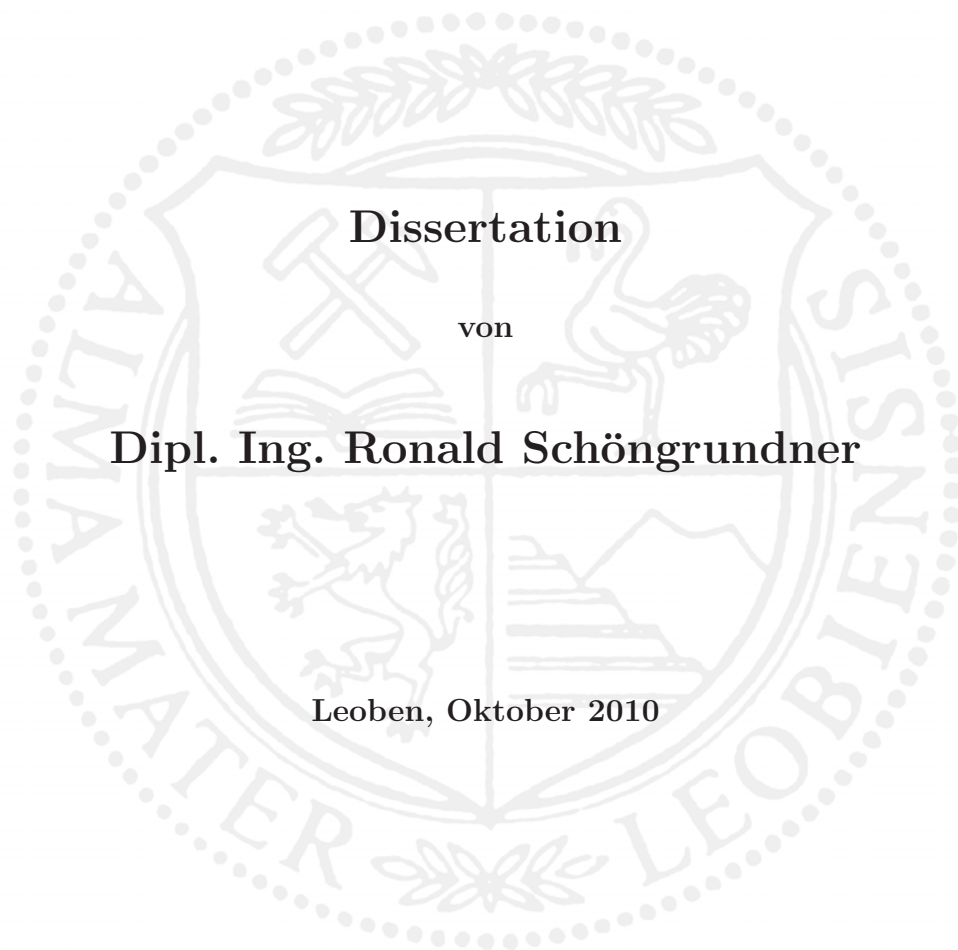


**Numerische Studien zur Ermittlung
der risstreibenden Kraft in
elastisch-plastischen Materialien bei
unterschiedlichen
Belastungsbedingungen**



Dissertation

von

Dipl. Ing. Ronald Schöngrundner

Leoben, Oktober 2010

Für meine Familie

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe.

Leoben, Oktober 2010

Danksagung

Besonders möchte ich Univ.-Prof Dipl.-Ing. Dr.mont. Otmar Kolednik für die Vergabe und die ausgezeichnete Betreuung meiner Doktorarbeit danken. Bei zahlreichen Gesprächen hat mir Otmar viele Tipps und Anregungen für die vorliegende Arbeit gegeben.

Außerdem möchte ich O. Univ.-Prof Dipl.-Ing. Dr.tech. Franz Dieter Fischer für die Durchsicht meiner Arbeit danken.

Des Weiteren möchte ich Univ.-Prof Dipl.-Ing. Dr.mont. Thomas Antretter und meinem Kollegen Wolfgang Pranger danken für die Einführung und Unterstützung beim Umgang mit ABAQUS.

Auch bei den anderen Mitarbeitern des Institutes für Mechanik möchte ich mich für das freundliche Arbeitsklima und deren Unterstützung bedanken.

Weiters gilt der Dank natürlich auch meinen Eltern, die mich über die gesamte Studienzeit immer unterstützt haben.

Ronald Schöngrundner, Oktober 2010

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des COMET Projektes A4.11 WP3 in Zusammenarbeit mit dem Materials Center Leoben, dem Erich Schmid Institut für Materialwissenschaft der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und dem Institut für Mechanik der Montanuniversität Leoben erstellt.

Der österreichischen Bundesregierung (insbesondere dem Bundesministerium für Verkehr, Innovation und Technologie und dem Bundesministerium für Wirtschaft, Familie und Jugend) sowie dem Land Steiermark, vertreten durch die Österreichische Forschungsförderungsgesellschaft mbH und die Steirische Wirtschaftsförderungsgesellschaft mbH, wird für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeiten im Rahmen des von der Materials Center Leoben Forschung GmbH abgewickelten K2 Zentrums für „Materials, Processing und Product Engineering“ im Rahmen des Österreichischen COMET Kompetenzzentren Programms sehr herzlich gedankt.

Abstract

A crack in a component grows, if the crack driving force is equal or larger than the crack growth resistance. Since the beginning of elastic-plastic fracture mechanics, a parameter has been searched which describes the crack driving force and is generally applicable. Rice introduced 1968 such a parameter, the J -integral, which is now commonly used in standard fracture mechanics testing. Since the J -integral was derived for nonlinear-elastic materials (i.e. deformation theory of plasticity), its application for real, elastic-plastic materials is connected with certain restrictions. One important restriction is that the J -integral can be used only, if no unloading processes occur in the material. But even if this condition is fulfilled, the J -integral does not describe the crack driving force, but only the intensity of the crack tip field.

Simha et al. have recently succeeded in deriving the crack driving force in elastic-plastic materials with incremental theory of plasticity by using the configurational force concept. A new J -integral for elastic-plastic materials, J^{ep} , was found which is able to quantify the crack driving force in elastic-plastic materials.

The current thesis deals with the characteristic properties of this new J -integral, J^{ep} , and works out the main differences to the conventional J -integral. In order to do this, numerical studies are conducted to calculate the distribution of the configurational forces in fracture mechanic specimens. The incremental plasticity near-tip and far-field J -integrals are evaluated from the configuration forces and compared to the conventional deformation-plasticity J -integrals. Different parameters are systematically varied, e.g. the stress state, the load, the size of the plastic zone, and the finite element mesh sizes.

On the contrary to the conventional J -integral, the new J -integral, J^{ep} , can also be applied for monotonically or cyclically growing cracks. An important topic of the current thesis is to quantify the crack driving force for stationary and growing cracks in elastic-plastic materials with incremental theory of plasticity. Therefore, the path dependency of J^{ep} is examined in great detail for regions very close to the crack tip. However, it is very difficult to separate in this region close to the crack tip numerical inaccuracies from real physical effects. In both cases, J^{ep} decreases if the integration path comes closer to the crack tip; an extrapolation results in $J_{\text{tip}}^{\text{ep}} \cong 0$. This agrees with an old theoretical work by Rice. While the decrease of J^{ep} for a stationary crack starts only at very small distances to the crack tip, the decrease for a growing crack starts already at much larger distances. The reason is that the singularity of the crack tip field is much weaker for a growing crack

than for a stationary crack. These results provide an explanation for the fact, which has been found by detailed experimental observations: Considered at the micro-scale, cracks in engineering materials do not grow continuously, but in discrete steps.

Further important points in the current thesis are the determination of the crack growth direction under mixed-mode loading conditions and the calculation of the crack driving force in inhomogeneous elastic-plastic materials with an interface near the crack tip. Detailed case studies show that in these cases J^{ep} and the conventional J -integral deliver nearly identical results, provided that we consider a stationary crack and the conditions of proportional loading are fulfilled.

Kurzfassung

Ein Riss in einem Bauteil breitet sich aus, wenn die risstreibende Kraft gleich groß oder größer ist als der Risswiderstand. Bereits seit den Anfängen der elastisch-plastischen Bruchmechanik wird ein Parameter gesucht, der die risstreibende Kraft beschreibt und allgemein anwendbar ist. Rice führte 1968 mit dem J -Integral einen solchen Parameter ein, der heute standardmäßig in der Bruchmechanik verwendet wird. Weil das J -Integral aber für nichtlinear-elastische Materialien abgeleitet wurde (d.h. für Deformationstheorie der Plastizität), ist dessen Anwendung für reale, elastisch-plastische Materialien mit starken Einschränkungen verbunden. Eine wichtige Einschränkung ist, dass das J -Integral nur angewendet werden darf, wenn im Material keine Entlastungsvorgänge (z.B. durch Risswachstum) stattfinden. Aber selbst dann beschreibt das J -Integral nicht mehr die Größe der risstreibenden Kraft, sondern nur die Intensität des Rissspitzenfeldes.

In einer Arbeit von Simha et al. gelang es vor kurzem mittels Anwendung des neuen Konzeptes der konfigurrellen Kräfte („Configurational Force Concept“), die risstreibende Kraft für elastisch-plastische Materialien mit inkrementeller Plastizitätstheorie herzuleiten. Dabei wurde ein neues J -Integral für elastisch-plastische Materialien, J^{ep} , gefunden, das die risstreibende Kraft in elastisch-plastischen Materialien quantifiziert.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften dieses neuen J -Integrals, J^{ep} , und mit den wesentlichen Unterschieden zum herkömmlichen J -Integral. Dazu werden numerische Studien durchgeführt, in denen die Verteilung der konfigurrellen Kräfte in Bruchmechanik-Proben berechnet wird. Die sich aus den konfigurrellen Kräften ergebenden Nah- und Fernfeld J -Integrale werden anschließend für beide Theorien ermittelt und miteinander verglichen. Bei diesen Untersuchungen werden verschiedene Parameter systematisch variiert, z.B. der Spannungszustand, die Probenbelastung, die Größe der plastischen Zone und die Dichte des FE-Netzes.

Dieses neue J -Integral, J^{ep} , kann im Gegensatz zum herkömmlichen J -Integral auch für monoton oder zyklisch wachsende Risse angewandt werden. Ein wesentlicher Punkt der Arbeit beschäftigt sich daher mit den Fragen nach der Größe der risstreibenden Kraft für stationäre und wachsende Risse in elastisch-plastischen Materialien. Zur Lösung dieser Fragen wird mit großem numerischem Aufwand die Wegabhängigkeit von J^{ep} im Bereich nahe der Rissspitze untersucht. Das Problem dabei ist, dass es in diesem Bereich sehr schwierig ist, numerische Ungenauigkeiten von realen physikalischen Effekten zu trennen. In beiden Fällen sinkt J^{ep} mit der Annäherung des Integrationspfades an die Rissspitze;

die Extrapolation auf die Rissspitze ergibt $J_{\text{tip}}^{\text{ep}} \cong 0$. Dieses Ergebnis bestätigt eine alte theoretische Arbeit von Rice. Während beim stationären Riss dieser Abfall erst bei sehr kleinen Distanzen innerhalb der Prozesszone beginnt, ist er beim wachsenden Riss langreichweitig, bedingt durch die schwächere Singularität des Rissspitzenfeldes. Diese Ergebnisse liefern eine Erklärung dafür, warum detaillierte experimentelle Untersuchungen der Mechanismen beim Risswachstum zeigen, dass Risse in technischen Werkstoffen, im mikroskopischen Maßstab betrachtet, nicht kontinuierlich wachsen sondern immer in diskreten Schritten.

Weitere wichtige Punkte in der Arbeit sind die Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung und die Berechnung der risstreibenden Kraft in einem inhomogenen elastisch-plastischen Material mit einem Riss in der Nähe einer Grenzfläche. Anhand von Parameterstudien wird gezeigt, dass J^{ep} und das herkömmliche J -Integral in diesen Fällen nahezu identische Resultate liefern, vorausgesetzt, dass stationäre Risse betrachtet werden und die Bedingungen der Proportionalbelastung erfüllt sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	5
2.1	Allgemeines	5
2.2	Konfiguration und Betrachtungsweisen	6
2.3	Kinematik	7
2.3.1	Deformation und Verzerrung	7
2.3.1.1	Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen	9
2.4	Kinetik	9
2.4.1	Spannungstensoren	10
2.5	Materialgleichungen	11
2.5.1	Elastizitätstheorie	12
2.5.1.1	Formänderungsenergiedichte	12
2.5.2	Plastizitätstheorie	13
2.5.2.1	Fließbedingung	14
2.5.2.2	Deformationstheorie der Plastizität	15
2.5.2.3	Inkrementelle Plastizitätstheorie	16
3	Grundlagen der Bruchmechanik	17
3.1	Allgemeines	17
3.2	Linear-elastische Bruchmechanik (LEBM)	18
3.2.1	Das Konzept der Spannungsintensität (K -Konzept)	19
3.2.1.1	Das Spannungs- und Verformungsfeld an der Rissspitze . .	20
3.2.2	Das Konzept der Energiebilanz	22
3.3	Kleinbereichsfließen	23
3.3.1	Der Risswiderstand	25
3.4	Elastisch-plastische Bruchmechanik (EPBM)	26

3.4.1	Das CTOD-Konzept	26
3.4.2	Das J -Integral	27
3.4.2.1	Das J -Integral als Energiefreisetzungsrate	27
3.4.2.2	Das J -Integral zur Beschreibung des Spannungs- und Verformungsfeldes	28
3.4.2.3	Das J -Integral als Gebietsintegral	30
3.4.2.4	Das J -Integral für elastisch-plastische Materialien	32
4	Das Configurational Force Concept	35
4.1	Allgemeines	35
4.2	Das Configurational Force Concept für inhomogene Materialien	36
4.3	Das Configurational Force Concept in der elastisch-plastischen Bruchmechanik	41
4.4	Implementierung des Configurational Force Concepts in ein Finite Elemente Programm	44
5	Motivation und Aufgabenstellung	49
6	Der stationäre Riss	51
6.1	Modellgeometrie und Materialdaten	52
6.2	Verteilung der Configurational Forces in der C(T) Probe	56
6.2.1	Ebener Dehnungszustand	56
6.2.2	Ebener Spannungszustand	60
6.3	Vergleich von J^{ve} und J^{nlel}	62
6.3.1	Ebener Dehnungszustand	62
6.3.2	Ebener Spannungszustand	64
6.4	Vergleich von J^{nlel} und J^{ep}	65
6.4.1	Ebener Dehnungszustand	65
6.4.1.1	Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)	65
6.4.1.2	Einfluss des Integrationspfades	71
6.4.2	Ebener Spannungszustand	73
6.4.2.1	Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)	73
6.4.2.2	Einfluss des Integrationspfades	77
6.5	J -Integrale für Pfade sehr nahe an der Risspitze	79
6.6	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse für den stationären Riss .	84

7	Der wachsende Riss	87
7.1	Modellbeschreibung	88
7.1.1	Geometrie, Belastung und Integrationsbereiche	88
7.1.2	Risswachstumssimulation	90
7.2	Verteilung der Configurational Forces in der C(T)-Probe bei Risswachstum	93
7.2.1	Ebener Dehnungszustand	93
7.2.2	Ebener Spannungszustand	99
7.3	Die risstreibende Kraft für wachsende Risse	100
7.3.1	Ebener Dehnungszustand	100
7.3.1.1	Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)	100
7.3.1.2	Einfluss des Integrationspfades	102
7.3.1.3	Einfluss der Elementgröße auf die risstreibende Kraft	112
7.3.2	Ebener Spannungszustand	116
7.3.2.1	Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)	116
7.3.2.2	Einfluss des Integrationspfades	117
7.3.2.3	Einfluss der Elementgröße auf die risstreibende Kraft	121
7.4	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse für den wachsenden Riss	123
8	Die Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode Belastung	127
8.1	Allgemeines	127
8.2	Kriterien zur Bestimmung der Risswachstumsrichtung	128
8.2.1	Kriterium der maximalen Tangentialspannung	128
8.2.2	Kriterium der maximalen Scherspannung	128
8.2.3	Kriterium der Energiefreisetzungsrate	129
8.2.4	Das J -Integral Kriterium	129
8.2.5	Das Configurational Force-Kriterium (CF-Kriterium)	130
8.3	Modelldaten	130
8.4	Ergebnisse	132
8.4.1	Risswachstumsrichtung in elastischen Materialien	132
8.4.2	Risswachstumsrichtung in elastisch-plastischen Materialien	137
8.5	Diskussion der Ergebnisse	143
9	Die risstreibende Kraft in inhomogenen Materialien	145
9.1	Allgemeines	145

9.2	Modelldaten	146
9.3	Ergebnisse	148
9.4	Diskussion der Ergebnisse	155
10	Zusammenfassung der Ergebnisse	157

Kapitel 1

Einleitung

Die Bruchmechanik spielt bei der Auslegung von Bauteilen eine immer größere Rolle, denn das Versagen von Bauteilen kann katastrophale Folgen für den Menschen oder die Umwelt haben. Daher ist es wichtig, bruchmechanische Parameter zu finden, die das Verhalten von Rissen in Werkstoffen beschreiben.

Für elastische Materialien gibt es im wesentlichen zwei Kriterien, welche die Eigenschaften und das Wachstum von bereits vorhandenen Rissen wiedergeben. Das Griffith-Kriterium [1], welches, ausgehend von einer Energiebilanz während des Risswachstums, besagt, dass ein Riss wächst, wenn die risstreibende Kraft gleich oder größer ist als der Risswiderstand, und das Kriterium der Spannungsintensität von Irwin [2], das davon ausgeht, dass ein Riss wächst, wenn eine kritische Spannungsintensität an der Rissspitze erreicht wird. Beide Konzepte beschreiben sehr gut das Verhalten von Rissen in spröden Werkstoffen und liefern identische Resultate für linear-elastische Materialien.

Für elastisch-plastische Materialien gibt es Erweiterungen dieser Kriterien, die jedoch nur solange angewendet werden können, solange die Ausdehnung der plastischen Zone klein ist gegenüber den Bauteilabmessungen. In diesem Fall wird angenommen, dass sich das Material elastisch verhält und die Kriterien der linear-elastischen Bruchmechanik zutreffen. Ist die plastische Verformung um die Rissspitze groß, kann man die Konzepte der linearen Bruchmechanik nicht mehr anwenden.

Es müssen neue Konzepte, welche die plastische Verformung des Materials berücksichtigen, eingeführt werden. Dies geschieht in der elastisch-plastischen Bruchmechanik, wo sich im wesentlichen drei Kriterien zur Ermittlung von bruchmechanischen Parametern durchgesetzt haben.

Das CTOD-Kriterium (Crack Tip Opening Displacement) von Cottrell und Wells [3], wel-

ches ein Maß für den Deformationszustand an der Risspitze ist, das J -Integral-Kriterium von Rice [4], welches als Spannungs- bzw. Verformungsintensitätsfaktors gebraucht wird, und im Fall eines nichtlinear-elastischen Materialverhaltens die risstreibende Kraft beschreibt sowie das Kriterium der Energiedissipationsrate von Turner und Kolednik [5, 6]. Bei all diesen Kriterien treten jedoch Schwierigkeiten bei der generellen Anwendung auf. Der CTOD-Wert ist experimentell sehr schwierig zu bestimmen und benötigt sehr zeitaufwendige Untersuchungen [7]. Die Energiedissipationsrate ist sehr stark von der Probengeometrie abhängig und nicht auf beliebige Bauteilabmessungen übertragbar [8]. Das J -Integral Konzept ist nur für ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten definiert und somit prinzipiell nicht für ein elastisch-plastisches Material geeignet. Solange die Belastung proportional ist, spielt dies keine Rolle. Sobald es jedoch zu Entlastungsvorgängen im Material kommt, kann das J -Integral formal nicht mehr angewendet werden. Dieses Problem ist bereits seit über 40 Jahren bekannt, wurde jedoch, bis jetzt noch nicht gelöst. Daher verwendet man weiterhin das J -Integral zur Beschreibung der risstreibenden Kraft in elastisch-plastischen Materialien, wobei man J so anwendet, wie für ein nichtlinear-elastisches Material. Das Problem dabei ist, dass keine eindeutige Aussage über die wirkliche Größe der risstreibenden Kraft getroffen werden kann.

Im Laufe der Jahre wurden verschiedene Erweiterungen des J -Integrals veröffentlicht [9–16], die dieses Problem lösen sollten. Die physikalische Bedeutung dieser erweiterten J -Integrale ist allerdings unklar. Sie gehen vor allem nicht von einer thermodynamischen Formulierung aus sondern sind ad hoc Ansätze. In den Arbeiten von Simha et al. [17] und Moran und Shih [13] werden einige dieser erweiterten J -Integrale beschrieben und ihre physikalische Bedeutung diskutiert.

Ein weiterer Ansatz zu Beschreibung der bruchmechanischen Parameter, sowohl in der linear-elastischen als auch in der elastisch-plastischen Bruchmechanik könnte das Configurational Force Concept sein. Dieses thermodynamische basierte Konzept, welches von Eshelby [18, 19] 1951 eingeführt wurde, geht davon aus, dass auf alle Arten von Defekten treibende Kräfte wirken.

In Simha et al. [17] wurde dieses Konzept verwendet, um die treibende Kraft auf einen Riss in einem elastisch-plastischen Material, zu bestimmen. Dabei wurde der Unterschied zwischen dem J -Integral bei nichtlinear-elastischen Materialverhalten und dem J -Integral bei elastisch-plastischen Materialverhalten hergeleitet. Es wurde gezeigt, dass das J -Integral, unter Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie, gleichbedeutend ist mit der skalaren risstreibenden Kraft an der Risspitze in einem elastisch-plastischen Material. Dieses

Konzept ist sowohl für elastische als auch für plastische Materialien geeignet und stellt damit eine Verallgemeinerung des J -Integral Konzepts dar.

Die vorliegende Arbeit baut auf der Arbeit von Simha et al. [17] auf und beschäftigt sich mit der Anwendung des Configurational Force Concepts in der elastisch-plastischen Bruchmechanik. Dabei soll anhand numerischer Untersuchungen der Unterschied zwischen dem herkömmlichen J -Integral und dem neuen J -Integral nach Simha et al. [17] herausgearbeitet werden. Dafür wurden unterschiedliche numerische Modelle erstellt, in denen verschiedene Parameter, wie etwa die Belastungsbedingungen, die Netzdichte, die Materialeigenschaften usw., verändert wurden.

In den Kapiteln 6, 7, 8 und 9 sind die Ergebnisse der Arbeit dargestellt. Am Ende der jeweiligen Kapitel werden die Ergebnisse kurz diskutiert. Zunächst sollen jedoch die theoretischen Grundlagen, welche für die weitere Arbeit maßgeblich sind, in den Kapiteln 2, 3 und 4 kurz zusammengefasst werden. Anschließend wird in Kapitel 5 die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit definiert. In Kapitel 10 werden die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammengefasst.

Kapitel 2

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

2.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik kurz wiederholt. Dabei soll nur auf die Bereiche eingegangen werden, die für die weitere Arbeit wichtig sind. Eine ausführliche Einführung in die Kontinuumsmechanik kann man in zahlreichen Lehrbüchern finden. Als Grundlage für diese kurze Zusammenfassung dienen die Bücher von Parisch [20], Becker [21], Gross [22], Altenbach [23] und Fung [24] sowie die Kontinuumsmechanik Vorlesung der Technischen Universität Dresden [25].

Die Kontinuumsmechanik beschreibt mittels idealisierter mathematischer Modelle das makroskopische mechanische Verhalten der Materie unter Einwirkung äußerer Kräfte. Dabei wird angenommen, dass die Materie in einem Körper gleichmäßig verteilt ist, wodurch der atomistische Aufbau eines realen Körpers vernachlässigt wird. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass trotz der Missachtung der Feinstruktur der Werkstoffe gute Vorhersagen für die mechanischen Belastungen von Bauteilen getroffen werden können.

Als Körper \mathcal{B} wird eine zusammenhängende kompakte Menge materieller Punkte bezeichnet, die durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ des Körpers begrenzt wird. Den materiellen Punkten werden bestimmte physikalische Größen, wie Verschiebungen oder Spannungen, zugeordnet. Zur Beschreibung der Lage und Bewegung der materiellen Punkte benötigt man ein Bezugssystem. In dieser Arbeit beziehen sich alle materiellen Punkte auf ein kartesisches Koordinatensystem.

Die Kontinuumsmechanik wird allgemein in zwei Gebiete eingeteilt. Das Erste umfasst alle

materialunabhängigen Aussagen und gilt gleichermaßen für alle Festkörper, Flüssigkeiten und Gase. In dieses Gebiet fallen die kinematischen Beziehungen und die Bilanzgleichungen. Zum zweiten Gebiet gehören alle Aussagen, die das materialabhängige Verhalten des Kontinuums beschreiben, wobei zwischen den Materialien unterschieden wird.

2.2 Konfiguration und Betrachtungsweisen

Die Bewegung eines Körpers kann als zeitliche Abfolge unterschiedlicher Konfigurationen angesehen werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper im Ausgangszustand (Volumen V , Oberfläche A) bzw. in der Referenzkonfiguration. Dabei wird ein Materialpunkt durch den Ortsvektor, \mathbf{X} , eindeutig identifiziert (Abbildung 2.1). Dieser ändert sich nicht mit der Bewegung und ist daher zeitunabhängig. Zum Zeitpunkt $t > 0$ befindet sich der Körper in der Momentankonfiguration (Volumen v , Oberfläche a) und die momentane Lage des Punktes im Raum wird durch den Ortsvektor, \mathbf{x} , angegeben.

Die Bewegung eines Körpers ist dann vollständig definiert, wenn die Lage jedes materiellen Teilchens zu jedem Zeitpunkt angegeben werden kann,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Aufgrund der Undurchdringlichkeit der Materie muss Gleichung (2.1) eindeutig umkehrbar sein,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t). \quad (2.2)$$

Gleichung (2.2) gib damit an, welches materielle Teilchen sich an einem vorgegebenen Raumpunkt zur Zeit t befindet. In der Kontinuumsmechanik unterscheidet man zwischen Materialpunkt \mathbf{X} und Raumpunkt \mathbf{x} , wobei der Materialpunkt einen Massenpunkt oder ein Teilchen des Körpers \mathcal{B} und der Raumpunkt einen festen Punkt im Raum bezeichnet. Bezieht man die kontinuumsmechanischen Größen wie Verschiebung, Verzerrung oder Spannung auf die Referenzkonfiguration, spricht man im allgemeinen von der „Lagrange-schen“ oder materiellen Betrachtungsweise. Werden diese Größen auf die Momentankonfiguration bezogen, spricht man von der „Eulerschen“ oder räumlichen Betrachtungsweise.

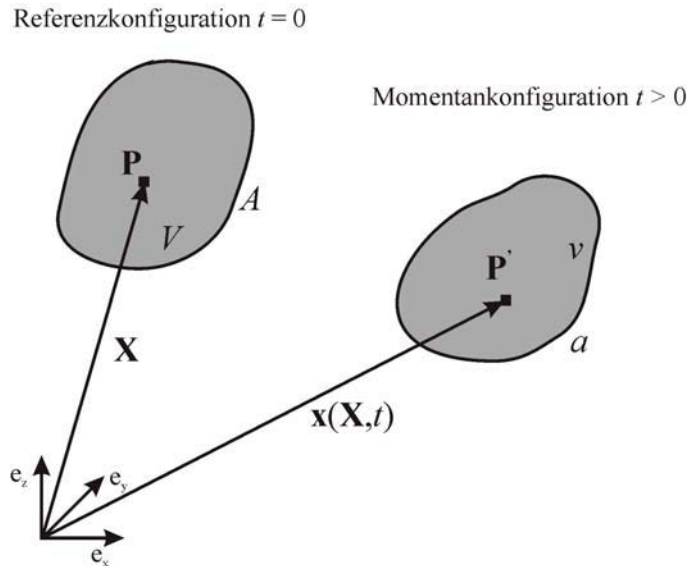


Abbildung 2.1: Unterschiedliche Konfigurationen eines Körpers [25]

2.3 Kinematik

2.3.1 Deformation und Verzerrung

Die Bewegung eines Körpers setzt sich aus der „Starrkörperbewegung“ (Translation und Rotation) und der Deformation des Körpers zusammen. Wird von der Gesamtbewegung die „Starrkörperbewegung“ abgezogen, spricht man von Deformationen. Die zugehörigen Deformationen geben also an, wie sich die Längen und Winkel zwischen den materiellen Punkten verändern. In Abbildung 2.2 ist ein materieller Punkt, P , in der Referenzkonfiguration und in der Momentankonfiguration, P' , dargestellt. Das materielle Linienelement $d\mathbf{X}$ des Referenzzustandes geht über in $d\mathbf{x}$ im Momentanzustand. Die Umrechnung zwischen dem Referenzzustand und dem Momentanzustand erfolgt mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} ,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} . \quad (2.3)$$

Der Deformationsgradient beinhaltet sowohl die Längenänderung als auch die Drehung des Linienelements beim Übergang von der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration. Da eine Starrkörperrotation des materiellen Teilchens nicht zu einer Verzerrung führt, muss man den Deformationsgradienten in einen translatorischen und einen rotatorischen Anteil zerlegen, um die Verzerrungen berechnen zu können. Dazu gibt es die

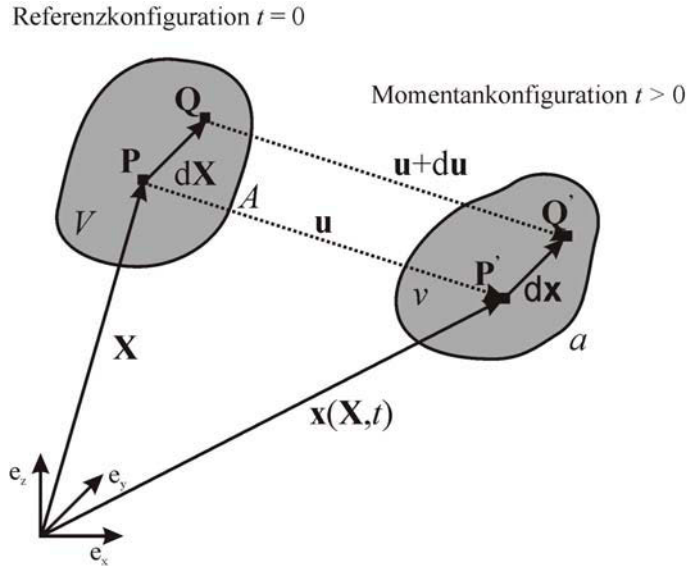


Abbildung 2.2: Materielle Linienelemente im Ausgangs- und Momentanzustand [25]

beiden Möglichkeiten,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} . \quad (2.4)$$

Dabei ist \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor, der eine Starrkörperrotation des materiellen Teilchens bewirkt. Die beiden Deformationstensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} beschreiben die Längenänderung des Linienelements $d\mathbf{X}$ und werden als rechter Strecktensor, \mathbf{U} , bzw. als linker Strecktensor, \mathbf{V} , bezeichnet. Gleichung (2.4) kann so interpretiert werden, dass der Materialpunkt zuerst gedreht und danach in die momentane Position gestreckt wird oder, dass er zuerst in der Ausgangslage gestreckt und danach starr in die Momentanlage gedreht wird. Daher bezieht sich \mathbf{U} auf die Ausgangskonfiguration und \mathbf{V} auf die Momentankonfiguration. Eine weitere Möglichkeit, die Deformationstensoren aus dem Deformationsgradienten abzuleiten, besteht in der Einführung von symmetrischen Tensoren,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 , \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei \mathbf{G} als „Rechts-Cauchy-Green-Deformationstensor“ und \mathbf{B} als „Links-Cauchy-Green-Deformationstensor“ bezeichnet wird.

Der auf die Ausgangskonfiguration bezogene „Lagrangesche“ Verzerrungstensor \mathbf{E} und der auf die Momentankonfiguration bezogene „Eulersche“ Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ ergeben sich zu,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{I} den Einheitstensor. Die beiden Verzerrungstensoren können wiederum ineinander umgerechnet werden,

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{F} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}.\quad (2.7)$$

2.3.1.1 Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

Der Deformationsgradient und die Verzerrungen können auch direkt aus den Verschiebungen berechnet werden. Dabei ergeben sich die Linienelemente $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ in Abbildung 2.2 aus der Verschiebung $d\mathbf{u}$ als

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{u} \quad d\mathbf{X} = d\mathbf{x} - d\mathbf{u},\quad (2.8)$$

und man erhält den Deformationsgradient zu,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}.\quad (2.9)$$

Setzt man für den Deformationsgradienten die Beziehung aus Gleichung (2.9) in die Gleichung (2.6) ein, erhält man die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung in der Form,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Der Verzerrungstensor besteht dabei aus zwei Teilen. Der erste Anteil ist identisch mit dem Dehnungstensor aus der linearen Elastizitätstheorie. Der zweite Term besteht aus den Quadraten der Verschiebungsgradienten und kann bei kleinen Verformungen meist vernachlässigt werden.

2.4 Kinetik

Die an einen Körper angreifenden äußeren Kräfte bewirken eine Verformung des Körpers und rufen innere Kräfte hervor. Die Aufgabe der Kinetik ist es, die Ursache für die Ver-

formungen zu beschreiben. Sie beschreibt also das Antwortverhalten des Körpers auf die äußeren, auf den Körper einwirkenden, Kräfte.

2.4.1 Spannungstensoren

Die äußeren Kräfte sind stetig bzw. stückweise stetig verteilte Funktionen im Volumen oder an der Oberfläche eines Körpers und werden in äußere Körperkräfte (Volumskräfte) $d\mathbf{F}_x$ und in äußere Oberflächenkräfte $d\mathbf{s}_x$ eingeteilt. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ergibt sich dann aus dem Integral der äußeren Kräfte über das Volumen und die Oberfläche zu

$$\mathbf{F}_a = \int_A d\mathbf{s}_x + \int_V d\mathbf{F}_x, \quad (2.11)$$

und das resultierende äußere Moment zu

$$\mathbf{M}_a = \int_A \mathbf{x} \times d\mathbf{s}_x + \int_V \mathbf{x} \times d\mathbf{F}_x. \quad (2.12)$$

Dabei ist $d\mathbf{s}_x$ der differentielle Schnittkraftvektor, der wiederum in der Referenzkonfiguration als auch in der Momentankonfiguration angegeben werden kann,

$$d\mathbf{S}_x = \boldsymbol{\tau} dA \quad d\mathbf{s}_x = \mathbf{t} da. \quad (2.13)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\tau}$ bzw. \mathbf{t} heißt Traction Vector (Kraftflussvektor) und hat die Richtung der resultierenden Schnittkräfte. Er hängt also vom Normaleneinheitsvektor \mathbf{N} bzw. \mathbf{n} und damit von der Orientierung der Schnittfläche ab. Der Schnittkraftvektor $d\mathbf{s}_x$ aus der „Eulerschen“ Beschreibung kann mit dem Deformationsgradienten wieder in den Schnittkraftvektor $d\mathbf{S}_x$ aus der „Lagrangeschen“ Beschreibung übergeführt werden,

$$d\mathbf{S}_x = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{s}_x. \quad (2.14)$$

Einen Zusammenhang zwischen den inneren Kräften und den Oberflächenkräften erhält man durch die Spannungstensoren,

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_x &= \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dA \\ d\mathbf{S}_x &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchyschen oder wahren Spannungstensor, \mathbf{S} den 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor und \mathbf{T} den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor. Der Cauchy-

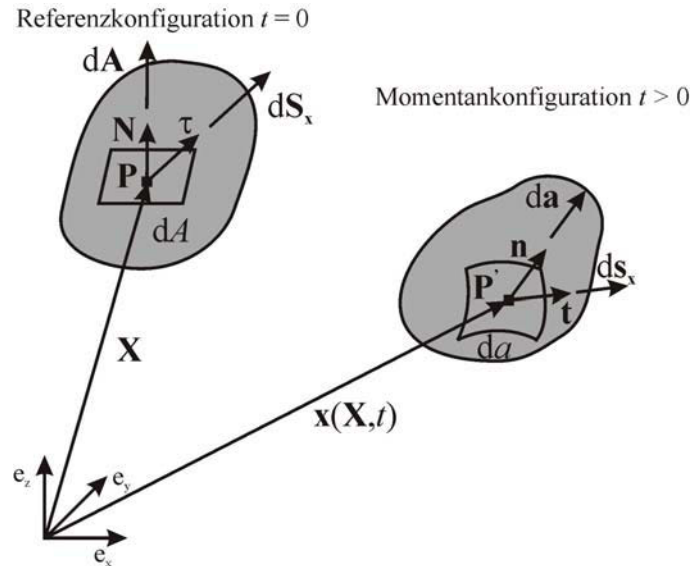


Abbildung 2.3: Schnittkräfte und Spannungsvektoren [25]

Spannungstensor bezieht sich als wahrer Spannungstensor auf die Momentankonfiguration und wird daher bei der „Eulerschen“ Beschreibung verwendet. Bezieht man den wahren Schnittkraftvektor auf das unverformte Flächenelement dA der Ausgangskonfiguration, erhält man den 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor. Dieser hat eine unsymmetrische Koordinatenmatrix. Verwendet man den Schnittkraftvektor der Ausgangskonfiguration, erhält man den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

Zwischen den Spannungstensoren bestehen die Zusammenhänge:

$$\mathbf{S} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T \quad \mathbf{T} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.16)$$

Häufig ist es sinnvoll, den Spannungstensor in zwei Komponenten zu zerlegen,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s}. \quad (2.17)$$

Darin beschreibt der erste Anteil den hydrostatischen Spannungszustand und der Tensor \mathbf{s} , der als Deviator bezeichnet wird, beschreibt die Abweichung des Spannungszustandes vom hydrostatischen Zustand.

2.5 Materialgleichungen

Die Kinematik, die Kinetik und die Bilanzgleichungen reichen im allgemeinen nicht aus, um das Verhalten eines Körpers vollständig zu beschreiben. Daher müssen Aussagen über das Materialverhalten getroffen werden. Dies erfolgt mit den Materialgleichungen bzw. den

Konstitutivgleichungen. Dabei unterscheidet man in der Festkörperkontinuumsmechanik zwischen zwei grundlegenden Materialklassen, den elastischen Materialien und den plastischen Materialien.

2.5.1 Elastizitätstheorie

Ein Material heißt elastisch, wenn der Spannungszustand alleine vom momentanen Deformationszustand und nicht von der Deformationsgeschichte abhängt [20]. Das heißt also, das Material geht nach Rücknahme der Belastung wieder in seinen ursprünglichen unverformten Zustand über. Der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen in einem Material ergibt sich dabei aus dem verallgemeinerten „Hookeschen“ Gesetz,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_{\text{el}} : \boldsymbol{\epsilon} . \quad (2.18)$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}$ den Spannungstensor, $\boldsymbol{\epsilon}$ den Dehnungstensor nach Gleichung (2.10) für kleine Verformungen und \mathbf{E}_{el} den Elastizitätstensor vierter Stufe. Der Elastizitätstensor ist symmetrisch und charakterisiert mit seinen Komponenten die elastischen Eigenschaften des Materials. In allgemeinen Fall einer Anisotropie besteht \mathbf{E}_{el} aus maximal 21 voneinander unabhängigen Konstanten. Im Falle eines isotropen Materials reduzieren sich die 21 Konstanten auf nur 2 unabhängige Größen. Damit erhält man aus Gleichung (2.18) das Elastizitätsgesetz [22],

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I} \text{Spur}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} , \quad (2.19)$$

worin λ und μ die Laméschen Konstanten sind. Ersetzt man die Laméschen Konstanten durch den Elastizitätsmodul, E , und die Querkontraktionszahl, ν , erhält man nach Umformung die Dehnungen zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \mathbf{I} \text{Spur}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.20)$$

2.5.1.1 Formänderungsenergiedichte

Die bei einer Deformation pro Volumseinheit geleistete Arbeit wird als Formänderungsenergiedichte bezeichnet und ergibt sich unter der Voraussetzung, dass keine Eigendehnungen auftreten, als

$$\phi = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\epsilon} . \quad (2.21)$$

Bei einem elastischen Material ist ϕ unabhängig vom Deformationsweg. Im Spezialfall des linear elastischen Materials ergibt sich die Formänderungsenergiedichte zu,

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{E}_{\text{el}} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.22)$$

wobei sich, $\phi = \phi_V + \phi_G$, in zwei Teile aufspalten lässt. ϕ_V bezeichnet den Energieanteil infolge reiner Volumsänderung (Volumsänderungsenergiedichte) und ϕ_G bezeichnet den Energieanteil infolge reiner Gestaltsänderung (Gestaltsänderungsenergiedichte).

2.5.2 Plastizitätstheorie

Beim Erreichen einer kritischen Dehnung (Proportionalitätsgrenze) beginnen sich viele Material plastisch zu verformen. Dabei dissipiert die geleistete Verformungsarbeit fast vollständig und geht in Wärmeenergie über. Plastische Verformungen sind somit wegbabhängige, irreversible Zustandsänderungen, und das „Hookesche Gesetz“ kann nicht mehr angewendet werden. Es wird angenommen, dass sich die Verzerrungen und auch die Verzerrungsinkremente aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammensetzen,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{el}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}} \quad d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^{\text{el}} + d\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}}. \quad (2.23)$$

Auch der Deformationsgradient kann, ausgehend von der Annahme, dass der elastischen Verformung eine plastische Verformung folgt, multiplikativ in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden [20],

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{e}} \mathbf{F}^{\text{p}}. \quad (2.24)$$

Für die Beschreibung des elastischen Anteils dient die Elastizitätstheorie (siehe Kapitel 2.5.1). Zur Beschreibung des plastischen Anteils können zwei unterschiedliche Theorien verwendet werden. Bezieht man die Stoffgesetze auf die Verzerrungsinkremente, spricht man von der inkrementellen Theorie (inkrementelle Plastizitätstheorie). Werden die Stoffgesetze auf die totalen Verzerrungen bezogen, spricht man von der Deformationstheorie der Plastizität. Beide gehen davon aus, dass keine plastischen Volumsänderungen auftreten.

2.5.2.1 Fließbedingung

Wie bereits erwähnt, beginnt sich ein Material plastisch zu verformen, wenn eine kritische Dehnung bzw. eine kritische Spannung überschritten wird. Daraus kann man eine Fließbedingung definieren, die durch den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ gegeben ist,

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (2.25)$$

Bei einem isotropen Material hängt die Fließbedingung nur von den Invarianten $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$, des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bzw. von den Invarianten, I_s, II_s, III_s , des Deviators \mathbf{s} ab [22]. Unter Berücksichtigung, dass der hydrostatische Anteil des Spannungszustandes nur zu elastischen Volumsänderungen führt, ergibt sich die Fließbedingung nach „von Mises“,

$$F = II_s - k^2. \quad (2.26)$$

Demnach tritt Fließen ein, wenn II_s einen kritischen Wert k^2 erreicht. Bei einem idealplastischen Material ist k konstant und ergibt sich aus der Fließspannung σ_Y und der Fließschubspannung τ_Y zu $k = \sigma_Y/\sqrt{3}$. Stellt man die Fließbedingung im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen dar, erhält man einen Zylinder mit unendlicher Länge (siehe Abbildung 2.4). Die Mittelachse des Zylinders fällt mit der hydrostatischen Gerade zusammen, und der Radius des Zylinders beträgt $\sqrt{2}k$. Ist das Material nicht idealplastisch, verändert die Fließfläche ihre Lage oder ihre Form im Verlauf des Fließvorganges. Handelt es sich bei der Formänderung um eine selbstähnliche Aufblähung,

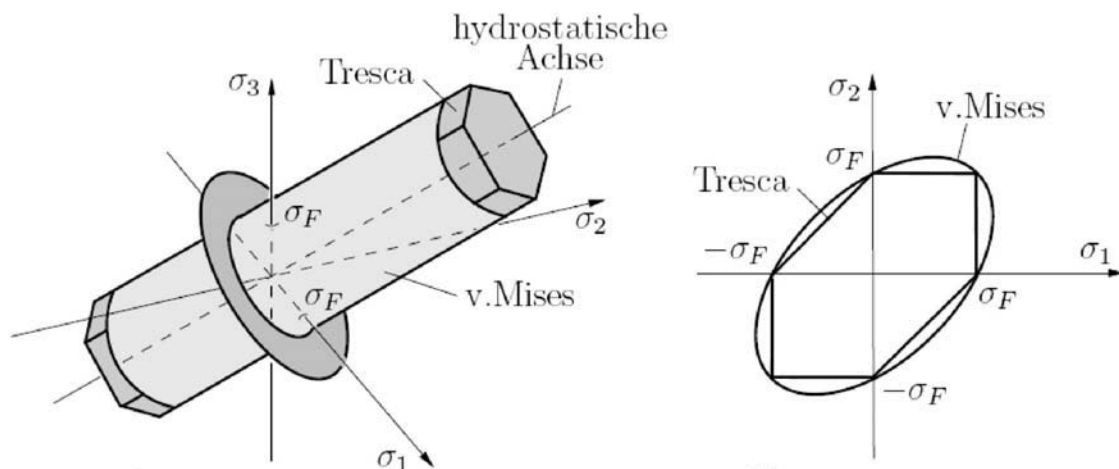


Abbildung 2.4: Fließbedingung nach von Mises und Tresca [22]

spricht man von isotroper Verfestigung. Ändert sich die Lage der Fließfläche rein durch eine Verschiebung, spricht man von kinematischer Verfestigung.

Liegen die Spannungszustände innerhalb des Zylinders, verformt sich das Material nur elastisch. Plastische Verformung tritt ein, sobald die Spannungszustände auf der Mantelfläche des Zylinders liegen.

Ein anderes, für metallische Werkstoffe häufig eingesetztes Fließkriterium, ist das Kriterium nach Tresca (siehe Abbildung 2.4). Plastifizierung tritt ein, sobald die größte Schubspannung einen kritischen Wert überschreitet. Die Fließfläche nach dem Tresca-Kriterium ergibt im Hauptspannungsraum ein hexagonales Prisma, dessen Mittelachse die hydrostatische Gerade ist. Bei einem Schnitt senkrecht zur Raumdiagonale umfasst der von Mises Zylinder das Tresca Sechseck, dessen Eckpunkte den Zylinder berühren.

2.5.2.2 Deformationstheorie der Plastizität

Die Deformationstheorie der Plastizität nimmt an, dass die plastischen Dehnungen proportional zu den deviatorischen Spannungen sind,

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}} = \beta \mathbf{s}. \quad (2.27)$$

Der Faktor β hängt dabei vom Spannungszustand und von den plastischen Dehnungen ab. Nach der von Mises Fließtheorie ergibt sich β aus der Vergleichsspannung σ_V und der plastischen Vergleichsdehnung ϵ_V^{pl} zu,

$$\beta = \frac{3 \epsilon_V^{\text{pl}}}{2 \sigma_V}. \quad (2.28)$$

Fasst man nach Gleichung (2.23) die elastischen und plastischen Dehnungen zusammen, kommt man auf das „Hencky-Ilyushin-Gesetz“,

$$\mathbf{e} = \left[\frac{1}{2\mu} + \frac{3\epsilon_V^{\text{pl}}}{2\sigma_V} \right] \mathbf{s}, \quad (2.29)$$

wobei \mathbf{e} die deviatorischen Dehnungen bezeichnet.

Die Deformationstheorie behandelt also ein elastisch-plastisches Material als wäre es nichtlinear-elastisch. Das heißt, dass die Vorgeschichte bei der Verformung keinen Einfluss auf den Spannungszustand hat. Daher ist diese Theorie nicht in der Lage, das reale plastische Materialverhalten bei Entlastungsvorgängen zu beschreiben. Bei einer reinen proportionalen Belastung kann das plastische Stoffverhalten jedoch durch das Potenzge-

setz

$$\epsilon = B\sigma^n, \quad (2.30)$$

sehr gut angenähert werden. Darin sind B und n Materialkonstanten.

2.5.2.3 Inkrementelle Plastizitätstheorie

In der inkrementellen Plastizitätstheorie ist das Inkrement der plastischen Dehnung proportional zu den deviatorischen Spannungen. Legt man die Fließtheorie nach „von Mises“ zugrunde, folgt

$$d\epsilon^{\text{pl}} = d\beta \mathbf{s}. \quad (2.31)$$

Der Faktor $d\beta$ ergibt sich aus der einachsigen Vergleichsspannung σ_V und dem Vergleichsdehnungsinkrement $d\epsilon_V^{\text{pl}}$ zu

$$d\beta = \frac{3 d\epsilon_V^{\text{pl}}}{2 \sigma_V}. \quad (2.32)$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen den plastischen Dehnungen und den deviatorischen Spannungen zu

$$d\epsilon^{\text{pl}} = \frac{3 d\epsilon_V^{\text{pl}}}{2 \sigma_V} \mathbf{s} \quad (2.33)$$

Die inkrementelle Plastizitätstheorie berücksichtigt also die bleibende plastische Verformung eines Materials und beschreibt daher das plastische Materialverhalten auch im entlasteten Zustand.

Kapitel 3

Grundlagen der Bruchmechanik

3.1 Allgemeines

Dieses Kapitel soll nur einen kurzen Einblick in das komplexe Gebiet der Bruchmechanik geben. Eine ausführliche Zusammenfassung findet man in zahlreichen Lehrbüchern und insbesondere in den Büchern von Gross [22], Hertzberg [26], Blumenauer [27] und Anderson [28], welche auch als Grundlage dieser Wiederholung dienen. Des Weiteren soll die numerische Implementierung des J -Integrals in einem Finite Elemente Programm kurz beschrieben werden. Auch hierzu gibt es zahlreiche Lehrbücher und Veröffentlichungen [28–31], weshalb nur kurz darauf eingegangen wird.

Die Bruchmechanik ist eine relativ junge Disziplin der Mechanik, die erst Anfang des 20. Jahrhunderts mit den Arbeiten von A. A. Griffith [1] entstanden ist. Sie befasst sich mit den Bruch- und Versagenshypothesen in technischen Konstruktionselementen. Dabei geht sie, anders als die klassische Festigkeitslehre, nicht vom einem defektfreien Kontinuum aus sondern von bereits vorgeschädigten Bauteilen. Diese Defekte entstehen entweder direkt bei der Herstellung der Materialien (Anrisse, Poren, Materialinhomogenitäten usw.), oder werden durch mechanische, thermische oder korrosive Betriebsbelastungen gebildet. Durch das Einwirken von äußeren Kräften wachsen diese Defekte zu makroskopischen Rissen und können in weiterer Folge zum Versagen des Bauteils führen. Grundsätzlich kann man den Versagensvorgang eines festen Körpers einteilen in die Rissentstehung und in das Risswachstum. Die Rissentstehung ist dabei ein lokales mikroskopisches Ereignis und hängt sehr stark von der Mikrostruktur des Werkstoffs ab. Für die Klärung der Mechanismen der Rissentstehung ist im Allgemeinen nicht die Bruchmechanik sondern die Werkstoffkunde zuständig. Die Bruchmechanik beschäftigt sich mit der Beschreibung

des Rissverhaltens unter Einwirkung von äußeren Beanspruchungen und verwendet dafür Konzepte der Kontinuumsmechanik.

Man unterscheidet im Allgemeinen zwischen der linearen und der nichtlinearen Bruchmechanik, wobei sich die angewendeten Konzepte teilweise ineinander überführen lassen. In beiden Bereichen können die vor der Rissspitze herrschenden Spannungs- und Verformungsfelder durch einen einzigen Parameter beschrieben werden. In der linear-elastischen Bruchmechanik ist dies der Spannungsintensitätsfaktor K und in der nichtlinear-elastischen oder elastisch-plastischen Bruchmechanik das J -Integral.

3.2 Linear-elastische Bruchmechanik (LEBM)

Die LEBM liefert Konzepte zur Beschreibung des Rissverhaltens in ideal-spröden Werkstoffen. Dabei wird angenommen, dass sich das Material weitgehend linear-elastisch verhält, das für viele Keramiken, aber auch für einige Metalle bei tiefen Temperaturen, zutrifft. Der Riss wird als mathematischer Schnitt in einem Körper mit einer unendlich scharfen Rissspitze aufgefasst (Kerbausrundungsradius $\rho = 0$). Seine einander gegenüberliegenden Be-
randungen werden als Rissflanken oder Rissufer bezeichnet. Bei der Verformung eines Risses unterscheidet man grundsätzlich zwischen drei voneinander unabhängigen Bewegungen der Rissflanken zueinander. Diese werden Rissöffnungsarten oder Rissöffnungsmoden genannt und sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Mode I: Der Riss öffnet sich senkrecht zur Rissebene.

Mode II: Die Rissufer verschieben sich in ihrer Ebene senkrecht zur Rissfront.

Mode III: Die Rissufer verschieben sich in ihrer Ebene parallel zur Rissfront.

Eine beliebige Verformung des Risses kann als Kombination dieser drei grundlegenden Moden angesehen werden und wird als Mixed-Mode-Beanspruchung (kombinierte Beanspruchung) bezeichnet. Die grundlegenden Beziehungen der LEBM können sowohl durch die Analyse der Spannungsverteilung an der Rissspitze als auch durch die Energiebilanz bei der Rissausbreitung abgeleitet werden. Man unterscheidet daher zwischen dem Konzept der Spannungsintensität und dem Konzept der Energiebilanz.

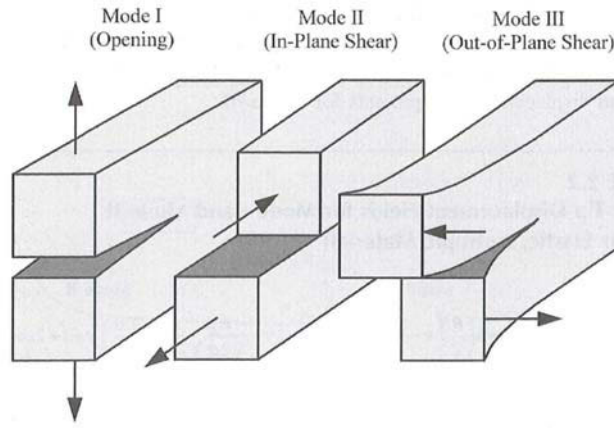


Abbildung 3.1: Definition der drei Rissöffnungsarten [28]

3.2.1 Das Konzept der Spannungsintensität (K -Konzept)

Der Spannungsintensitätsfaktor, K , wird wie die Spannung als Zustandsgröße behandelt und ist ein Maß für die Intensität des Spannungsfeldes im Rissspitzenbereich. Bei Verwendung geeigneter Rissmodelle kann die Spannungsverteilung in der Umgebung der Risspitze mit kontinuumsmechanischen Mitteln exakt beschrieben werden. Dabei ergeben sich Reihenentwicklungen für die Rissspitzen Spannungsfelder. Berücksichtigt man nur das erste Reihenglied, ergibt sich das Spannungsfeld um die Risspitze zu

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{ K_{\text{I}} f_{ij}^{\text{I}}(\theta) + K_{\text{II}} f_{ij}^{\text{II}}(\theta) + K_{\text{III}} f_{ij}^{\text{III}}(\theta) \} \quad \text{mit } i, j = x, y, z. \quad (3.1)$$

Hierbei beschreibt σ_{ij} die Spannungen in einem durch die Polarkoordinaten r und θ festgelegten Volumenelement vor der Risspitze (siehe Abbildung 3.2). Die Funktion f_{ij} ist eine dimensionslose Größe und nur vom Winkel θ abhängig. Der Spannungsintensitätsfaktor K ist eine skalare Größe und von der Bauteilbelastung und -form sowie von der Geometrie des Risses abhängig. Die römischen Ziffern bezeichnen dabei die unterschiedlichen Belastungs-Moden. Der Spannungsintensitätsfaktor K kann mittels

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} Y \quad (3.2)$$

berechnet werden. Der dimensionslose Faktor Y wird als Geometriefaktor bezeichnet und hängt von der Probengeometrie und vom Probentyp ab. Für eine unendlich große Platte mit einem Innenriss der Länge $2a$ ist $Y = 1$. Erreicht der Spannungsintensitätsfaktor einen kritischen Wert K_C , kommt es zu Rissausbreitung

$$K \geq K_C. \quad (3.3)$$

Die kritischen Werte K_{IC} , K_{IIC} und K_{IIIC} werden als Bruchzähigkeit bezeichnet und sind

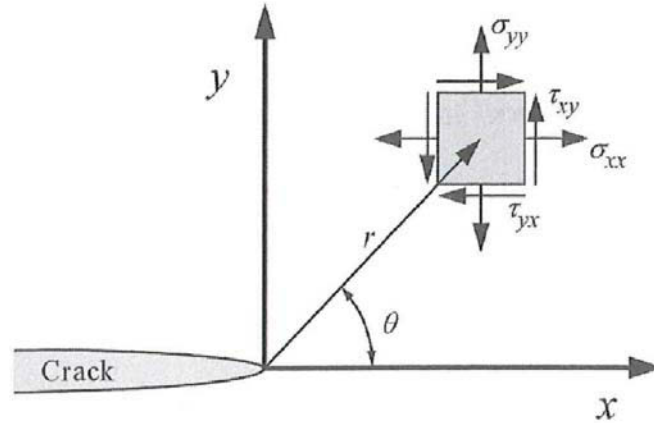


Abbildung 3.2: Spannungen in der Nähe der Risspitze für ein elastisches Material [28]

vom Werkstoff abhängig. In den meisten Fällen ist die Mode I Belastung die kritischste Belastung für das Bauteil. Daher werden meist nur die K_{IC} -Werte in genormten Versuchen, wie zum Beispiel nach ASTM-Standard E399-09E1, ermittelt. Auf die experimentelle Bestimmung der Bruchzähigkeit soll hier aber nicht näher eingegangen werden.

3.2.1.1 Das Spannungs- und Verformungsfeld an der Risspitze

Wie bereits erwähnt, werden die Spannungs- und Verformungsfelder in der Umgebung der Risspitze durch den Spannungsintensitätsfaktor bestimmt. Für den Fall einer Mode I-Belastung erhält man aus Gleichung (3.1) die Spannungs- und Verformungsfelder um die Risspitze, [22], als

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{für ESZ} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{für EDZ} \end{cases}, \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos(\theta)) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

sowie für Mode II-Belastung,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{zz} &= \begin{cases} 0 \text{ für ESZ} \\ \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ für EDZ} \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\kappa + 2 + \cos(\theta)] \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [\kappa - 2 + \cos(\theta)] \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

und Mode III-Belastung,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.9)$$

Der Parameter κ beträgt $\kappa = 3 - 4\nu$ für den ebenen Dehnungszustand (EDZ) und $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ für den ebenen Spannungszustand (ESZ). G bezeichnet den Schubmodul und ν die Querkontraktionszahl des Materials.

Aufgrund der Vernachlässigung höherer Terme bei der Reihenentwicklung gelten die Gleichungen (3.4) bis (3.9) nur in unmittelbarer Nähe der Rissspitze („Nahfeldlösung“). Nach Gleichung (3.1) nehmen die Spannungen bei kleiner werdendem Abstand zur Rissspitze zu und erreichen für $r \rightarrow 0$ einen unendlich hohen Wert. Sie besitzen also eine $1/\sqrt{r}$ -Singularität. Weiter weg von der Rissspitze dominieren die sogenannten „nicht singulären Terme“, welche hauptsächlich von der Probengeometrie und der Belastungssituation abhängig sind. Für die Prozesse nahe an der Rissspitze haben sie keine Bedeutung.

Für den Risspfad sind diese Terme jedoch sehr wichtig, denn sie beeinflussen die Risswachstumsrichtung.

3.2.2 Das Konzept der Energiebilanz

Eine andere Methode, die Bruchparameter in der LEBM zu beschreiben, ist das von Griffith [1] eingeführte Konzept der Energiebilanz. Danach kann ein Riss nur entstehen oder wachsen, wenn dadurch die Gesamtenergie des Systems gleich bleibt oder abnimmt. Oder anders ausgedrückt, es kommt zu Rissausbreitung, wenn die vom elastischen Spannungsfeld und von den äußeren Kräften zur Verfügung gestellten Energie gleich oder größer ist als die zur Erzeugung neuer Bruchoberflächen benötigten Energie. Bezieht man die bei einem infinitesimalen Rissfortschritt freigesetzte Energie $-d\Pi$ auf die infinitesimalen Bruchfläche dA erhält man die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} nach Irwin [2],

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA}. \quad (3.10)$$

Dabei ist Energiefreisetzungsrate bei elastischen Materialien gleich der risstreibenden Kraft. Gleich wie beim Konzept der Spannungsintensität kann auch beim Konzept der Energiebilanz ein Bruchkriterium definiert werden. Zur Rissausbreitung kommt es, wenn die Energiefreisetzungsrate einen kritischen Wert erreicht,

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_C = 2\gamma_0 = R. \quad (3.11)$$

Den Energieterm, der für das Risswachstum aufgewendet werden muss, bezeichnet man als kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_C bzw. als Risswiderstand R . Er entspricht bei einem ideal spröden Körper zweimal der spezifischen Oberflächenenergie γ_0 . Die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} ist eine Belastungsgröße und nur von der Geometrie des Bauteils, der Risslänge und der Belastung abhängig. Der Risswiderstand ist hingegen eine Materialkenngröße und nur vom Werkstoff abhängig. Auch bei \mathcal{G} wird zwischen den drei verschiedenen Belastungsmoden durch tiefgestellte römische Ziffern unterschieden.

Im linear-elastischen Fall sind das K -Konzept und das Konzept der Energiebilanz vollständig äquivalent. Zwischen dem Spannungsintensitätsfaktor K und der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} besteht folgender Zusammenhang,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{I,II}} &= \frac{K_{\text{I,II}}^2}{E'} \\ \mathcal{G}_{\text{III}} &= \frac{K_{\text{III}}^2}{2G}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit $E' = E$ für ESZ und $E' = E/(1 - \nu^2)$ für EDZ.

Sowohl \mathcal{G} als auch K sind in der linear-elastischen Bruchmechanik als Bruchparameter anwendbar. In der Praxis wird jedoch meist das K -Konzept verwendet. Der Grund ist die einfachere Handhabung, da bereits K -Faktoren für viele geometrische Konfigurationen und Lastfälle in Handbüchern existieren.

3.3 Kleinbereichsfließen

Durch die hohen Spannungskonzentrationen an der Rissspitze kommt es in nahezu allen realen Werkstoffen zu kleineren oder größeren plastischen Verformungen an der Rissspitze. Dadurch sind die Konzepte der LEBM nur mehr bedingt anwendbar. Ist die Größe des plastisch verformten Bereiches um die Rissspitze klein im Vergleich zur Länge des Risses und der Bauteilabmessungen, spricht man von Kleinbereichsfließen. Bei kleinen plastischen Verformungen werden die Vorgänge in der plastischen Zone durch die Spannungen und Verformungen der sie umgebenden elastischen Felder, und somit durch den K -Faktor (K -dominierter Bereich), kontrolliert. Das Konzept der Spannungsintensität kann in diesem Fall weiter verwendet werden. K beschreibt dann die Spannungen und Verformungen außerhalb der plastischen Zone und ebenso die Größe der plastischen Zone [22], welche durch den Radius r_p beschrieben wird als,

$$\begin{aligned} d_p = 2 r_p &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad \text{für ESZ ,} \\ d_p = 2 r_p &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad \text{für EDZ .} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dabei bezeichnet σ_Y die Streckgrenze des Materials.

In Abbildung 3.3 sind die Spannungsverläufe vor der Rissspitze für ein linear-elastisches Material (Kurve a) und ein ideal-elastisch-plastisches Material (Kurve b) dargestellt. Bei dem linear-elastischen Material nehmen die Spannungswerte mit sinkendem Abstand zur Rissspitze immer größere Werte an. Direkt an der Rissspitze sind die Spannungen unendlich groß. Bei einem ideal-elastisch-plastischen Material kann die Vergleichsspannung vor der Rissspitze maximal den Wert der Streckgrenze σ_Y erreichen. In der Abbildung 3.3 muss zur Erhaltung des Gleichgewichts der Spannungsverlauf soweit von der Rissspitze nach rechts verschoben werden, so dass die Fläche unter der elastisch-plastischen Kurve gleich der Fläche unter der linear-elastischen Kurve ist. Dies erreicht man bei einer Verschiebung der Kurve a um den Radius der plastischen Zone r_p . Dadurch erhält man eine

effektive Risslänge von,

$$a_{\text{eff}} = a + r_p, \quad (3.14)$$

und einen effektiven Spannungsintensitätsfaktor

$$K_{\text{eff}} = \sigma \sqrt{\pi a_{\text{eff}}} Y. \quad (3.15)$$

Auch das Konzept der Energiebilanz kann für den Fall plastischer Verformung erweitert

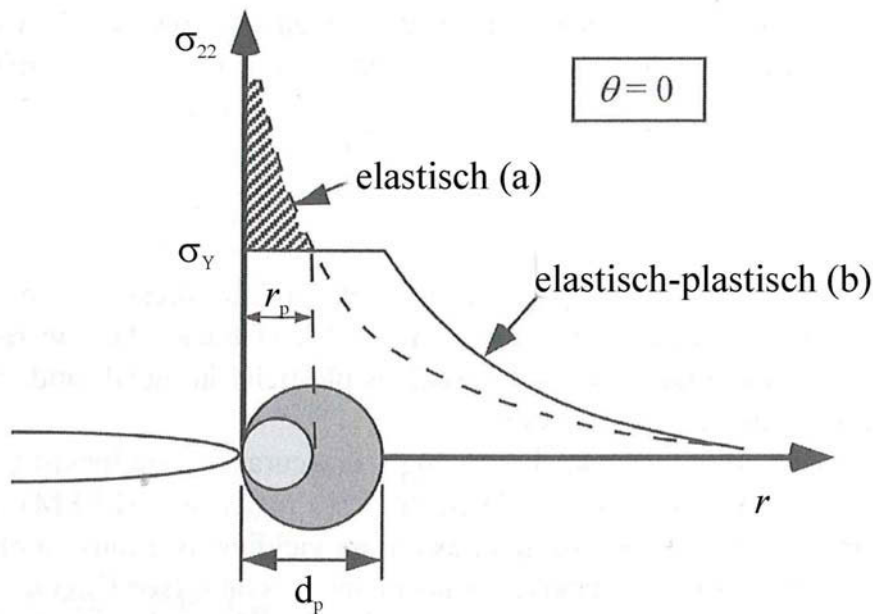


Abbildung 3.3: Spannungsverteilung vor der Rissspitze für linear-elastisches (Kurve a) und elastisch-plastisches (Kurve b) Materialverhalten [28]

werden. Im Falle kleiner plastischer Verformungen ändert sich die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} kaum gegenüber reiner elastischer Verformung. Beim Kleinbereichsfließen ist \mathcal{G} also ungefähr gleich groß wie beim ideal-spröden Bruch. Anders ist dies beim Risswiderstand. Zusätzlich zur Oberflächenenergie muss auch die plastische Verformungsarbeit für die Erzeugung der Bruchflächen berücksichtigt werden. Dadurch ändert sich der Risswiderstand zu

$$R = 2\gamma_0 + 2\gamma_p; \quad (3.16)$$

γ_p ist die spezifische plastische Verformungsarbeit zur Erzeugung einer Bruchoberfläche und kann in Metallen 10^2 bis 10^5 mal größer sein als γ_0 .

3.3.1 Der Risswiderstand

Der Risswiderstand ist, wie bereits erwähnt, bei ideal-spröden Werkstoffverhalten unabhängig von der Belastungsart, dem Spannungszustand und der Risslänge. Im Fall plastischer Verformung trifft dies jedoch nicht mehr zu. Das bedeutet, dass der Risswiderstand (R_I , R_{II} , R_{III}) für den Modus I, II und III nicht gleich groß sein muss. Des Weiteren ist R nur bei ebenem Dehnungszustand weitgehend unabhängig von der Probengeometrie und der Rissverlängerung Δa . Bei ebenem Spannungszustand hängt R sehr stark von der Probenstärke und der Rissverlängerung ab. In Abbildung 3.4 ist die Risswiderstandskurve eines

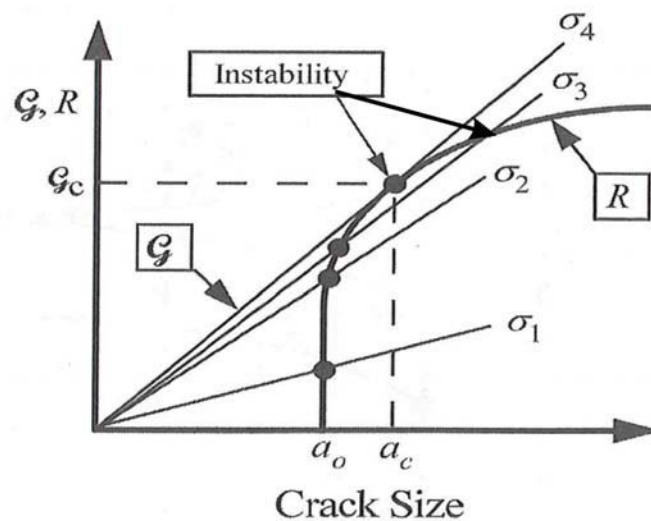


Abbildung 3.4: Risswiderstandskurve (R-Kurve) [28]

Körpers mit der Risslänge a_0 dargestellt. Die R -Kurve ist ein Maß für den Widerstand des Werkstoffs gegen Rissausbreitung. Die Ursache für einen steigenden Risswiderstand kann bei metallischen Werkstoffen durch die Zunahme von der plastischen Zone und die Verfestigung des Materials in der plastischen Zone vor der Rissspitze erklärt werden. Zusammen mit der R -Kurve sind auch verschiedene Energiefreisetzungsraten (\mathcal{G} -Kurven) bei unterschiedlichen äußeren Belastungen in Abbildung 3.4 eingetragen. Bei Belastungen, die kleiner als σ_2 sind, erfolgt keine Rissausbreitung. Sobald die Spannung den Wert von σ_2 erreicht, kommt es zur Rissverlängerung. Der Riss bleibt jedoch stehen, wenn die Spannung nicht weiter erhöht wird, da der Risswiderstand schneller wächst als die riss-treibende Kraft (stabiles Risswachstum). Sobald die \mathcal{G} -Kurve tangential zur R -Kurve ist (bei σ_4), erfolgt instabiles Risswachstum bis zum Bruch der Probe.

3.4 Elastisch-plastische Bruchmechanik (EPBM)

Die EPBM beschreibt die Vorgänge bei der Rissausbreitung in Materialien mit zeitunabhängigen nichtlinearen Eigenschaften. Sie kommt zur Anwendung, wenn die Konzepte der LEBM aufgrund großer plastischer Verformungen ihre Gültigkeit verlieren. Belastet man eine Probe aus elastisch-plastischem Material, welche einen Riss enthält, kommt es zur plastischen Verformung in der Umgebung der Rissspitze und zum Abstumpfen des Risses. Belastet man die Probe weiter, dehnt sich die plastische Zone aus. Dies kann zur völligen Durchplastifizierung der Probe führen. Wie groß die plastische Zone werden kann, bevor es zur Rissausbreitung kommt, hängt von den Werkstoffeigenschaften und der Belastung ab. Die wichtigsten Konzepte der EPBM sind das CTOD- und J -Integral-Konzept. Beide Konzepte beschreiben die Bedingungen an der Rissspitze und können als Bruchkriterium verwendet werden. Sie sind auch ineinander überführbar und für sehr große plastische Verformungen geeignet.

3.4.1 Das CTOD-Konzept

In duktilen Werkstoffen kommt es aufgrund plastischer Verformungen zu einer starken Abstumpfung der Rissspitze noch bevor die Bruchinitiierung einsetzt. Ein Maß für die Verformungen an der Rissspitze ist die sogenannte Rissspitzenverschiebung CTOD (crack tip opening displacement) [3] oder Rissöffnung δ_t . Das CTOD-Kriterium besagt, dass es in duktilen Werkstoffen genau dann zur Bruchinitiierung kommt, wenn die Rissöffnungsverschiebung δ_t einen kritischen Wert übersteigt [29],

$$\delta_t \geq \delta_{tC}, \quad (3.17)$$

wobei δ_{tC} wiederum eine materialspezifische Größe ist.

Bei kleinen plastischen Verformung besteht ein Zusammenhang zwischen der Energiefreisetzungsrate und der Rissöffnungsverschiebung. Für Mode I-Belastung gilt

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{m\sigma_Y E'} \quad (3.18)$$

mit $E' = E$ und $m \approx 1$ für ESZ und $E' = E/(1 - \nu^2)$ und $m \approx 2$ für EDZ. Der Parameter m ist auch materialabhängig.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Rissöffnungsverschiebung zu definieren. Bei numerischen Verfahren verwendet man meist den δ_{45} Wert. Dabei werden zwei Sekanten im

Winkel von ± 45 Grad in die abgestumpfte Rissspitze gelegt und δ_{45} aus den Schnittpunkten mit der Rissfront bestimmt. Mit Hilfe von stereophotometrischen Methoden [32,33] ist es möglich, den COD-Wert experimentell zu bestimmen. Dabei wird die Bruchoberfläche rekonstruiert, um den kritischen CTOD-Wert zu ermitteln. Die Bestimmung des CTOD-Wertes ist jedoch schwierig und mit zum Teil sehr aufwendigen Experimenten verbunden. Der CTOD-Wert kann jedoch auch näherungsweise aus der Lastlinienverschiebung bestimmt werden.

3.4.2 Das J -Integral

Das J -Integral, welches von Cherepanov [34] und Rice [4] unabhängig voneinander eingeführt wurde, wird wie der Spannungsintensitätsfaktor K oder die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} als Belastungskenngröße für den Riss verwendet. Im Gegensatz zu K oder \mathcal{G} kann J jedoch auch bei großen plastischen Verformungen herangezogen werden. Sehr gut geeignet ist das J -Integral auch in Verbindung mit der numerischen Beanspruchungsanalyse von Bauteilen mit Rissen. Rice [4] hat aufgezeigt, dass J unter der Annahme nichtlinear-elastischen Materialverhaltens gleich der Energiefreisetzungsrate, das heißt der risstreibenden Kraft, ist. Darüber hinaus haben Hutchinson [35] und Rice und Rosengren [36] gezeigt, dass J das Spannungsfeld und Verformungsfeld in der Nähe der Rissspitze charakterisiert.

3.4.2.1 Das J -Integral als Energiefreisetzungsrate

Nach Rice [4] kann die Änderung der potenziellen Energie $d\Pi$ bei infinitesimaler Rissausbreitung mit Hilfe eines wegunabhängigen Linienintegrals beschrieben werden. Die Energiefreisetzungsrate ergibt sich damit zu

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{da} = J = \int_{\Gamma} \left[\phi dy - \mathbf{t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right], \quad (3.19)$$

mit \mathbf{u} als Verschiebungsvektor längs Γ und ds als infinitesimales Stück des Integrationspfades Γ . Der Integrationspfad Γ umschließt die Rissspitze, und läuft entgegen dem Uhrzeigersinn von der unteren Rissflanke zur oberen Rissflanke. Mit x und y werden die zwei Richtungen im kartesischen Koordinatensystem bezeichnet. Die Formänderungsenergie-dichte ϕ ergibt sich aus den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}$ (siehe Abschnitt 2.5.1.1). Der Traction Vector \mathbf{t} (bzw. der Kraftflussvektor siehe Abschnitt 2.4.1) berechnet sich

aus dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ wie folgt

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} . \quad (3.20)$$

Die Wegunabhängigkeit des J -Integrals gilt nur unter den Bedingungen, dass es keine Volumskräfte oder Trägheitskräfte gibt, die Rissufer gerade sind, die Spannungen nur von x und y abhängen und das Material homogen ist. Des Weiteren ist J nur Wegunabhängig wenn das Material nichtlinear-elastisch ist, oder für ein elastisch-plastisches Material, solange die Deformationstheorie der Plastizität angewendet wird.

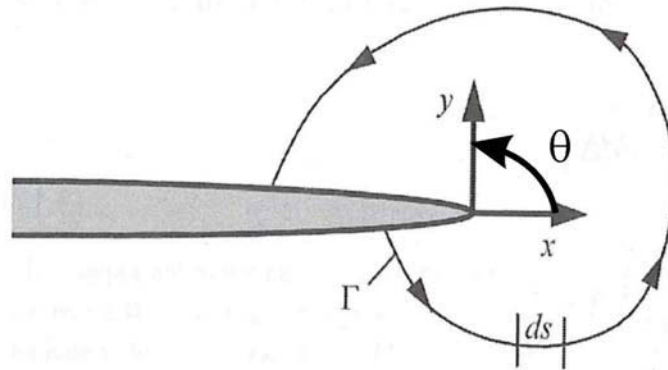


Abbildung 3.5: Kontur um eine Rissspitze [28]

3.4.2.2 Das J -Integral zur Beschreibung des Spannungs- und Verformungsfeldes

Wie bereits erwähnt, beschreibt das J -Integral die Intensität des Spannungs- und Verformungsfeldes um die Rissspitze in einem nichtlinear-elastischen Material. Jener Bereich um die Rissspitze, in dem J den mechanischen Beanspruchungszustand an der Rissspitze kontrolliert, wird nach Hutchinson [35], Rice und Rosengren [36] HRR-Feld genannt. Die Berechnung von J und die Berechnung der Spannungen und Dehnungen im HRR-Felde erfolgt mittels der Deformationstheorie der Plastizität. Für ein verfestigendes Material wird die Spannungs-Dehnungs-Kurve durch das „Ramberg-Osgood-Gesetz“ [22],

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n , \quad (3.21)$$

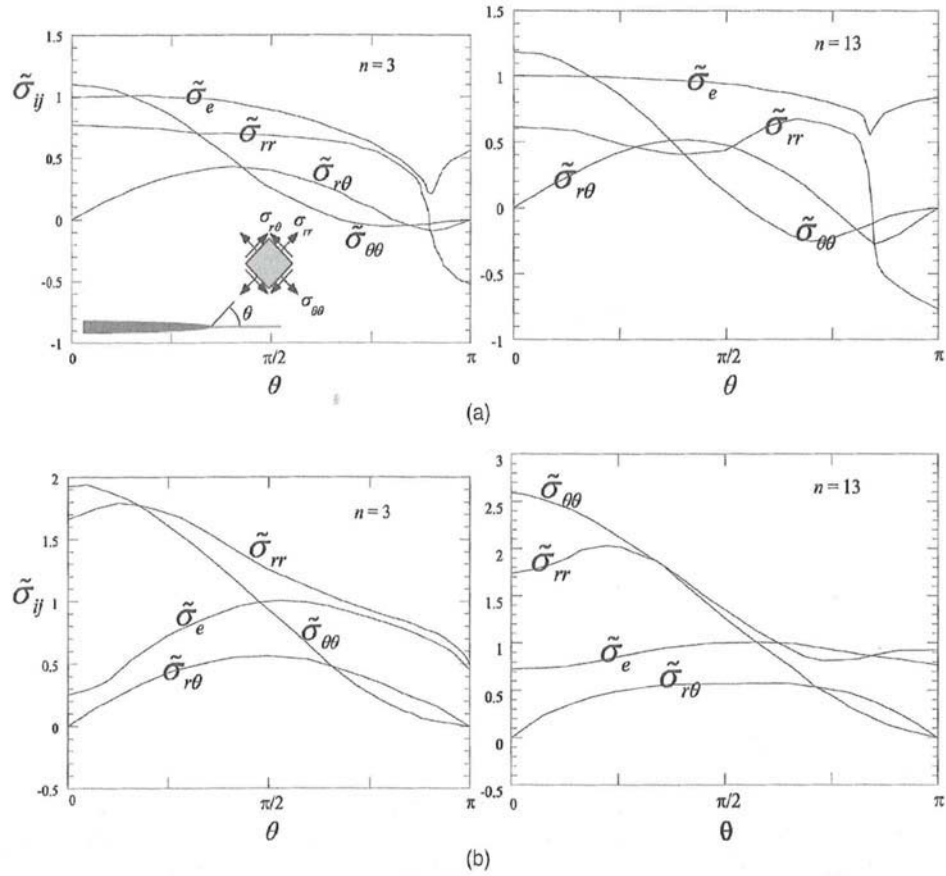


Abbildung 3.6: Abhängigkeit der Spannungen vom Winkel θ , für $n = 3$ und $n = 13$;
a) ESZ und b) EDZ [28]

angenähert, wobei σ_0 eine Referenzspannung ist und normalerweise den Wert der Streckgrenze hat. $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ bezeichnet die Referenzdehnung, α ist eine dimensionslose Konstante und n ist der Verfestigungsexponent. Der Fall $n = 1$ entspricht einem linearen Verhalten, und mit $n \rightarrow \infty$ wird ein elastisch ideal-plastisches Verhalten angenähert.

Die Nahfeldlösung des HRR-Feldes ergibt sich zu:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta), \quad (3.22)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\alpha\sigma_0}{E} \left(\frac{EJ}{\alpha\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(n, \theta). \quad (3.23)$$

Dabei ist I_n eine Integrationkonstante und hängt von n , $\tilde{\sigma}_{ij}$ und $\tilde{\epsilon}_{ij}$ ab. Die Funktionen $\tilde{\sigma}_{ij}$ und $\tilde{\epsilon}_{ij}$ sind dimensionslos und hängen vom Spannungszustand und vom Winkel θ ab (siehe Abbildung 3.6). Das HRR-Feld weist Spannungs- und Dehnungssingularitäten auf, deren Art vom Verfestigungsexponenten n abhängen. Für $n = 1$ ergibt sich die $1/\sqrt{r}$ -

Singularität aus der linearen Theorie. Für $n \rightarrow \infty$ sind die Spannungen nichtsingulär, die Dehnungen haben hingegen eine Singularität vom Typ $1/r$. Die Formänderungsenergie-dichte ist für alle n proportional $1/r$.

Im linear-elastischen Fall besteht folgender Zusammenhang zwischen dem J -Integral und dem Spannungsintensitätsfaktor:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2. \quad (3.24)$$

3.4.2.3 Das J -Integral als Gebietsintegral

Für numerische Untersuchungen ist die Verwendung eines Linienintegrals sehr unvorteilhaft, weil sich Koordinaten und Verschiebungen auf Knotenpunkte und Spannungen oder Verzerrungen auf Integrationspunkte (Gausspunkte) beziehen. Die Spannungsfelder sind jedoch meist über Elementgrenzen hinweg nicht stetig, und eine Extrapolation von Spannungen auf Knotenpunkte erfordert zusätzliche Annahmen [37]. Daher wird in den meisten Fällen, so auch in den meisten kommerziellen Finite Elemente Programmen, ein Gebietsintegral (Flächenintegral) für die Berechnung des J -Integrals verwendet [38]. Durch Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes kann das Linienintegral in ein äquivalentes Gebietsintegral umgerechnet werden. Diese Methode liefert numerisch sehr gute Resultate und ist auch für grobe Netze sehr robust. Ein weiterer Vorteil ist, dass nicht unbedingt Rissspitzenelemente bei der Berechnung verwendet werden müssen, um akzeptable Ergebnisse zu erhalten. Die Verwendung des Gebietsintegrals zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrates in linear-elastischen und nichtlinear-elastischen Materialien geht auf Parks [30, 31] zurück und wurde später von DeLorenzi [39] erweitert. Für die Umwandlung des Linienintegrals in ein Gebietsintegral geht man wiederum von einem geschlossenen Integrationspfad $\Gamma = \Gamma_{II} + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_I$ mit den Außennormalen \mathbf{n} aus (siehe Abbildung 3.7). Der J -Integralvektor ergibt sich dann zu [29],

$$\mathbf{J} = - \int_{\Gamma} \mathbf{Cn} \, ds + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{II} + \Gamma^+ + \Gamma^-} \mathbf{Cn} \, ds. \quad (3.25)$$

Darin bezeichnet \mathbf{C} den Energie-Impuls-Tensor oder Eshelby-Tensor. Dieser setzt sich aus der Formänderungsenergie-dichte ϕ , den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und den Verschiebungen \mathbf{u} zusammen,

$$\mathbf{C} = \phi \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.26)$$

Auf den Eshelby-Tensor und seine Bedeutung wird in Kapitel 4 noch genauer eingegangen. Für die Überführung in ein Gebietsintegral wird eine Wichtungsfunktion $q(\mathbf{x})$ eingeführt, die stetig und differenzierbar sein muss und die Bedingungen,

$$q = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{II}} \\ 1 & \text{auf } \Gamma_{\text{I}}, \end{cases} \quad (3.27)$$

erfüllt (siehe Abbildung 3.8). Durch Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes ergibt sich damit das J -Integral, welches mit q gewichtet ist und ein reines Gebietsintegral über die von Γ eingeschlossene Fläche A plus die Rissuferintegrale darstellt,

$$\mathbf{J} = - \int_A \nabla \cdot (\mathbf{C}q) \, dA = - \int_A (\nabla \cdot \mathbf{C}q + \mathbf{C}\nabla q) \, dA + \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \mathbf{C}\mathbf{n}q \, ds. \quad (3.28)$$

Dabei wird das J -Integral als Energiefreisetzungsrate interpretiert, die mit einer fiktiven

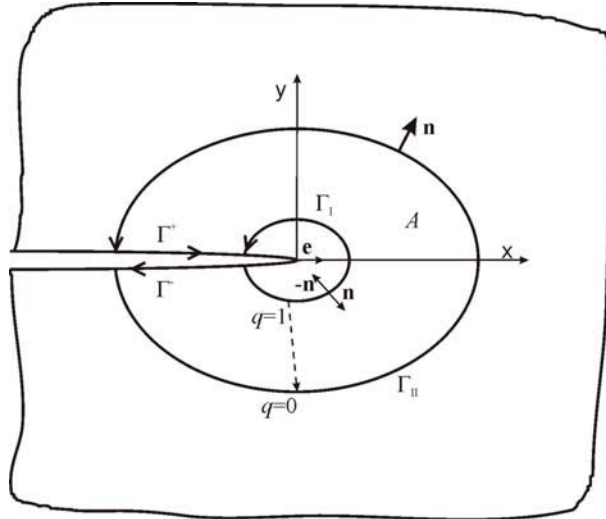


Abbildung 3.7: Integrationspfad um die Risspitze und Wichtungsfunktion q [29]

(virtuellen) Rissverlängerung verbunden ist (siehe Abbildung 3.8). Numerisch wird das J -Integral folgendermaßen berechnet

$$J = \frac{1}{\Delta A_c} \iint_A [\nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} - \phi \mathbf{I}] : \text{grad} \Delta \mathbf{x}^T \, dA, \quad (3.29)$$

wobei $\Delta \mathbf{x}$ die Verschiebung der Rissfrontkoordinaten und ΔA_c die dabei neu entstandene Rissfläche (siehe Abbildung 3.8) bezeichnet. Die virtuelle Rissverlängerung Δa kann in einer beliebigen Richtung erfolgen und liefert die dazugehörige Energiefreisetzungsrate. Das herkömmliche J -Integral, welches die erste Komponente des J -Vektors darstellt, J_x , ergibt sich bei einer Rissfrontverschiebung in x -Richtung. Erfolgt die virtuelle Verschie-

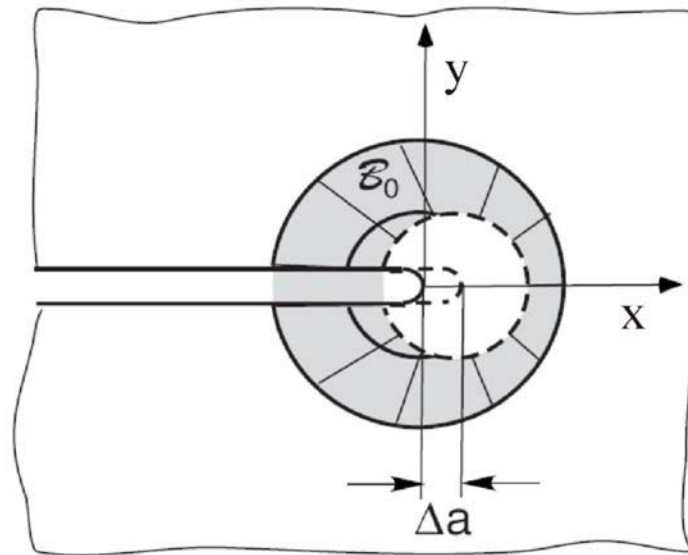


Abbildung 3.8: Virtuelle Rissverlängerung [37]

bung in y -Richtung, erhält man die zweite Komponente des J -Vektors, J_y . Diese Methode ist bereits in vielen kommerziellen Finite Elemente Programmen enthalten und wird als Virtual Crack Extension Method (VCE) bezeichnet.

3.4.2.4 Das J -Integral für elastisch-plastische Materialien

Wie bereits erwähnt, ist das J -Integral von Rice nur für ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten definiert. Im Laufe der Jahre hat man versucht, das J -Integral Konzept so zu erweitern, dass es auch bei einem elastisch-plastischen Materialverhalten angewendet werden kann.

Der erste Ansatz besteht darin, das elastisch-plastische Materialverhalten über die Deformationstheorie der Plastizität zu beschreiben (siehe Abschnitt 2.5.2.2). Dadurch wird ein elastisch-plastisches Material wie ein nichtlinear-elastisches Material behandelt und das J -Integral ist identisch mit dem J -Integral von Rice [4]. Diese Vorgehensweise ist jedoch nur solange richtig, solange die Probe proportional Belastet wird. Für Entlastungsvorgänge, wie sie etwa beim Risswachstum auftreten, oder im Fall von großen Verformungen, kann die Deformationstheorie nicht mehr angewendet werden. Um das elastisch-plastische Materialverhalten bei Entlastungen richtig zu beschreiben, muss die inkrementelle Plastizitätstheorie (siehe Abschnitte 2.5.2.3) verwendet werden.

Auch bei der Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie zur Berechnung des J -Integrals wird die gesamte Formänderungsenergiedichte ϕ verwendet [40]. Sie wird mit dem elastischen und den irreversiblen plastischen Dehnungen $d\epsilon = d\epsilon^{\text{el}} + d\epsilon^{\text{pl}}$ gebildet

(siehe Abschnitt 2.5.2.3). Dadurch ergibt sich die Formänderungsenergiedichte zu

$$\phi = \int_0^{\epsilon} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\epsilon} = \phi^{\text{el}}(\boldsymbol{\epsilon}^{\text{el}}) + \phi^{\text{pl}}(\mathbf{x}) . \quad (3.30)$$

ϕ^{el} beschreibt den elastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte (siehe Abschnitt 2.5.1.1) und ϕ^{pl} ist der plastische Anteil der Formänderungsenergiedichte, der von der Belastungsgeschichte im Materialpunkt abhängig ist und deshalb als explizite Funktion der Koordinate \mathbf{x} angegeben werden muss. Das elastisch-plastische J -Integral stimmt für eine monoton steigende Belastung, für ruhende Risse und infinitesimaler Deformation in sehr guter Näherung mit dem klassischen J -Integral überein [40]. Im Falle von Entlastungen oder bei Risswachstum kann dieses J -Integral ebenfalls nicht mehr verwendet werden.

Im Laufe der Jahre wurden Erweiterungen des J -Integral Konzepts für die inkrementelle Plastizitätstheorie und große Verformungen veröffentlicht. Die bekanntesten sind das elastisch-plastische \tilde{J} -Integral von Moran und Shih [13], das inkrementelle ΔT^* -Integral von Alturi und Nishioka [11, 12] und das Energieflussintegral \hat{J} nach Kishimoto [9, 10]. Weil die physikalische Bedeutung dieser Erweiterungen unklar ist, soll auf sie nicht weiter eingegangen werden. Eine genauere Betrachtung dieser Erweiterungen findet man in den Arbeiten von Simha et al. [17] und Moran und Shih [13].

Kapitel 4

Das Configurational Force Concept

4.1 Allgemeines

In diesem Kapitel soll das Configurational Force Concept (CFC) kurz erklärt werden. Dabei soll nur ein kurzer Einblick in dieses komplexe Gebiet gegeben werden. Eine nähere Erklärung und alle Herleitungen können in den Büchern von Maugin [41], Gurtin [42] und Kienzler und Herrmann [43] gefunden werden.

Neben den klassischen Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik kann ein weitere Satz von Gleichungen definiert werden, welche die zeitliche und räumliche Veränderung von Objekten relativ zu dem sie umgebenden Kontinuum beschreibt [43]. Diese Bilanzgleichungen und deren zugehörigen Zustandsgrößen werden als materielle Kräfte oder als Configurational Forces (Konfigurationskräfte) bezeichnet. Das Configurational Force Concept in der Elastizitätstheorie geht zurück auf die Arbeiten von Eshelby [18, 19]. Er verwendete den Energie-Impuls-Tensor (Configurational Stress Tensor, Energie Momentum Tensor oder Eshelby-Tensor), um die treibenden Kräfte auf Materialdefekte, wie Versetzungen, Zwischengitteratome, Phasengrenzen oder Rissspitzen, zu beschreiben. Die Arbeiten von Maugin und Trimarco [44], Maugin [45, 46], Gurtin [47] und Gurtin und Pidio-Guidugli [48] beschäftigten sich in weiterer Folge mit der Anwendung der Configurational Forces in der Bruchmechanik.

Das Konzept der Configurational Forces stellt eine Erweiterung der klassischen Kontinuumsmechanik dar. Die sogenannten Newtonian Forces (Newtonschen Kräfte), die auf einen Körper einwirken und zu Verformung des Körpers führen, werden mit den klassischen Gleichungen der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie beschrieben (siehe Abschnitt 2).

Das Wachsen eines Risses ist gleichzusetzen mit der Bewegung der Rissspitze in der Referenzkonfiguration und kann daher nicht unmittelbar als Verformung des Materials angesehen werden. Allerdings ist das Wachsen eines Risses immer mit der Verformung der Probe verbunden. Beim Risswachstum wandert die Rissspitze von einem Materialpunkt zum nächsten.

Da sich die Deformationen sowie die Spannungen mit Hilfe des Piola-Kirchhoff Spannungstensors in der Referenzkonfiguration beschreiben lassen, werden im weiteren Verlauf alle Gleichungen für die Referenzkonfiguration hergeleitet.

4.2 Das Configurational Force Concept für inhomogene Materialien

Alle hier beschriebenen Formeln und Herleitungen sind in den Arbeiten von Gurtin [42,47] und Simha et al. [49,50] ausführlich dargestellt und sollen nur kurz wiederholt werden. Gurtin verwendete in seinen Arbeiten [42,47] Freikörperbilder, um das CFC zu erklären. Dabei betrachtet man ein beliebiges Teilgebiet des Körpers und ersetzt die Wirkung des restlichen Körpers durch Kräfte und Momente, die an den Schnittufern wirken. Befindet sich das System im Gleichgewicht, muss die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte gleich Null sein. Das Neue an Gurtins Idee ist, dass zwischen zwei verschiedenen Kräftesystemen unterschieden wird. Das eine Kräftesystem beinhaltet die klassischen Newtonschen Kräfte, die für die Verformung verantwortlich sind; das andere Kräftesystem beschreibt die materiellen Kräfte, die nur in der Referenzkonfiguration wirken. In Abbildung 4.1a ist ein Körper \mathcal{B} mit einem Riss und einem Interface (Grenzfläche) in der Referenzkonfiguration zu sehen. Dabei wird der Riss als Linie dargestellt, und $\hat{\mathbf{p}}$ bezeichnet einen Vektor, der normal auf die Rissflanken steht. Das Interface ist ebenfalls nur als Linie dargestellt, mit einem Vektor $\hat{\mathbf{n}}$, der normal auf das Interface steht. Betrachtet man das Freikörperbild eines Bereiches \mathcal{D} (Abbildung 4.1b), der die Rissspitze und einen Teil des Interfaces enthält, so sind die einzigen Deformationskräfte die Kontaktkräfte $\mathbf{S}\hat{\mathbf{m}}$ an den Schnittufern $\partial\mathcal{D}$. Dabei bezeichnet $\hat{\mathbf{m}}$ einen Einheitsvektor normal zu $\partial\mathcal{D}$. Dadurch ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung zu

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{S}\hat{\mathbf{m}} \, dl = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

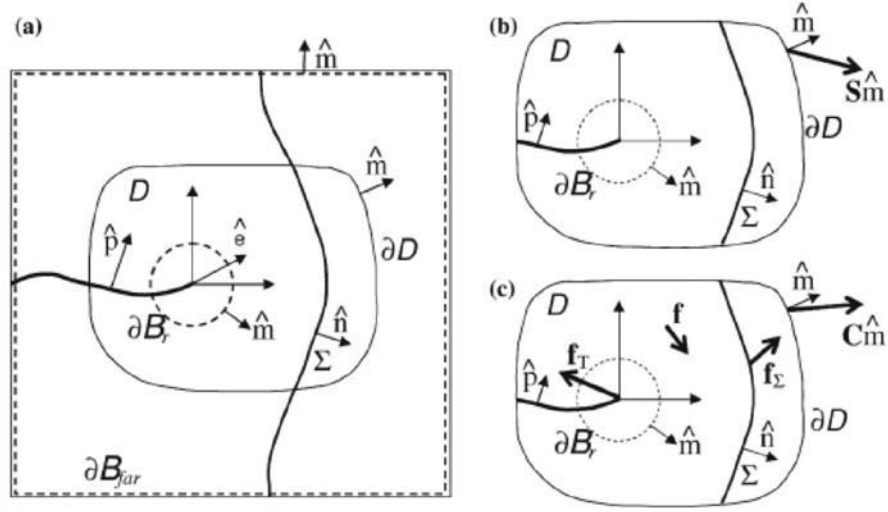


Abbildung 4.1: a) Ein 2D Körper \mathcal{B} mit einem Riss und einem Interface in der Referenzkonfiguration; b) Freikörperbild des Gebietes \mathcal{D} mit den klassischen Kräften; c) Freikörperbild des Gebietes \mathcal{D} mit den Configurational Forces [50]

für jede Region \mathcal{D} . Verwendet man den erweiterten Gaußschen Divergenzssatz aus Simha et al. [50], erhält man

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \text{ für jeden Materialpunkt im Körper,} \quad (4.2)$$

$$[[\mathbf{S}]]\hat{n} = \mathbf{0} \text{ am Interface,} \quad (4.3)$$

$$[[\mathbf{S}]]\hat{p} = \mathbf{0} \text{ an den beiden nicht oder „gegengleich“ belasteten Rissflanken,} \quad (4.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{B}_r} \mathbf{S}\hat{m} \, dl = \mathbf{0} \text{ an der Risspitze.} \quad (4.5)$$

Dabei bezeichnet ∇ den Nabla-Operator und $[[\cdot]]$ den Unterschied einer Größe zwischen der linken und der rechten Seite eines Interfaces, z.B. $\mathbf{S}_r - \mathbf{S}_l$. Gleichung (4.2) ist die Gleichgewichtsbedingung aus der Kontinuumsmechanik, Gleichung (4.3) beschreibt die Kontinuität des Traction Vektors am Interface, Gleichung (4.4) beinhaltet die Annahme, dass die Rissflanken spannungsfrei oder „gegengleich“ belastet sind und Gleichung (4.5) beschreibt die Spannungssingularität an der Risspitze.

Die Gleichgewichtsbedingung in (4.1) kann nun auch für das System der Configurational Forces in der Referenzkonfiguration aufgestellt werden. Dazu betrachtet man das Freikörperbild in Abbildung 4.1c. In einer beliebigen Region \mathcal{D} wirken die Configurational Stresses \mathbf{C} und die Configurational Forces \mathbf{f} . Am Interface wirkt die Configurational Force \mathbf{f}_Σ , an der Risspitze wirkt \mathbf{f}_{tip} und an den Schnittufern wirken die Kontaktkräfte

$\mathbf{C}\hat{\mathbf{m}}$. Daraus ergibt sich das Gleichgewicht der Configurational Forces zu

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} dA + \int_{\Sigma \cap \mathcal{D}} \mathbf{f}_{\Sigma} dl + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{C}\hat{\mathbf{m}} dl + \mathbf{f}_{\text{tip}} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

für eine beliebige Region \mathcal{D} .

Wiederum kann man den erweiterten Divergenzansatz anwenden und kommt auf

$$\nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ für jeden Materialpunkt im Körper,} \quad (4.7)$$

$$[[\mathbf{C}]]\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{f}_{\Sigma} = \mathbf{0} \text{ am Interface,} \quad (4.8)$$

$$[[\mathbf{C}]]\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \text{ an den beiden Rissflanken,} \quad (4.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_r} \mathbf{C}\hat{\mathbf{m}} dl + \mathbf{f}_{\text{tip}} = \mathbf{0} \text{ an der Risssspitze,} \quad (4.10)$$

wobei \mathbf{C} den Eshelby-Tensor bezeichnet.

Ausgehend vom 2. Hauptsatz der Thermodynamik (Clausius-Duhem Ungleichung), der besagt, dass die Dissipation in einem beliebigen Teilgebiet in einem Körper nicht negativ sein kann, ergeben sich die Configurational Stresses \mathbf{C} im Körper \mathcal{B} zu [47, 49],

$$\mathbf{C} = \phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}, \quad (4.11)$$

wobei ϕ das Helmholtz-Potenzial, bzw. die Freie-Energie oder die gespeicherte Energiedichte und \mathbf{F} den Deformationsgradienten bezeichnen. Die gesamte Dissipation im Körper \mathcal{B} ist gegeben durch [48, 49],

$$\Psi_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \dot{\phi}) dA + (-\mathbf{f}_{\text{tip}}) \cdot \mathbf{v}_{\text{tip}} \geq 0. \quad (4.12)$$

Darin bezeichnet $\dot{\mathbf{F}}$ den nach der Zeit abgeleiteten Deformationsgradienten und \mathbf{v}_{tip} die Geschwindigkeit der Risssspitze in der Referenzkonfiguration.

Mit Hilfe des Eshelby-Tensors ergeben sich die Configurational Forces im Material, am Interface und an der Risssspitze zu

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}), \quad (4.13)$$

$$\mathbf{f}_{\Sigma} = -[[\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}]]\hat{\mathbf{n}} = -([[\phi]]\mathbf{I} - [[\mathbf{F}^T]] \langle \mathbf{S} \rangle) \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{f}_{\text{tip}} = -\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_r} (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}) \hat{\mathbf{m}} dl, \quad (4.15)$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ den Mittelwert einer Größe über das Interface bezeichnet, z.B. $(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_l) / 2$.

Die Configurational Forces im Körper ergeben sich also aus der negativen Divergenz des

Eshelby-Tensors (Gleichung (4.13)). Die Configurational Forces am Interface erhält man aus der negativen Normalkomponente des Sprungs des Eshelby-Tensors. Die Configurational Force an der Rissspitze ergibt sich aus den Kontaktkräften in den Schnittufern, wenn der Integrationsradius gegen Null geht.

Eine lokale Betrachtung von Gleichung (4.12) führt zur Beschreibung der Dissipation in jedem Materialpunkt [49],

$$\Psi_{\text{bulk}} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \dot{\phi} \geq 0. \quad (4.16)$$

Die Dissipation durch Wachstum eines Risses, das heißt durch die Bewegung der Rissspitze, ist daher gegeben durch

$$\Psi_{\text{tip}} = (-\mathbf{f}_{\text{tip}}) \cdot \mathbf{v}_{\text{tip}} \geq 0 \quad (4.17)$$

und die Configurational Force an der Rissspitze \mathbf{f}_{tip} beschreibt die risstreibende Kraft. Die Komponente von \mathbf{f}_{tip} in Rissausbreitungsrichtung ist äquivalent zum J -Integral,

$$J_{\text{tip}} \equiv \hat{\mathbf{e}} \cdot (-\mathbf{f}_{\text{tip}}) = \hat{\mathbf{e}} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_r} (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}) \hat{\mathbf{m}} \, dl \geq 0, \quad (4.18)$$

wobei der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{v}_{\text{tip}} / |\mathbf{v}_{\text{tip}}|$ in Richtung des Risswachstums zeigt. Die rechte Seite von Gleichung (4.18) ist bekannt als Rice'sches J -Integral [4].

Abschließend ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Nahfeld J -Integral, J_{tip} , und dem Fernfeld J -Integral, J_{far} , aus dem Gleichgewicht der Configurational Forces im Körper \mathcal{B} zu [49, 50],

$$J_{\text{tip}} - J_{\text{far}} = \hat{\mathbf{e}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \, dA + \hat{\mathbf{e}} \cdot \int_{\Sigma} \mathbf{f}_{\Sigma} \, dl, \quad (4.19)$$

wobei \mathcal{B} den gesamten Körper mit Ausschluss des Rissspitzenbereiches bezeichnet.

Die rechte Seite der Gleichung (4.19) beschreibt den Einfluss der Materialinhomogenität. Man kann zeigen, dass dieser Term für ein homogenes nichtlinear-elastisches Material verschwindet und J_{tip} gleich groß ist wie J_{far} .

Weiters kann noch zwischen einem kontinuierlichen und einem scharfen Interface unterschieden werden. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.19) beschreibt die Configurational Forces, die durch unterschiedliche Materialeigenschaften in einem Körper hervorgerufen werden. Ein einfacher Weg, um inhomogene Eigenschaften zu beschreiben ist, die Freie-Energie ϕ von den Referenzkoordinaten \mathbf{X} abhängig zu machen ($\phi(\mathbf{F}, \mathbf{X})$).

Dadurch reduziert sich die Gleichung (4.13) auf [49],

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}) = -\nabla_x \phi(\mathbf{F}, \mathbf{X}). \quad (4.20)$$

Da ϕ die gespeicherte Formänderungsenergiedichte beschreibt, kann zwischen der Deformationstheorie der Plastizität und der inkrementellen Plastizitätstheorie unterschieden werden, indem einmal der gesamte Anteil der Formänderungsenergiedichte und einmal nur der elastische Anteil der Formänderungsenergiedichte ($\phi = \phi(\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathbf{X})$) in Gleichung (4.20) eingesetzt wird [46, 49]. Gleichung (4.20) beschränkt sich also nicht auf ein elastisches Materialverhalten, sondern kann auch bei plastischem Materialverhalten verwendet werden.

Der zweite Integralterm von Gleichung (4.19) beschreibt den Einfluss eines scharfen Interfaces. Der Material Inhomogeneity Term (Materialinhomogenitätsterm) C_{inh} ergibt sich aus

$$C_{\text{inh}} \equiv -\hat{\mathbf{e}} \left(\int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \, dA + \int_{\Sigma} ([\phi] \mathbf{I} - [\mathbf{F}^T] \langle \mathbf{S} \rangle) \hat{\mathbf{n}} \, dl \right) \quad (4.21)$$

$$= -\hat{\mathbf{e}} \int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \, dA - \int_{\Sigma} ([\phi] - \langle \mathbf{S} \rangle \cdot [\mathbf{F}]) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \, dl. \quad (4.22)$$

C_{inh} beschreibt also den Shielding Effekt bzw. Anti-shielding Effekt (abschirmende oder anziehende Wirkung) von Materialinhomogenitäten auf die risstreibende Kraft, und es gilt

$$J_{\text{tip}} = J_{\text{far}} + C_{\text{inh}}. \quad (4.23)$$

Verschiedene Arbeiten [49–55] belegen, dass C_{inh} kleiner als Null ist, wenn der Riss von einem Material mit niedrigerem E -Modul oder niedrigerer Streckgrenze in ein Material mit höherem E -Modul oder höherer Streckgrenze wächst (Materialpaarung weich/hart). J_{tip} ist dabei kleiner als J_{far} , sodass die treibende Kraft, welche in die Probe gesteckt wird größer ist als die treibende Kraft, die an der Riss Spitze ankommt. Der Material Inhomogeneity Term konsumiert einen Teil der risstreibenden Kraft und übt damit einen Shielding Effekt auf die Riss Spitze aus. Umgekehrt ist J_{tip} größer als J_{far} , wenn eine Materialpaarung hart/weich vorliegt. Dabei bewirkt der Material Inhomogeneity Term einen Anti-shielding Effekt.

Der Material Inhomogeneity Term C_{inh} kann nach [50] alternativ mit dem J -Integral über

eine geschlossene Kontur um das Interface berechnet werden,

$$C_{\text{int}} = \hat{\mathbf{e}} \cdot \int_{\Sigma} (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}) \hat{\mathbf{n}} \, dl . \quad (4.24)$$

4.3 Das Configurational Force Concept in der elastisch-plastischen Bruchmechanik

In diesem Kapitel wird die Anwendung des CFC in der elastisch-plastischen Bruchmechanik kurz zusammengefasst. Die Ableitung aller hier verwendeten Gleichungen sind in Simha et al. [17] ausführlich beschrieben. Daher beschränkt sich dieses Kapitel auf die wesentlichen Beziehungen.

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Configurational Forces im Körperinneren eine Funktion des Helmholtz-Potenzials bzw. der gespeicherten und reversiblen Formänderungsenergiedichte ϕ sind. In einem elastisch-plastischen Material ist ein Großteil der Formänderungsenergiedichte jedoch nicht reversibel, sondern wird in Wärme umgewandelt (dissipiert). Nur der elastische Anteil der Formänderungsenergiedichte ist reversibel und kann einen Beitrag zur gespeicherten Formänderungsenergie liefern. Die reversible gespeicherte Formänderungsenergiedichte ist daher eine Funktion des elastischen Teils des Deformationsgradienten und, beispielsweise einer internen Variablen α , die den Effekt der isotropen Verfestigung berücksichtigt,

$$\phi = \phi(\mathbf{F}^e, \alpha) . \quad (4.25)$$

Weiters wird die Formänderungsenergiedichte ϕ als ϕ^{rev} bezeichnet, wenn sie nur eine Funktion des elastischen Teils des Deformationsgradienten und einer internen Variablen α ist, und als ϕ^{tot} , wenn ϕ eine Funktion des gesamten Deformationsgradienten ist.

Die Dissipation in einem Körper \mathcal{B} reduziert sich auf [17, 56],

$$\Psi_{\text{bulk}} = \left(\mathbf{S} (\mathbf{F}^p)^T - \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \mathbf{F}^e} \right) \cdot \dot{\mathbf{F}}^e + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p - \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 . \quad (4.26)$$

Unter der Annahme, dass die Dissipation in einem Körper nicht negativ werden kann, erhalten wir unter Einbeziehung des Coleman-Noll Arguments den 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor zu,

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \mathbf{F}^e} (\mathbf{F}^p)^{-T} . \quad (4.27)$$

Dadurch vereinfacht sich Gleichung (4.26) auf

$$\Psi_{\text{bulk}} = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^p - \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Damit ergeben sich die Bulk Configurational Forces (Configurational Forces im Material), [17], zu

$$\mathbf{f}^{\text{ep}} = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}^p}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4.29)$$

Teilt man die reversible Formänderungsenergiegedichte ϕ^{rev} in einen elastischen Anteil und einen Anteil, welcher die Verfestigung des Materials berücksichtigt, ergibt sich ϕ^{rev} zu,

$$\phi^{\text{rev}} = \phi^{\text{el}}(\boldsymbol{\epsilon}^{\text{el}}) + \phi^{\text{h}}(\epsilon_V). \quad (4.30)$$

Dabei bezeichnet ϵ_V die plastische Vergleichsdehnung.

Dadurch erhält man die Bulk Configurational Forces unter Annahme kleiner Verformungen in der Momentankonfiguration zu

$$\mathbf{f}^{\text{ep}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi^{\text{h}}}{\partial \epsilon_V} \frac{\partial \epsilon_V}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.31)$$

ϕ^{h} berücksichtigt die Zunahme der Versetzungsdichte im Material. Dieser Energiebeitrag ist im allgemeinen nur reversibel, wenn eine Wärmebehandlung durchgeführt wird. Bei Raumtemperatur kann der zweite Teil von Gleichung (4.32) vernachlässigt werden und Gleichung (4.32) vereinfacht sich auf

$$\mathbf{f}^{\text{ep}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.32)$$

Aus Gleichung (4.32), sieht man sehr gut, dass die Bulk Configurational Forces nur vom Gradienten der plastischen Verformung abhängen. In den folgenden numerischen Berechnungen wird immer Gleichung (4.32) verwendet um die Bulk Configurational Forces zu ermitteln.

Analog zum Material Inhomogeneity Term kann ein weiterer Term, der den Effekt der plastischen Verformung berücksichtigt, definiert werden. Dieser Plasticity Influence Term (plastischer Einflussterm) ergibt sich aus der Summation der Bulk Configurational Forces und der Projektion in die Risswachstumsrichtung,

$$C_p = \hat{\mathbf{e}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{x}} \right] dA. \quad (4.33)$$

Für den allgemeinen Fall ergibt sich der Plasticity Influence Term in der Referenzkonfiguration zu,

$$C_p = \hat{\mathbf{e}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \left[(\mathbf{F}^e)^T \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}^p}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \phi^{\text{rev}}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{X}} \right] dA. \quad (4.34)$$

Das Nahfeld J -Integral, $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$, ergibt sich wieder aus der Projektion der Configurational Force an der Risspitze in Rissausbreitungsrichtung,

$$J_{\text{tip}}^{\text{ep}} \equiv \hat{\mathbf{e}} \cdot (-\mathbf{f}_{\text{tip}}^{\text{ep}}) = \hat{\mathbf{e}} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_r} (\phi^{\text{rev}} \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{S}) \hat{\mathbf{m}} dl \geq 0. \quad (4.35)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Nahfeld J -Integral, $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$, und dem Fernfeld J -Integral, $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$, ergibt sich dann zu,

$$J_{\text{tip}}^{\text{ep}} = J_{\text{far}}^{\text{ep}} + C_p. \quad (4.36)$$

Gradienten in der plastischen Verformung oder in der Verfestigung erzeugen demnach elastisch-plastische Configurational Forces innerhalb des betrachteten Körpers. Dadurch ist $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ auch in einem homogenen elastisch-plastischen Material nicht mehr gleich $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$. Der Plasticity Influence Term C_p kann größer oder kleiner Null sein. Wenn C_p größer Null ist, entsteht ein Anti-shielding Effekt und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}} > J_{\text{far}}^{\text{ep}}$. Umgekehrt entsteht ein Shielding Effekt, wenn C_p kleiner Null ist und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}} < J_{\text{far}}^{\text{ep}}$.

Für ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten (bzw. für Deformationsplastizität) verschwinden die Configurational Forces in einem homogenen Material und C_p ist Null.

In Simha et al. [17] wurden einige Spezialfälle der plastischen Verformung betrachtet, und für jeden Fall der Plasticity Influence Term berechnet.

Für Deformationstheorie der Plastizität bzw. für ein nichtlinear-elastisches Material erhält man

$$C_p = 0 \text{ und } J_{\text{tip}} = J_{\text{far}}. \quad (4.37)$$

Für ein starr-plastisches Material ist der elastische Anteil der Formänderungsenergiedichte Null ($\phi^{\text{el}} = 0 \Rightarrow \phi^{\text{h}} = \phi$) und es ergibt sich,

$$C_p = -J_{\text{far}} \text{ und } J_{\text{tip}} = 0. \quad (4.38)$$

In einem ideal-plastischen Material ist $\phi^{\text{el}} = \phi$ und $\phi^{\text{h}} = 0$. Daraus resultiert der Plasticity Influence Term zu,

$$C_{\text{p}} = -J_{\text{far}} \text{ und } J_{\text{tip}} = 0 . \quad (4.39)$$

Im Fall eines Steady-State (stationären) Risswachstums in einem allgemeinen elastisch-plastischen Körper ergibt sich [17],

$$C_{\text{p}} \leq 0 \text{ und } J_{\text{tip}}^{\text{ep}} \leq J_{\text{far}}^{\text{ep}} . \quad (4.40)$$

Dabei ist

$$C_{\text{p}} = -\frac{d W_{\text{pl}}}{dA} \quad (4.41)$$

die negative Energie für die plastische Verformung pro Einheits-Rissfläche, das der Energiedissipationsrate entspricht.

4.4 Implementierung des Configurational Force Concepts in ein Finite Elemente Programm

Um die Configurational Forces numerisch zu berechnen, wurde ein Post-Processing-Programm für das Finite Elemente Programm (FE-Programm) ABAQUS erstellt [57]. Dieses Kapitel soll kurz beschreiben, wie die zuvor beschriebenen Gleichungen in Zusammenhang mit einer FE-Analyse verwendet werden können, um die Configurational Forces numerisch zu berechnen.

Das Post-Processing Programm basiert auf den Arbeiten von Mueller et al. und Denzer et al. [58–61] und wurde in der Arbeit von Shan [57] beschrieben.

Im Post-Processing Programm wird sowohl das J -Integral für ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten (J^{nel}) als auch das J -Integral für ein elastisch-plastisches Materialverhalten (J^{ep}) mit dem CFC berechnet.

Ausgehend von Gleichung (4.7) sind die Configurational Forces für jeden Materialpunkt in einem Körper gegeben durch

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{C} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{I} - \mathbf{F}^{\text{T}} \mathbf{S}) . \quad (4.42)$$

Dabei erhält man die Cauchy-Spannungen, die Formänderungsenergiegedichte und die Verschiebungen durch eine konventionelle FE-Berechnung in jedem Element (siehe Abbildung 4.2). Der Cauchy-Spannungstensor kann mit Gleichung (2.16) in den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor umgerechnet werden. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und dem Deformationsgradienten ist in Gleichung (2.9) dargestellt. Die Configurational Forces in den Knoten eines einzigen Elementes ergeben sich dann zu

$$\mathbf{g}_e^I = \int_{V_e} N^I \mathbf{f} dV = \int_{V_e} \mathbf{D}^{I^T} \cdot \mathbf{C} dV, \quad (4.43)$$

wie in Abbildung 4.2(a) dargestellt. Dabei bezeichnet N^I die Formfunktion des Elementes, und \mathbf{D}^I beschreibt die Ableitungen der Formfunktion nach dem Ort,

$$\mathbf{D}^I = \begin{bmatrix} N_{,x}^I & 0 \\ 0 & N_{,y}^I \\ N_{,y}^I & 0 \\ 0 & N_{,x}^I \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Die Configurational Force \mathbf{g}_e^I werden für jedes Element in den Elementknoten berechnet

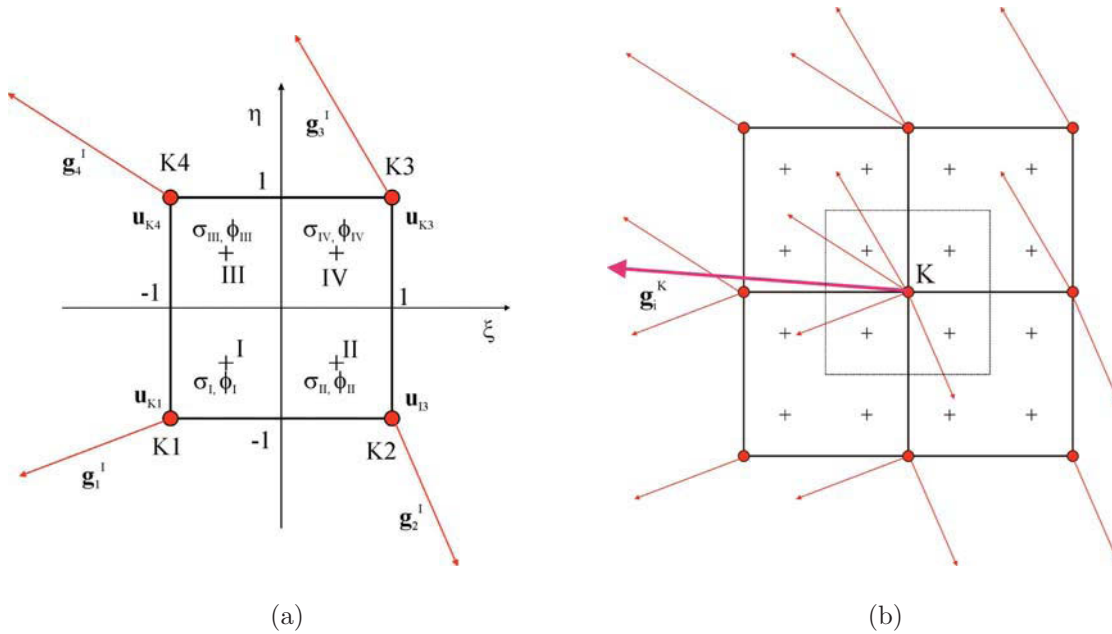


Abbildung 4.2: Configurational Forces in den Elementknoten für a) ein lineares isoparametrisches Element b) vier lineare isoparametrische Elemente

und sind vom Element Volumen, V_e , abhängig. Es können unterschiedliche Elementtypen verwendet werden. Diese unterscheiden sich durch ihre Formfunktion (z.B. linear oder quadratisch) oder durch die Anzahl der Integrationspunkte (z.B. vollintegriert oder re-

duziert integriert). Um die gesamte Configurational Force in einem Knoten zu erhalten, müssen alle Configurational Forces, die in diesem Knoten K zusammentreffen assembliert werden (siehe Abbildung 4.2(b)),

$$\mathbf{g}^K = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{g}_e^I. \quad (4.45)$$

Dabei bezeichnet n_e die Anzahl der Elemente die um den Knoten K liegen. Es ist leicht zu erkennen, dass sich die Configurational Force im Knoten K aus den Mittelwerten der benachbarten Elemente zusammensetzt.

Um die J -Integrale über einen bestimmten Bereich zu berechnen, müssen alle Configurational Forces in diesem Bereich mit der jeweiligen Elementfläche ΔA_e multipliziert werden und anschließend summiert werden (siehe Abbildung 4.3),

$$J_{\Gamma_r} = \sum_{\text{Elemente in } \mathcal{B}} -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}^K) \Delta A_e. \quad (4.46)$$

Wird der Integrationspfad wie in Abbildung 4.3 gewählt, tragen die Elemente, welche direkt an den Integrationspfad anschließen, ebenfalls einen Teil zum J -Integral bei. Dies

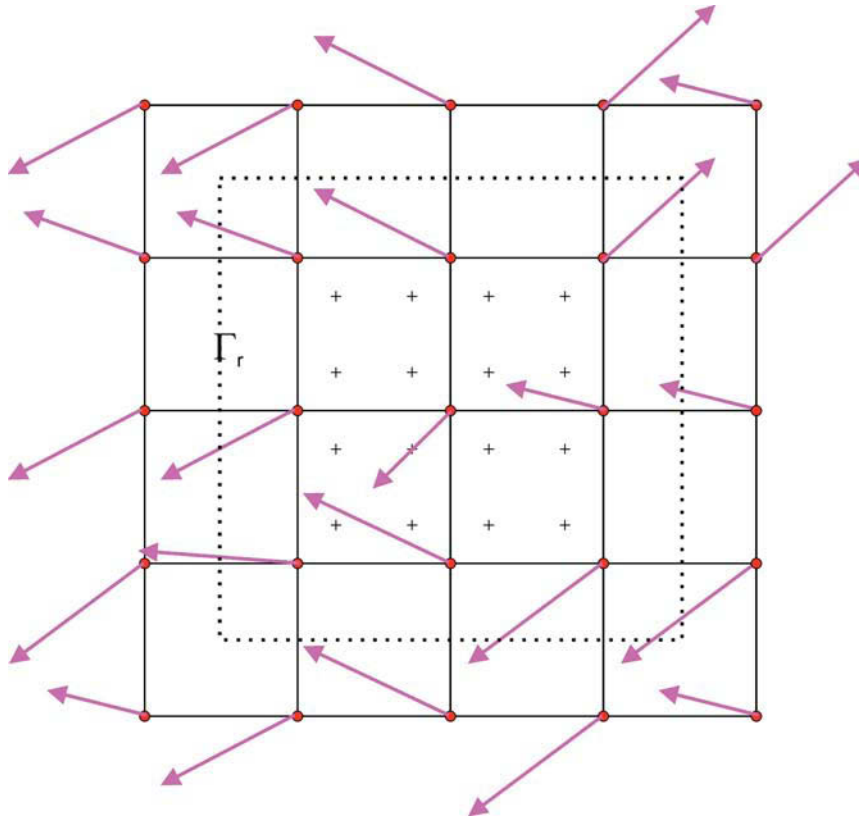


Abbildung 4.3: Ermittlung des J -Integrals über einen Bereich Γ_r mittels dem CFC

spielt für die Berechnung von J^{nel} keine Rolle, denn nach Gleichung (4.7) treten in einem homogenen nichtlinear-elastischen Material ohne Defekte keine Configurational Forces auf. In einem elastisch-plastischen Material treten jedoch Configurational Forces aufgrund des Gradienten in der plastischen Dehnung auf. Dadurch setzen sich die Configurational Forces am Rand des Integrationspfades auch aus einem Teil der umliegenden Elemente zusammen. Der Integrationspfad ist nicht identisch mit den Elementkanten, sondern verläuft in der Mitte der Nachbarelemente. J^{ep} ist nicht wegunabhängig und wird innerhalb der plastischen Zone netzabhängig.

Auch der Plasticity Influence Term C_p kann numerisch durch die Summierung der Configurational Forces in einem vorgegebenen Bereich berechnet werden [17],

$$C_p = \sum_{\mathcal{B}-\mathcal{B}_{\Gamma_1}} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}^K) \Delta A_e . \quad (4.47)$$

Der Pfad Γ_1 bezeichnet dabei den ersten Integrationspfad um die Risspitze. Dieser beinhaltet nur den Rissspitzenknoten. \mathcal{B}_{Γ_1} bezeichnet den Bereich innerhalb der Kontur Γ_1 . Das heißt also, dass der Rissspitzenknoten bei der Aufsummierung nicht berücksichtigt wird. Alternativ kann der Plasticity Influence Term auch über $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ berechnet werden,

$$C_p = -(J_{\text{far}}^{\text{ep}} - J_{\Gamma_1}^{\text{ep}}) \quad (4.48)$$

Das Fernfeld J -Integral wird durch die Summierung aller Configurational Forces im Körper \mathcal{B} berechnet, wobei der Rand des Körpers nicht mitberücksichtigt wird,

$$J_{\text{far}} = \sum_{\mathcal{B}-\partial\mathcal{B}} -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}^K) \Delta A_e . \quad (4.49)$$

Um den Material Inhomogeneity Term nach Gleichung (4.22) an einem scharfen Interface numerisch zu berechnen, gibt es zwei Möglichkeiten:

Die Spannungen bzw. die Dehnungen können direkt an den Integrationspunkten des Finiten Elements berechnet werden, und C_{inh} wird über numerische Integrationsmethoden ermittelt. Oder die Spannungen bzw. die Dehnungen werden an den Elementknoten berechnet und der Material Inhomogeneity Term wird über die Gaußsche Trapezformel ermittelt.

In dieser Arbeit wurde die Gaußsche Trapezformel verwendet. Daher muss das Netz in der Umgebung des Interfaces sehr fein sein, um akzeptable Ergebnisse zu erhalten.

Ursprünglich wurde das Configurational Force Concept von Müller et al. [58, 59] ver-

wendete um die Genauigkeit eines FE-Netzes zu bestimmen. Nach Gleichung (4.7) ist die Divergenz des Eshelby-Tensors in einem homogenen Körper ohne Defekte gleich Null. Diese Eigenschaft kann nun verwendet werden, um die Genauigkeit des Netzes zu überprüfen, denn bei einer ungenauen FE-Berechnung entstehen im inneren des Körpers Configurational Forces, die nur numerischen Ursprungs sind. Dies führt wiederum dazu, dass oft nicht unterschieden werden kann, ob die auftretenden Configurational Forces physikalischen oder numerischen Ursprungs sind. Auch eine Verfeinerung des FE-Netztes ist nur bis zu einem gewissen Grad sinnvoll. Sind die Elemente zu klein, kommt es bei Verformungen zu starken Verzerrungen der Elemente und damit wieder zu großen numerischen Fehlern.

Kapitel 5

Motivation und Aufgabenstellung

Wie bereits in Kapitel 3.4.2 erwähnt, ist das J -Integral Konzept von Rice [4] nur für ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten definiert und kann somit im Allgemeinen nicht für ein elastisch-plastisches Materialverhalten angewendet werden. Um das J -Integral trotzdem verwenden zu können, hat man das elastisch-plastische Materialverhalten über die Deformationstheorie der Plastizität beschrieben. Bei der Anwendung der Deformationstheorie wird allerdings vorausgesetzt, dass die Verformungen des Materials proportional zu den Spannungen sind (siehe Abschnitt 2.5.2.2). Dadurch wird angenommen, dass die gesamte Formänderungsenergiedichte reversibel ist. Ein elastisch-plastisches Material wird somit als ein nichtlinear-elastisches Material behandelt. Dadurch gibt es große Einschränkungen bei der Anwendung des herkömmlichen J -Integrals (J^{nel}). Die wichtigsten Einschränkungen sind:

- J^{nel} beschreibt nicht die risstreibende Kraft bei einem elastisch-plastischen Materialverhalten.
- J^{nel} gilt nur für stationäre Risse unter der Bedingung dass die Belastung proportional ist.

In der Praxis wird J^{nel} jedoch auch oft für wachsende Risse oder bei nicht proportionaler Belastung angewendet, wie z.B in [49, 50].

In Simha et al. [17] wurde eine neue Art von J -Integral (J^{ep}) abgeleitet, welches diesen Einschränkungen nicht unterliegt. Simha et al. [17] verwendeten das Configurational Force Concept um die risstreibende Kraft, und somit das J -Integral, für elastisch-plastische Materialien unter Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie zu bestimmen. Dieses „neue“ J -Integral gilt sowohl für stationäre Risse, als auch für wachsende Risse.

In Simha et al. [17] wurde jedoch nur ein einfaches Beispiel einer Bruchmechanikprobe behandelt. In diesem Beispiel wurden die Verteilung von \mathbf{f}^{ep} , und die J -Integrale für einen stationären Riss berechnet.

Über die Eigenschaften von J^{ep} ist allerdings noch sehr wenig bekannt.

In der vorliegenden Arbeit sollen einige Beispiele behandelt werden, um die Eigenschaften von J^{ep} zu beschreiben. Dafür werden numerische Studien an unterschiedlichen Proben mit unterschiedlichen Belastungen durchgeführt. Diese Studien sollen die folgenden Fragen klären:

- Wie groß ist die risstreibende Kraft als Skalar $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ oder als Vektor $\mathbf{J}_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ bzw. $\mathbf{f}_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ für ein homogenes elastisch-plastisches Material bei einem stationären Riss und bei einem wachsenden Riss?
- Kann man die risstreibende Kraft mittels numerischer Methoden überhaupt bestimmen?
- Wie groß sind $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$, $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ und C_p in Abhängigkeit vom Spannungszustand (ESZ, EDZ) und von der Größe der plastischen Zone?
- Wie sieht die Verteilung der Configurational Forces in einem elastisch-plastischen Material unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes bzw. eines ebenen Dehnungszustandes aus?
- Wie kann man mit Hilfe des CFC die Rissausbreitungsrichtung bei einer Mixed-Mode-Belastung bestimmen?
- Wie wird die risstreibende Kraft von Materialinhomogenitäten beeinflusst?

Zusätzlich wird bei allen Berechnungen J^{ep} mit J^{nel} verglichen. Dadurch soll festgestellt werden, wie groß der Fehler ist, der in der konventionellen Bruchmechanik gemacht wird, wenn J^{nel} verwendet wird.

Kapitel 6

Der stationäre Riss

In diesem Kapitel soll zunächst der Unterschied zwischen dem herkömmlichen J -Integral von Rice [4] und dem inkrementellen J -Integral von Simha et al. [17] anhand eines stationären Risses beschrieben werden.

Dafür betrachten wir die Verteilung der Configurational Forces in einer C(T)-Probe, einmal unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustandes (EDZ) und einmal unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes (ESZ). Anschließend werden die aus den Configurational Forces berechneten J -Integrale mit den J -Integralen aus ABAQUS, welche mittels der „VCE“-Methode berechnet werden, verglichen.

Das ABAQUS J -Integral wird in weiterer Folge als J^{vce} bezeichnet und die aus den Configurational Forces ermittelten J -Integrale als J^{nlel} und J^{ep} . Dabei wird die Bezeichnung J^{nlel} verwendet, wenn das J -Integral über die Deformationstheorie der Plastizität berechnet wird („nlel“ steht für nichtlinear-elastisch), und die Bezeichnung J^{ep} wird verwendet, wenn das J -Integral mittels der inkrementellen Plastizitätstheorie berechnet wird („ep“ steht für elastisch-plastisch). Weiters werden die Configurational Forces als nichtlinear-elastische Configurational Forces, \mathbf{f}^{nlel} , bezeichnet, wenn sie bei Anwendung der Deformationstheorie der Plastizität berechnet werden und als elastisch-plastische Configurational Forces, \mathbf{f}^{ep} , wenn sie bei Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie berechnet werden. Die Bezeichnung nichtlinear-elastische bzw. elastisch-plastische Configurational Force ist nicht ganz korrekt, da die Configurational Forces keine Eigenschaften wie nichtlinear-elastisch oder elastisch-plastisch haben.

Um den Einfluss der Belastung und somit den Einfluss der plastischen Zone zu untersuchen, werden drei verschiedene Belastungszustände modelliert.

Abschließend wollen wir uns in diesem Kapitel damit beschäftigen, ob man die „wirkliche“

risstreibende Kraft in einem elastisch-plastischen Material mit numerischen Methoden ermitteln kann. Dazu werden die unterschiedlichen J -Integrale direkt an der Rissspitze für immer kleiner werdende Elementgrößen ausgewertet.

6.1 Modellgeometrie und Materialdaten

Für die Berechnung des J -Integrals und der Configurational Forces in einem elastisch-plastischen Material wurde ein vereinfachtes 2D Modell der in Abbildung 6.1 dargestellten C(T)-Probe erstellt (siehe Abbildung 6.2). Die Abmessungen des Modells betragen: Höhe $h = 60$ mm, Weite $W = 50$ mm und Dicke $B = 25$ mm.

Es reicht aus, die Probe nur ab den Krafteinleitungspunkten zu modellieren und den Riss als Linie mit einer unendlich „scharfer“ Rissspitze anzunehmen, wobei die Ausgangsrisslänge $a_0 = 27$ mm beträgt.

Das FE-Modell der C(T)-Probe wurde in unterschiedliche Bereiche unterteilt (siehe Abbildung 6.2), um ihr verschiedene Materialeigenschaften und Elementgrößen zuordnen zu können. Die Mitte der Probe, welche hier mit Bereich A bezeichnet wird, besteht aus einem 6×6 mm großen Bereich um die Rissspitze. Dieser Bereich wurde strukturiert mit isoparametrischen linearen Elementen (CPE4 bzw. CPS4) aufgefüllt, wobei die Element-

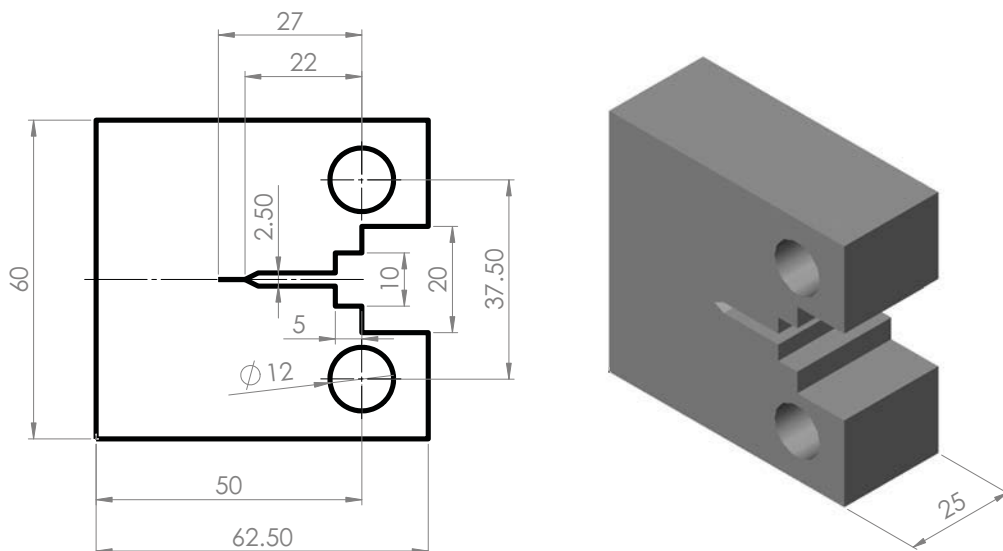


Abbildung 6.1: Abmessungen der verwendeten C(T)-Probe

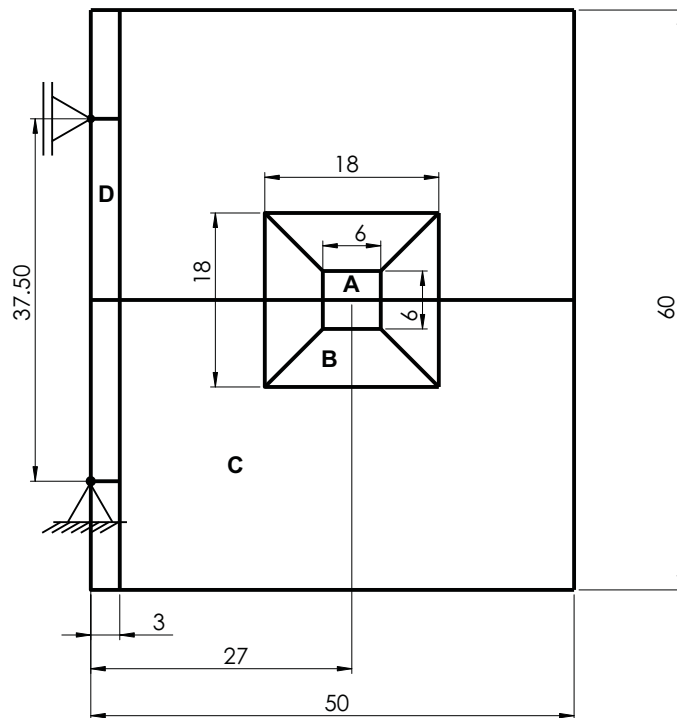


Abbildung 6.2: Abmessungen des vereinfachten 2D-Modells der C(T)-Probe

größe bei den unterschiedlichen Modellen variiert wurde, um den numerischen Einfluss des Netzes zu bestimmen. An den Bereich A wurde ein 18 x 18 mm großer Bereich angeschlossen (Bereich B), der ebenfalls aus isoparametrischen linearen Elementen besteht und auch strukturiert aufgebaut wurde, um den Einfluss des Netzes in der Umgebung der Risspitze und der plastischen Zone so gering wie möglich zu halten. Der Rest der Probe (Bereich C) wurde anschließend mit isoparametrischen linearen Elementen unter Verwendung des freien Vernetzungswerkzeuges von ABAQUS aufgefüllt.

Das Aufbringen der Belastung erfolgte nicht über die in Abbildung 6.1 dargestellten Bohrungen, sondern über die Verschiebung zweier Knoten am linken Rand der Probe. Bei elastisch-plastischen Modellen soll die Kraftaufbringung bzw. die Lagerung nicht an einzelnen Knoten erfolgen, sondern durch Kontaktmodelle oder elastisch versteifte Teilgebiete realisiert werden [29]. Um das Modell so einfach wie möglich zu halten und um eine optimale Krafteinleitung zu gewährleisten, wurden dem Bereich D (siehe Abbildung 6.2) linear-elastische Materialeigenschaften mit einem E-Modul von $E = 200$ GPa zugewiesen. Solange sich das Material entlang der Grenze zwischen Bereich C und D nur elastisch verformt, besitzen beide Bereiche die gleichen Materialeigenschaften. Für die Modellierung des elastisch-plastischen Materialverhaltens im Rest der Probe wurden die Spannungs-Dehnungsdaten eines Stahls mit der Bezeichnung S235 verwendet. Die wahre Spannungs-

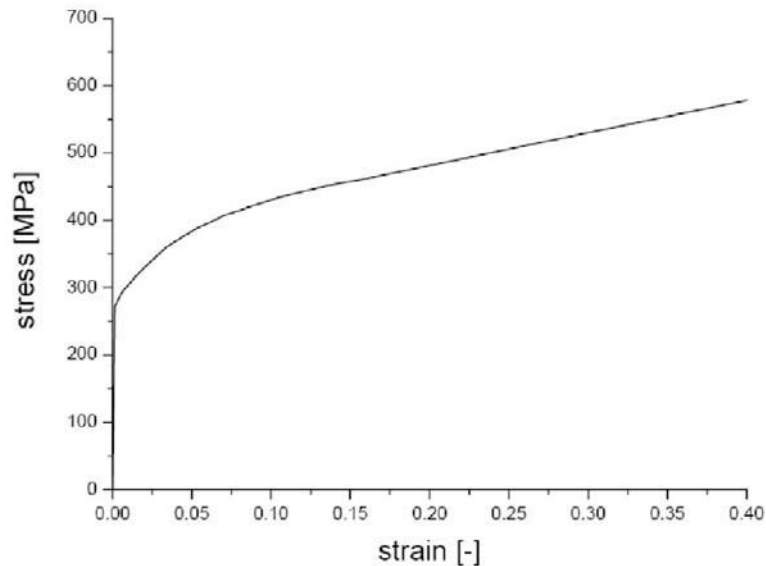


Abbildung 6.3: Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurve eines S235

Dehnungs-Kurve ist in Abbildung 6.3 dargestellt, wobei die ausgeprägte Streckgrenze, die dieses Material aufweist, vernachlässigt wurde. Das Material verhält sich bis zur Streckgrenze linear-elastisch und danach plastisch. Die Materialdaten des S235 sind: E-Modul $E = 200$ GPa, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Streckgrenze $\sigma_Y = 270$ MPa, Zugfestigkeit $\sigma_u = 426$ MPa, durchschnittlicher Verfestigungsexponent $n = 0.2$.

Die Verformungen und die daraus resultierenden Spannungen wurden mit Hilfe der inkrementellen Plastizitätstheorie (siehe Abschnitt 2.5.2.3) mit dem FE-Programm ABAQUS [38] berechnet. Alle Berechnungen wurden sowohl für den ebenen Dehnungszustand als auch für den ebenen Spannungszustand durchgeführt. Bei den Berechnungen wurde auch die Annahme kleiner und großer Verformungen vorgesehen.

Um den Einfluss der Belastung und der Größe der plastischen Zone auf die ristreibende Kraft zu bestimmen, wurden drei Modelle mit unterschiedlichen Belastungen modelliert. Im ersten Modell wurden der obere Knoten für die Krafteinleitung (Abbildung 6.2) um $v_{LL} = 0.1$ mm in y-Richtung verschoben, wodurch nur eine kleine plastische Zone um die Rissspitze entsteht (siehe Abbildung 6.4(a)). Dieser Belastungszustand wird als Kleinbereichsfließen oder auch Contained Yielding bezeichnet. Im zweiten Modell beträgt die Lastlinienverschiebung $v_{LL} = 0.25$ mm. Dabei beginnt sich die Probe auch an der Rückseite plastisch zu verformen, wodurch plastische Zonen um die Rissspitze und an der Probenrückseite entstehen (siehe Abbildung 6.4(b)). Dieser Zustand wird auch als Großbereichsfließen oder Uncontained Yielding bezeichnet. Im dritten Modell wurde die Belastung so gewählt, dass die Probe durchplastifiziert ist (siehe Abbildung 6.4(c)). Das

bedeutet, dass es einen durchgehend plastisch verformten Bereich gibt, der sich von der Risspitze bis zur Probenrückseite erstreckt (General Yielding).

Weiters wurde auch noch der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität untersucht. Bei großen, endlichen Verformungen treten zwei Arten von Nichtlinearitäten auf. Wenn die Verschiebungen groß gegenüber der Ausgangslage sind, muss bei der numerischen Berechnung der Dehnungen und Spannungen eine Umverteilung des Kräftegleichgewichts und der Lastrandbedingungen auf die verformte Struktur erfolgen. Des Weiteren ist bei großen Verformungen der Zusammenhang zwischen den Verzerrungstensoren und den Verschiebungsgradienten nicht mehr linear. In der Umgebung von Risspitzen treten immer große Verformungen auf. Daher sollte eine FE-Analyse immer unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten durchgeführt werden. Im folgenden werden alle Berechnungen „geometrisch nichtlinear“ (Large Strain Theorie) durchgeführt.

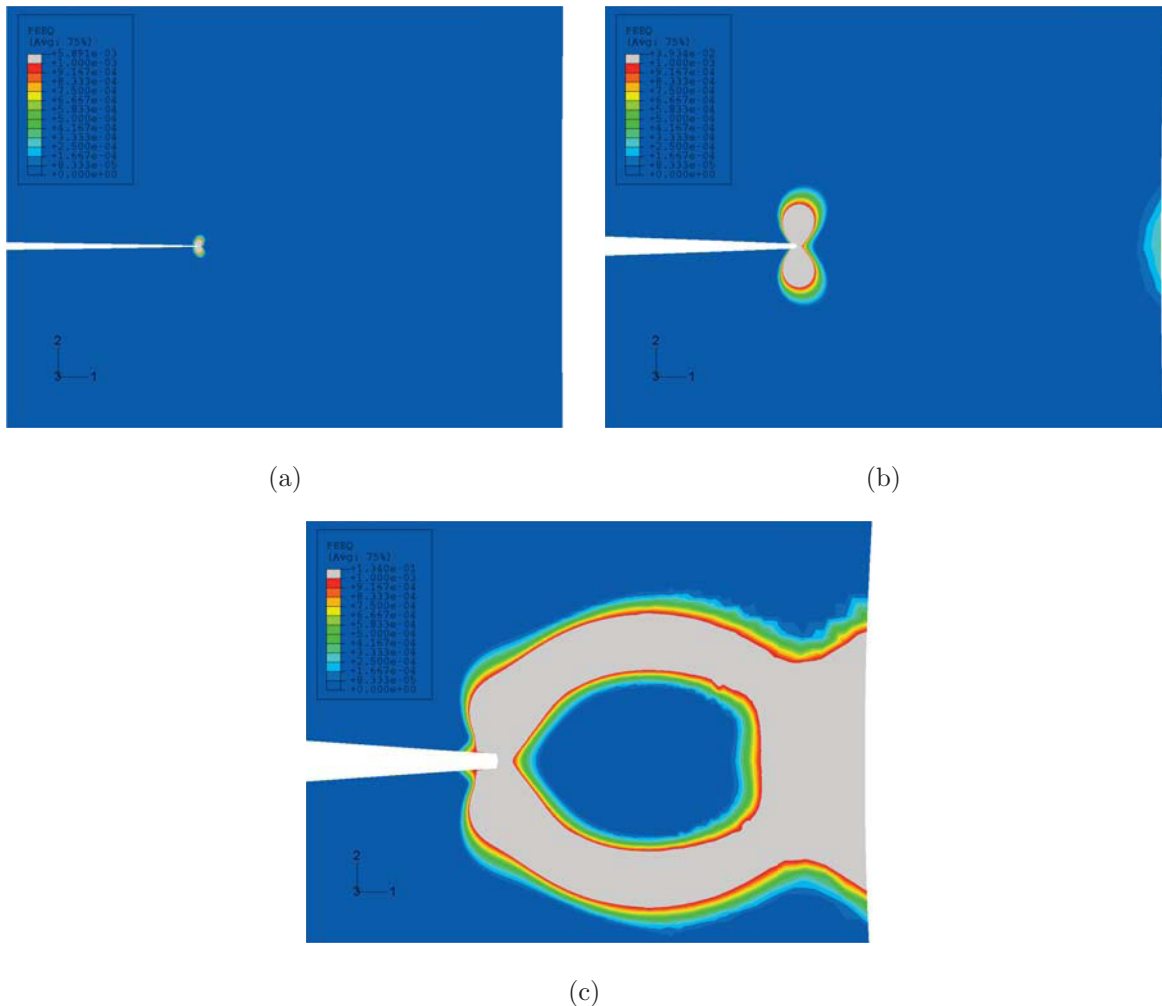


Abbildung 6.4: Plastische Zone um die Risspitze für a) $v_{LL} = 0.1$ mm, b) $v_{LL} = 0.25$ mm und c) $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ.

Um den Einfluss des FE-Netzes auf die Ergebnisse zu untersuchen, wurden alle Modelle mit unterschiedlichen Elementgrößen im Bereich A (siehe Abbildung 6.2) modelliert. Dabei wurden Elementgrößen von $m = 0.3$ mm bis $m = 7.8125 \cdot 10^{-4}$ mm verwendet.

Um die Wegabhängigkeit des J -Integrals in elastisch-plastischen Materialien zu beschreiben, wurde das J -Integral direkt am Risspitzenknoten und für verschieden Integrationspfade (bzw. Integrationsbereiche) um die Risspitze berechnet (siehe Abbildung 6.5). Dabei befindet sich die Risspitze immer in der Mitte des Integrationspfades Γ_i . Das J -Integral direkt am Risspitzenknoten wird im weiteren Verlauf als J_{tip} bezeichnet, und die J -Integral aus den Integrationspfaden Γ_i bezeichnen wir als J_{Γ_i} . Für die Berechnung von J_{far} wurde ein Pfad nahe an der Probenoberfläche verwendet der sich immer eine Elementreihe hinter der Probenoberfläche befindet und auch den Bereich D ausschließt.

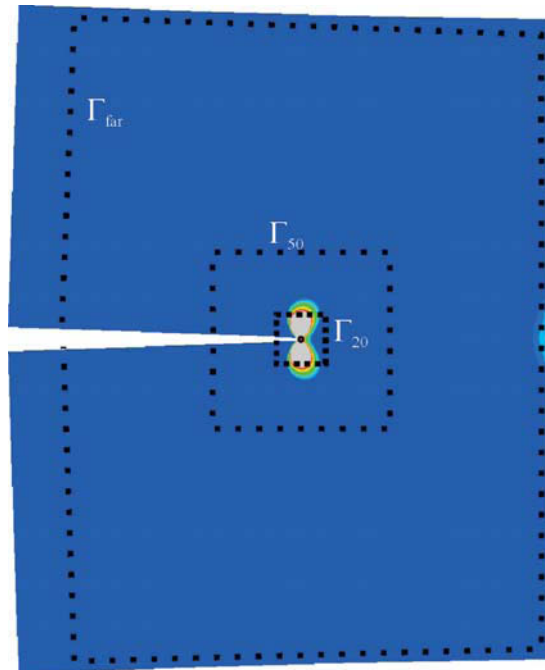


Abbildung 6.5: Verschiedene Integrationspfade zur Bestimmung des J -Integrals

6.2 Verteilung der Configurational Forces in der C(T) Probe

6.2.1 Ebener Dehnungszustand

In den Abbildungen 6.6 und 6.8 sind die Configurational Forces in einer C(T)-Probe bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.5$ mm dargestellt (General Yielding Conditions). In Abbildung 6.6 sieht man die nichtlinear-elastischen Configurational Forces an

der Rissspitze und in der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze. Verwendet man die Deformationstheorie zur Berechnung der Configurational Forces, erhält man direkt im Rissspitzenknoten eine große Configurational Force. In den Nachbarknoten treten kleinere Configurational Forces auf, die mit zunehmendem Abstand zur Rissspitze immer kleiner werden und in einem Abstand von ca. 7 Elementen um die Rissspitze verschwinden. Die Configurational Force an der Rissspitze ergibt sich aus Gleichung (4.42) und zeigt somit nicht in Rissausbreitungsrichtung sondern ihr entgegen. In Simha et al. [17, 50] wurde gezeigt, dass in einem homogenen elastisch-plastischen Material unter Annahme von nichtlinear-elastischem Materialverhalten nur an der Rissspitze Configurational Forces auftreten. Bei der numerischen Berechnung der Configurational Forces erhält man jedoch

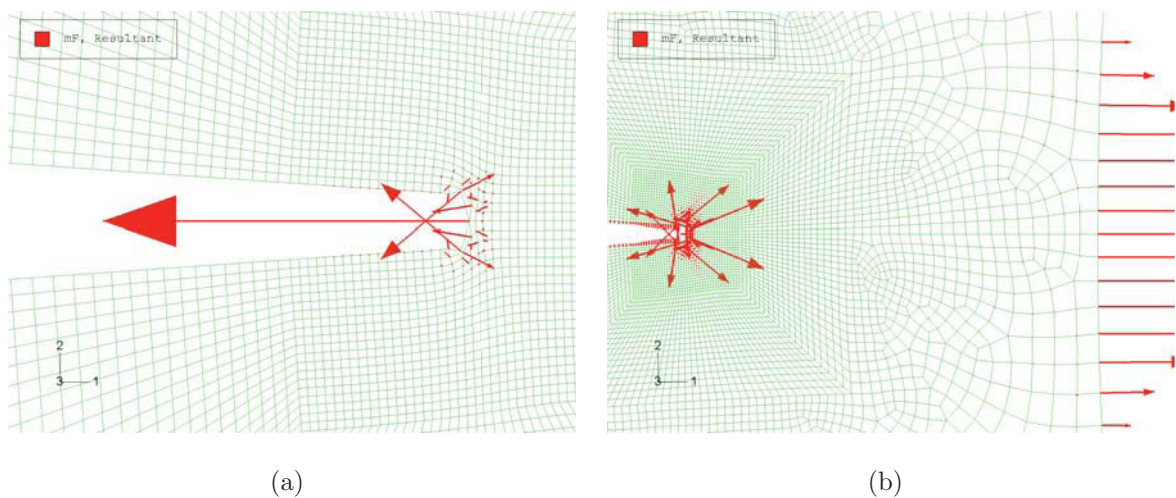


Abbildung 6.6: Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, Deformationsplastizität und EDZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite

auch in der Umgebung der Rissspitze Configurational Forces. Das Auftreten dieser Kräfte hat zwei Ursachen:

1) Durch die Verwendung linearer Ansatzfunktionen in der FE-Analyse kann die Singularität an der Rissspitze nicht richtig wiedergegeben werden. Die Diskretisierung der Spannungen und Dehnungen in den Elementen führt dazu, dass sich die Configurational Forces in den Rissspitzenelementen nicht auf den Rissspitzenknoten konzentrieren sondern sich zusätzlich auf die Nachbarknoten verteilen. In Abbildung 6.7 ist diese Verteilung zu erkennen. Die Configurational Force am Rissspitzenknoten beträgt, $-(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_{tip}^{nlel}) \Delta A_e = 31.72 \text{ kJm}^{-2}$. In den Knoten K2 und K3 (siehe Abbildung 6.7) hinter der Rissspitze be-

tragen die Configurational Forces noch $-(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_{K2}^{\text{nl}}) \Delta A_e = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_{K3}^{\text{nl}}) \Delta A_e = 6.94 \text{ kJm}^{-2}$ und können daher nicht vernachlässigt werden. Die gesamte risstreibende Kraft bzw. das J -Integral ergibt sich also aus der Vektorsumme der Configurational Forces an der Risspitze und der Configurational Forces in den umliegenden 9 Knoten, wobei nur die Komponenten in Rissausbreitungsrichtung einen Beitrag zur risstreibenden Kraft liefern. Das J -Integral um die ersten 9 Knoten der Risspitze, $J_{\Gamma_1}^{\text{nl}}$, liefert in den meisten Fällen bereits brauchbare Werte ($J_{\Gamma_1}^{\text{nl}} = 44.72 \text{ kJm}^{-2}$) und weicht nicht mehr allzu stark von $J_{\text{far}}^{\text{nl}} = 48.2 \text{ kJm}^{-2}$ ab.

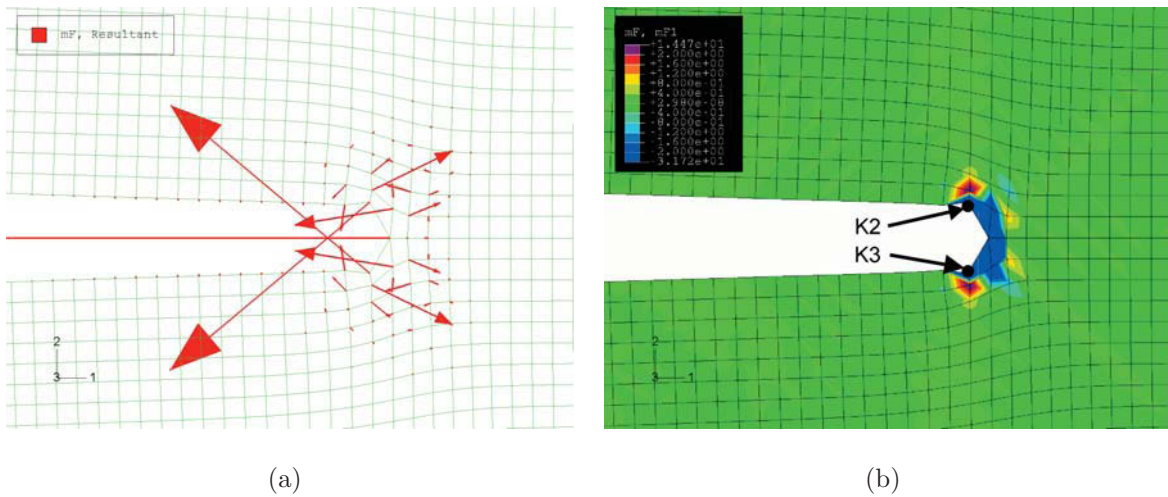


Abbildung 6.7: a) Configurational Forces in der Umgebung der Risspitze, b) Verteilung der Configurational Forces in den Elementen um die Risspitze für $v_{LL} = 0.5 \text{ mm}$, $m = 0.15 \text{ mm}$, Deformationsplastizität und EDZ

Quadratische Ansatzfunktionen bilden die Singularität an der Risspitze besser ab, sind aber nicht besonders gut geeignet für eine Risswachstumssimulation. Daher werden in dieser Arbeit nur lineare Elemente verwendet.

2) Configurational Forces entstehen durch numerische Fehler bei der Berechnung der Spannungen und Dehnungen [58, 60]. Durch die hohe plastische Verformung in der Umgebung der Risspitze kommt es zu einer starken Verzerrung der Elemente in diesem Bereich. Dadurch sind die numerischen Fehler in der Umgebung der Risspitze besonders groß, und es treten entsprechend große Configurational Forces auf. Diese sind auf die Umgebung der Risspitze beschränkt und werden mit zunehmendem Abstand zur Risspitze immer kleiner (siehe Abbildung 6.6(a)).

Wie man aus Abbildung 6.6(b) erkennen kann, treten entlang der Rissflanken und an der Probenoberfläche ebenfalls Configurational Forces auf. Diese ergeben sich aus dem

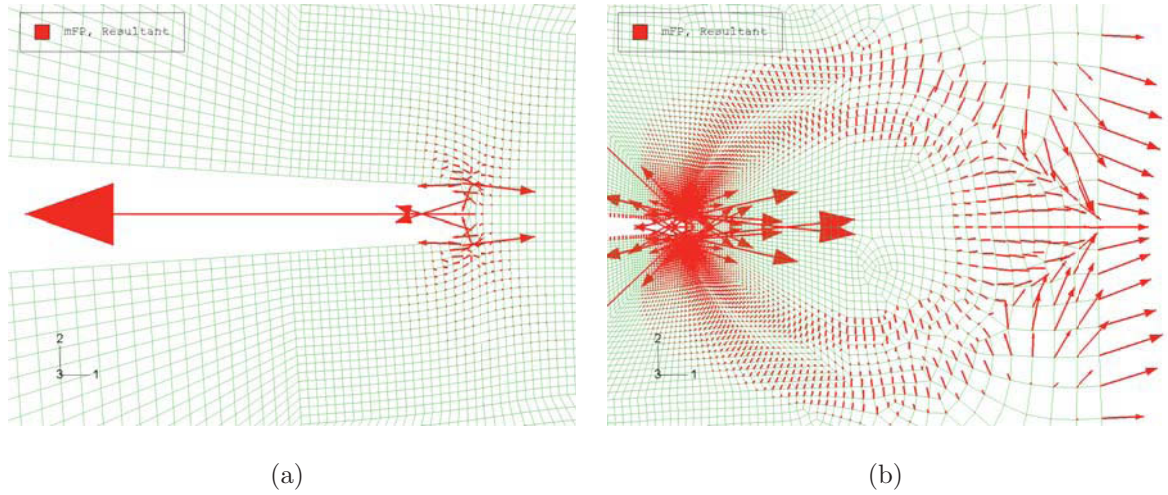


Abbildung 6.8: Configurational Forces an der Risspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, inkrementelle Plastizität und EDZ. a) Detailaufnahme der Risspitze, b) Configurational Forces im Risspitzenbereich (ohne CF an der Risspitze) und an der Probenrückseite

Sprung der Materialeigenschaften (Material/Luft) an den freien Oberflächen und sind umso größer, je größer der Unterschied in der Formänderungsenergie-dichte ist (siehe Gleichung (4.22)). Die Configurational Forces an den Rissflanken stehen senkrecht auf die Rissflanken und sind bei einer Mode I-Belastung an der oberen und der unteren Rissflanke gleich groß und entgegengesetzt. Dadurch heben sie sich bei einer Summierung gegenseitig auf und tragen nicht zur risstreibenden Kraft bei.

In Abbildung 6.8 sind die elastisch-plastischen Configurational Forces an der Risspitze, \mathbf{f}_{tip}^{ep} , und in der plastischen Zone, \mathbf{f}^{ep} , bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.5$ mm dargestellt. Wie bei den Configurational Forces nach der Deformationstheorie tritt auch bei der inkrementellen Plastizitätstheorie eine große Configurational Force direkt an der Risspitze auf, $-(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_{tip}^{ep}) \Delta A_e = 38.58 \text{ kJm}^{-2}$ (Abbildung 6.8(a)). Durch die Diskretisierung der Spannungen und Dehnungen entstehen auch hier wieder Configurational Forces in allen Knoten der Risspitzenelemente, und die risstreibende Kraft ergibt sich aus der Vektorsumme dieser Kräfte.

Anders als bei der Deformationstheorie treten bei Verwendung der inkrementellen Theorie Configurational Forces nicht nur in der unmittelbaren Umgebung der Risspitze sondern auch in der gesamten plastischen Zone (siehe Abbildung 6.8(b)) auf. Nach Simha et al. [17] findet man diese elastisch-plastischen Configurational Forces überall dort, wo es einen Gradienten in der plastischen Verformung gibt. In den Risspitzenelementen ergeben sich

die elastisch-plastischen Configurational Forces einerseits durch die Rissspitze selbst und andererseits durch die plastische Verformung der Elemente. Diese beiden Effekte treten in einem elastisch-plastischen Material immer gemeinsam auf und können bei der numerischen Berechnung auch nicht getrennt werden. Vergleicht man Abbildung 6.8(b) mit Abbildung 6.4(c), sieht man, dass der Bereich, in dem Configurational Forces auftreten, mit der plastischen Zone zusammenfällt. Die Configurational Forces in der plastischen Zone zeigen immer in Richtung der größeren plastischen Verformung. Im plastisch verformten Bereich ist durch die Erhöhung der Streckgrenze erhöhte elastische Verformungsenergie gespeichert. Dadurch entstehen treibende Kräfte auf den verformten Bereich, die diesen Bereich minimieren wollen. Summiert man die elastisch-plastischen Configurational Forces nach Gleichung (4.48) auf, erhält man den Plasticity Influence Term, C_p .

Solange sich die Verformung auf den Rissspitzenbereich beschränkt, treten die elastisch-plastischen Configurational Forces um die Rissspitze symmetrisch auf, wodurch bei der Aufsummierung der Plasticity Influence Term nahezu Null wird. Für eine elastisch-idealplastisches Material kann gezeigt werden, dass $C_p = 0$ ist, solange die plastische Zone der Rissspitze von der plastischen Zone der Probenrückseite separiert ist.

6.2.2 Ebener Spannungszustand

Im ebenen Spannungszustand hat die plastische Zone eine andere Form als im ebenen Dehnungszustand. Sie liegt zum größten Teil kreisförmig vor der Rissspitze. In den Ab-

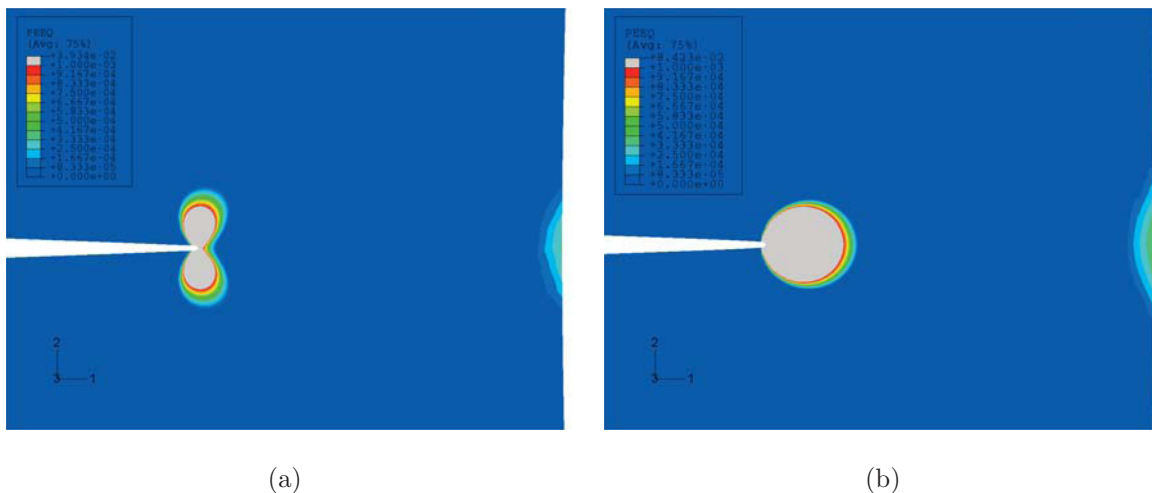


Abbildung 6.9: Plastische Zone bei $v_{LL} = 0.25$ mm für a) EDZ und b) ESZ

bildungen 6.9(a) und 6.9(b) sind die plastischen Zonen einmal für den EDZ und einmal für den ESZ bei einer Belastung von $v_{LL} = 0.25$ mm dargestellt. Auch im ESZ beginnt

sich die Probe bei $v_{LL} = 0.25$ mm an der Rückseite plastisch zu verformen. Wie man aus Abbildung 6.11 erkennen kann, sind die Configurational Forces im ESZ anders angeordnet als im EDZ. Sie liegen, wie die plastische Zone, zum größten Teil vor der Rissspitze.

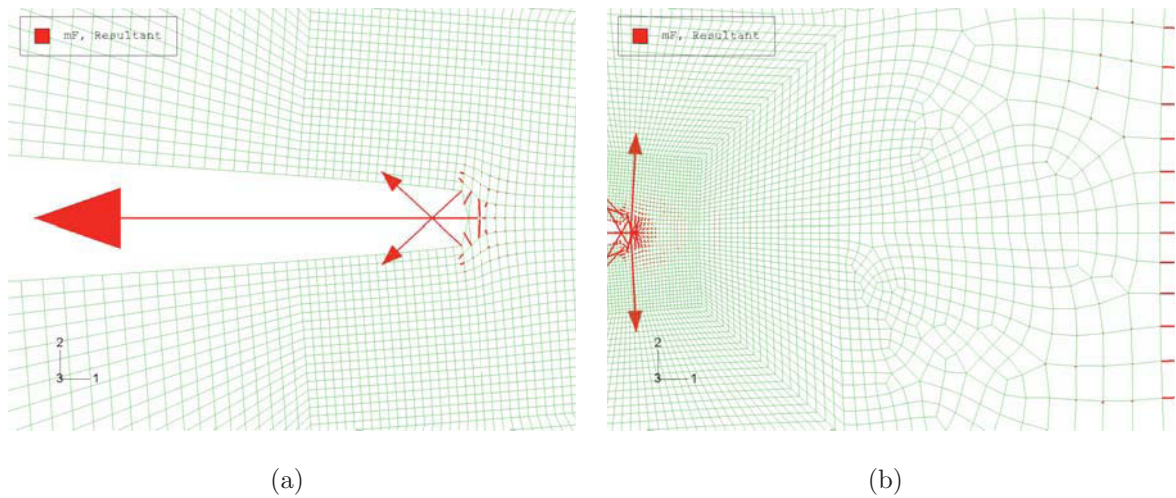


Abbildung 6.10: Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, Deformationsplastizität und ESZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite

Auch hier zeigen die Kraftvektoren in Richtung zunehmender Verformung und die Summe aller elastisch-plastischen Configurational Forces, die in der plastischen Zone um die Rissspitze liegen, ist annähernd Null.

In den Abbildungen 6.10 und 6.11 sind die Configurational Forces in der C(T)-Probe bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.5$ mm dargestellt. Auch im ESZ tritt an der Rissspitze eine große Configurational Force auf.

Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces in der Umgebung der Rissspitze (Abbildung 6.10(a)) ergeben sich wieder aus den numerischen Ungenauigkeiten bei der Berechnung und durch die Verwendung der linearen Elemente.

Aus Abbildung 6.11 ist zu erkennen, dass die elastisch-plastischen Configurational Forces im Material überall dort auftreten, wo ein Gradienten der plastischen Verformung, existiert.

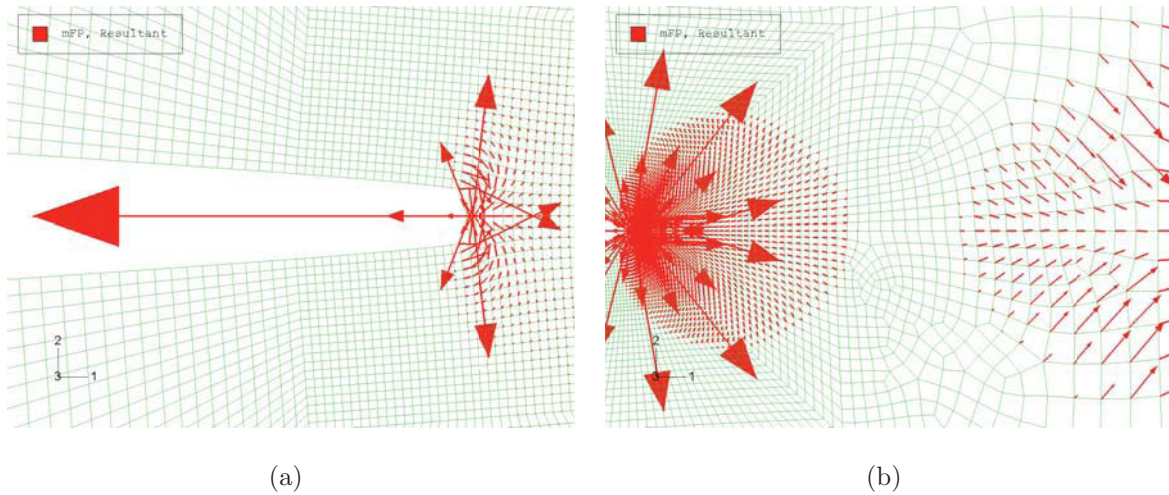


Abbildung 6.11: Configurational Forces an der Riss Spitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, inkrementelle Plastizität und ESZ. a) Detailaufnahme der Riss Spitze, b) Configurational Forces im Riss Spitzenbereich (ohne CF an der Riss Spitze) und an der Probenrückseite

6.3 Vergleich von J^{vce} und J^{nlel}

Um festzustellen ob die Berechnung des J -Integrale mittels der Post-Processing-Routine richtig erfolgt, wurden die J -Werte zusätzlich mittels der in ABAQUS integrierten „VCE“-Methode berechnet und anschließend mit den J^{nlel} -Werten aus der Post-Processing-Routine verglichen. Dabei wurden die J -Integrale für unterschiedliche Integrationspfade und für verschiedene Elementgrößen berechnet. Zusätzlich erfolgten die Berechnungen einmal unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustandes und einmal unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes.

6.3.1 Ebener Dehnungszustand

Die Abbildungen 6.12(a) und 6.12(b) stellen die Ergebnisse aus den beiden Berechnungsmethoden gegenüber. Abbildung 6.12(a) zeigt J^{vce} als Funktion der Lastlinienverschiebung v_{LL} , und in Abbildung 6.12(b) ist J^{nlel} als Funktion der Lastlinienverschiebung dargestellt.

Man sieht, dass die J^{vce} -Kurven über die gesamte Belastung identisch mit den J^{nlel} -Kurven sind. Dies gilt im Bereich des Kleinbereichsfließen und Großbereichsfließen. J^{vce} und J^{nlel} zeigen bei kleinen Belastungen die bekannte quadratische Abhängigkeit von der Lastlinienverschiebung, welche bei großen Verformungen in eine lineare Abhängigkeit

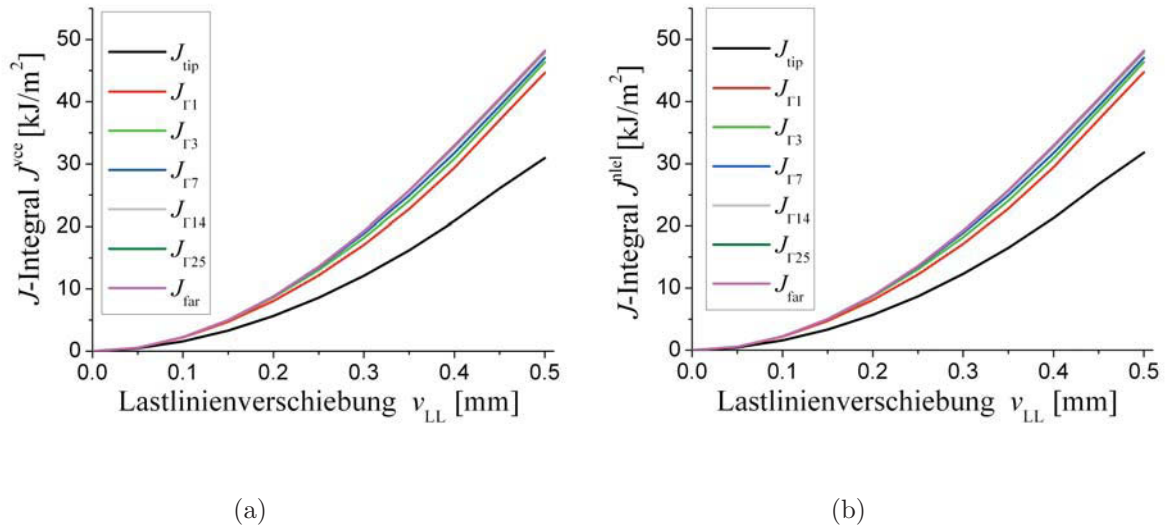


Abbildung 6.12: J^{vce} und J^{nlel} über v_{LL} für mehrere Integrationspfade; bei $m = 0.15$ mm und EDZ.

übergeht. Bei kleinen Belastungen ist sowohl J^{vce} als auch J^{nlel} unabhängig vom Integrationspfad, und alle $J_{\Gamma_i}^{vce}$ -Werte bzw. $J_{\Gamma_i}^{nlel}$ -Werte fallen zusammen. Nur der J_{tip} -Wert weicht bereits bei kleinen Belastungen stark von den übrigen J_{Γ_i} -Werten ab. Dies gilt sowohl für das ABAQUS J -Integral als auch für das J -Integral, welches aus den Configurational Forces berechnet wurde. Die große Abweichung ist erklärbar durch die Verwendung von linearen Ansatzfunktionen zur Berechnung der Spannungen und Dehnungen in den Rissspitzenelementen. Verwendet man quadratische Ansatzfunktionen oder spezielle Rissspitzenelemente, liegt der J_{tip} -Wert bei kleinen Belastungen in der Nähe der übrigen J_{Γ_i} -Werte. Auch die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten führt dazu, dass der J_{tip} -Wert stark von den übrigen J_{Γ_i} -Werten abweicht.

Bei zunehmender Belastung weichen auch die J_{Γ_1} - und J_{Γ_3} -Werte von den übrigen Werten ab. Das J -Integral wird demnach für Pfade nahe der Rissspitze wegabhängig. Wie bereits in [37, 62, 63] gezeigt wurde, ist J^{vce} und natürlich auch J^{nlel} bei elastisch-plastischem Materialverhalten nach der inkrementellen Plastizitätstheorie wegabhängig. Nach Brocks [37] nehmen die J -Werte innerhalb der plastischen Zone für Konturen mit zunehmendem Abstand zur Rissspitze immer größere Werte an. Sie erreichen einen konstanten Wert, sobald die gesamte plastische Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Ist der plastisch verformte Bereich so groß, dass kein Integrationspfad außerhalb der plastischen Zone gefunden werden kann, entspricht der J -Wert der äußersten Kontur annähernd dem wahren J -Wert [29, 37].

6.3.2 Ebener Spannungszustand

Auch für den Fall des ebenen Spannungszustandes sind J^{vce} und J^{nlel} für Integrationspfade größer Γ_3 identisch. Die J_{tip} -Werte und auch die J_{Γ_1} -Werte unterscheiden sich geringfügig. Dieser Unterschied ergibt sich durch numerische Ungenauigkeiten bei der FE-Analyse und im Post-Processing. Die Berechnung von J^{vce} erfolgt in den Integrationspunkten der Ele-

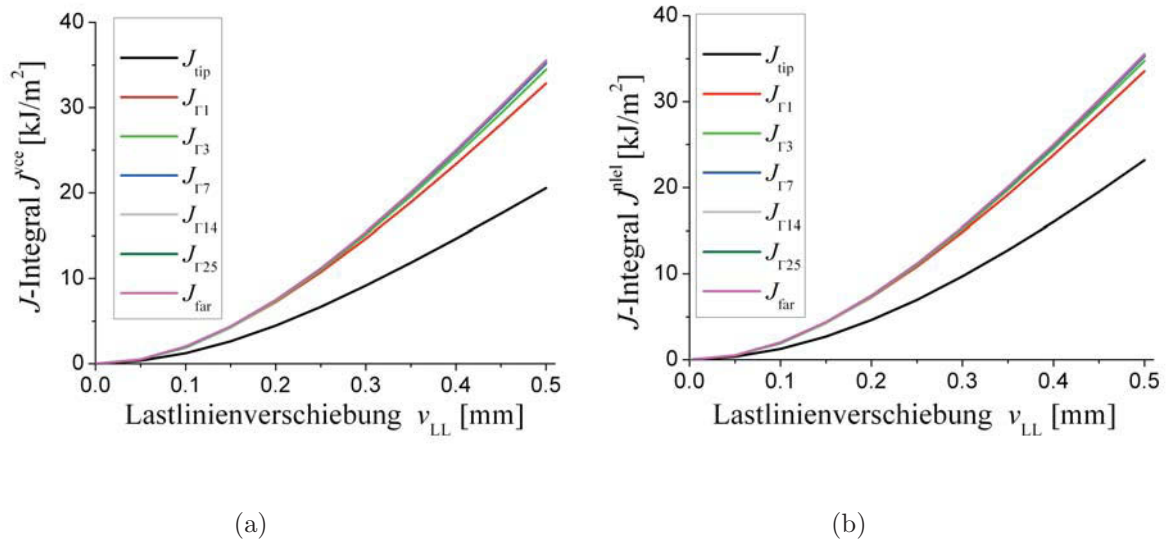


Abbildung 6.13: J^{vce} und J^{nlel} über v_{LL} für mehrere Integrationspfade; bei $m = 0.15$ mm und ESZ.

mente, wohingegen die Berechnung der Configurational Forces in den Knoten der Elemente erfolgt. Durch die Extrapolation der Integrationspunktvariablen zu den Knoten kommt es zu numerischen Ungenauigkeiten. Die numerischen Fehler sind umso größer, je größer die Verformung eines Elementes ist. Dadurch wirken sich die Fehler besonders stark in der unmittelbaren Umgebung der Risspitze aus.

In den Abbildungen 6.13(a) und 6.13(b) sind die J -Integrale für verschiedene Integrationspfade über die Lastlinienverschiebung aufgetragen. Die geringfügige Wegabhängigkeit von J ist auch im ESZ gegeben.

Auch im ebenen Spannungszustand weichen sowohl die J_{tip}^{vce} -Werte als auch die J_{tip}^{nlel} -Werte als einzige stark von den übrigen J_{Γ_i} -Werten ab.

Da die Berechnung des J -Integrals mittels Gleichung (4.18) für alle Fälle die gleichen Ergebnisse wie die „VCE“-Methode liefert, werden wir uns beim Vergleich des nichtlinear-elastischen J -Integrals mit dem elastisch-plastischen J -Integral auf die Verwendung der J -Werte aus der Post-Processing-Routine beschränken.

6.4 Vergleich von $J^{\text{nl}el}$ und J^{ep}

6.4.1 Ebener Dehnungszustand

6.4.1.1 Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)

Um den Einfluss der Belastung und somit den Einfluss der plastischen Zone auf die riss-treibende Kraft zu untersuchen, betrachten wir die in den Abbildungen 6.14, 6.16 und 6.18 dargestellten Verteilungen der Configurational Forces in einer C(T)-Probe für die

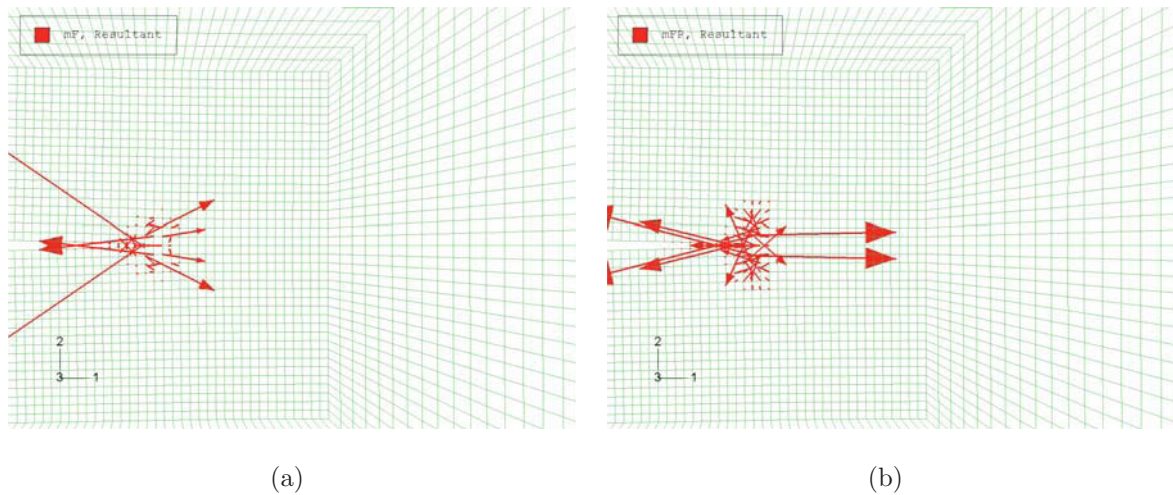


Abbildung 6.14: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{LL} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

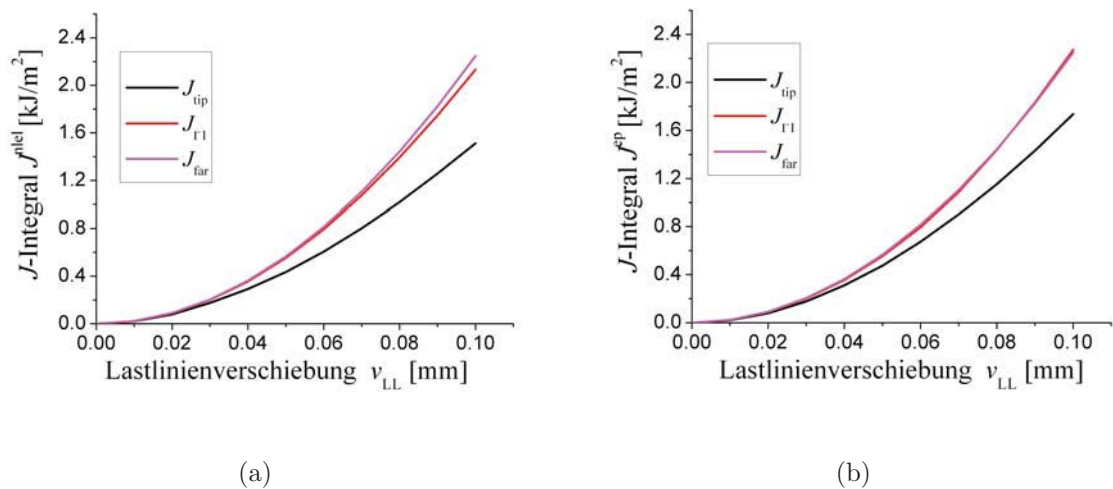


Abbildung 6.15: a) $J^{\text{nl}el}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ

drei Lastlinienverschiebungen, $v_{LL} = 0.1, 0.25$ und 0.5 mm.

In den Abbildungen 6.14(a), 6.16(a) und 6.18(a) ist die Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces und in den Abbildungen 6.14(b), 6.16(b) und 6.18(b) die Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces dargestellt.

Summiert man die Configurational Forces nach Gleichung (4.46) in unterschiedlichen Bereichen und bei unterschiedlichen Belastungen, erhält man die J -Kurven aus den Abbildungen 6.15, 6.17 und 6.19. Dabei zeigen die Abbildungen 6.15(a), 6.17(a) und 6.19(a) die J -Integrale berechnet für Deformationsplastizität und die Abbildungen 6.15(b), 6.17(b) und 6.19(b) die J -Integrale für inkrementelle Plastizitätstheorie.

Bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.1$ mm treten sowohl die nichtlinear-elastischen als auch die elastisch-plastischen Configurational Forces nur in der Umgebung der Risspitze (Bereich I) auf. Man sieht jedoch bereits bei kleinen Belastungen, dass die elastisch-plastischen Configurational Forces in der gesamten plastischen Zone auftreten und dass die nichtlinear-elastischen Configurational Forces auf einige Elemente in der Umgebung der Risspitze beschränkt sind.

Betrachtet man die J -Kurven bei dieser Belastung (Abbildung 6.15), sieht man, dass die J_{far} -Werte für beide Theorien identisch sind. Auch J^{ep} zeigt die quadratische Abhängigkeit von der Lastlinienverschiebung.

In beiden Fällen weicht J_{tip} sehr stark von J_{far} und von J_{Γ_1} ab. Diese Abweichung ergibt sich wieder durch die Verwendung linearer Ansatzfunktionen bei der FE-Analyse, durch die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten und durch die numerischen Fehler bei der Berechnung der Spannungen und Dehnungen im Bereich der Risspitze. Wie bereits beschrieben, ergibt sich die risstreibende Kraft an der Risspitze aus der Summe aller Configurational Forces in den Rissspitzenelementen. J_{Γ_1} beinhaltet gerade diesen Bereich und ist bei kleinen Verformungen gleich J_{far} .

In Tabelle 6.1 sind die J -Werte für verschiedene Konturen und bei drei verschiedenen Lastlinienverschiebungen, $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm, zusammengefasst. Wie man aus Tabelle 6.1 sehen kann, unterscheiden sich $J_{\text{tip}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ bereits bei kleinen Verformungen. Der Unterschied zwischen $J_{\text{tip}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ ergibt sich durch die Verwendung unterschiedlicher Formänderungsenergiedichten in Gleichung (4.18) und durch numerische Fehler bei der Berechnung. Wie bereits erwähnt kann man innerhalb der Rissspitzenelemente nicht unterscheiden, welcher Anteil der Configurational Force durch die Singularität an der Risspitze erzeugt wird und welcher Anteil der Configurational Force durch den Gradienten der plastische Verformung hervorgerufen wird. Auch im Riss-

spitzenknoten selbst gibt es beide Effekte. Daher ist $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ größer als $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$. Berechnet man $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ für einen endlichen Pfad um die Rissspitze, besteht die Configurational Force im Rissspitzenknoten immer aus der Summe $\mathbf{f}_{\text{tip}}^{\text{ep}} + \mathbf{f}^{\text{ep}}$.

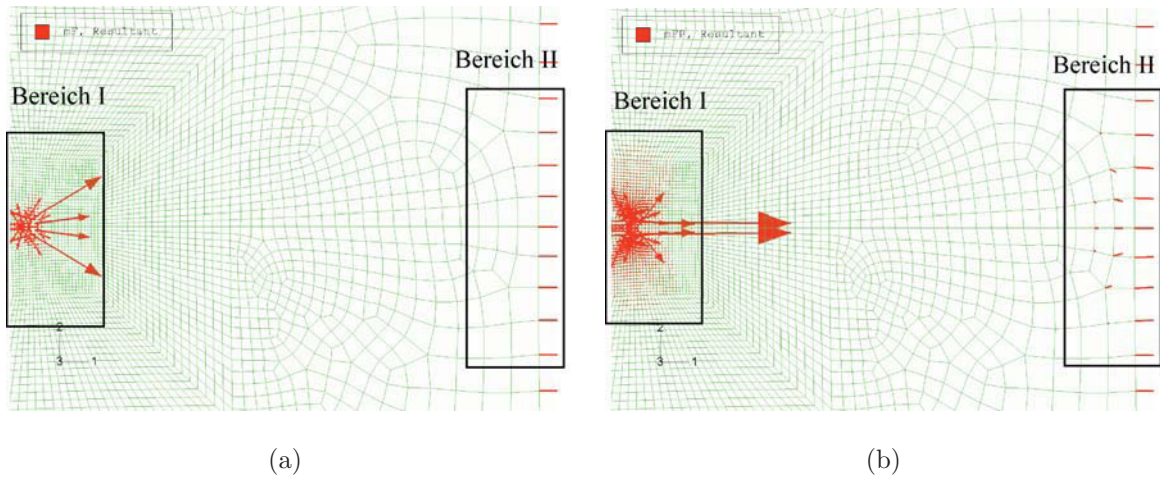


Abbildung 6.16: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

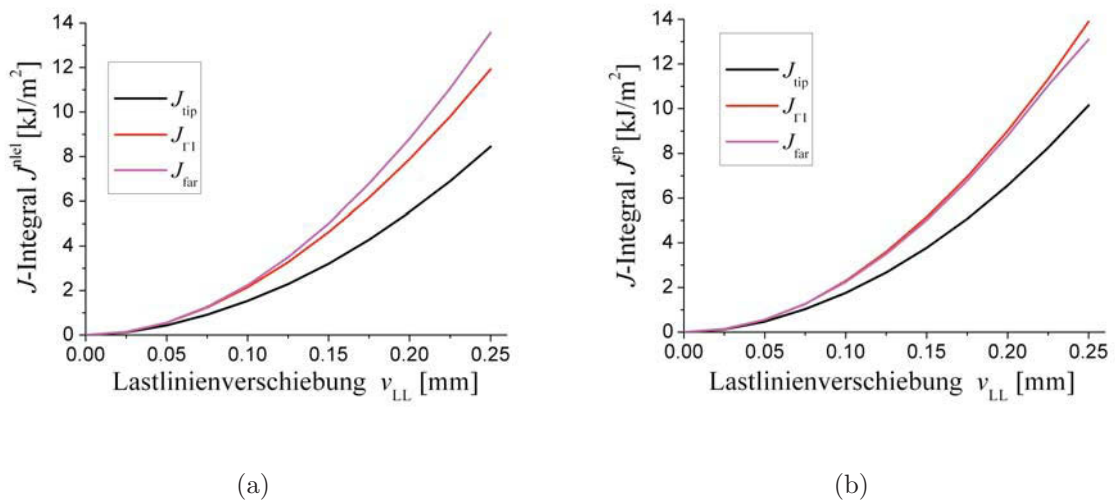


Abbildung 6.17: a) J^{nel} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ

Erhöht man die Belastung, wächst die plastische Zone im Bereich I, und sowohl $\mathbf{f}_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ als auch $\mathbf{f}_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ werden größer. Auch der Bereich, in dem elastisch-plastische Configurational Forces auftreten, wächst mit der plastischen Zone. Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces beschränken sich hingegen wieder auf die unmittelbare Umgebung der

Risspitze. Bei $v_{LL} = 0.25$ mm beginnt sich die Rückseite der C(T)-Probe plastisch zu verformen (Bereich II). Dadurch entstehen auch im Bereich II elastisch-plastische Configurational Forces (siehe Abbildung 6.16(b)).

Auch diese Kräfte entstehen durch einen Gradienten in der plastischen Verformung und zeigen innerhalb eines Elements in Richtung der größeren Verformung. Das heißt also, sie zeigen in Richtung der Probenrückseite und somit in die entgegengesetzte Richtung als der \mathbf{f}_{tip}^{ep} -Vektor. Summiert man die Configurational Forces, heben sich die symmetrischen Kräfte in Bereich I wieder gegenseitig auf. Die Configurational Forces im Bereich II heben sich jedoch bei der Summierung nicht gegenseitig auf, da sie alle in die positive x-Richtung zeigen. Der Plasticity Influence Term C_p ist nicht mehr Null. Dies führt zu einer Erniedrigung von J_{far}^{ep} , sobald der Integrationspfad für J_{far}^{ep} den Bereich II durchquert.

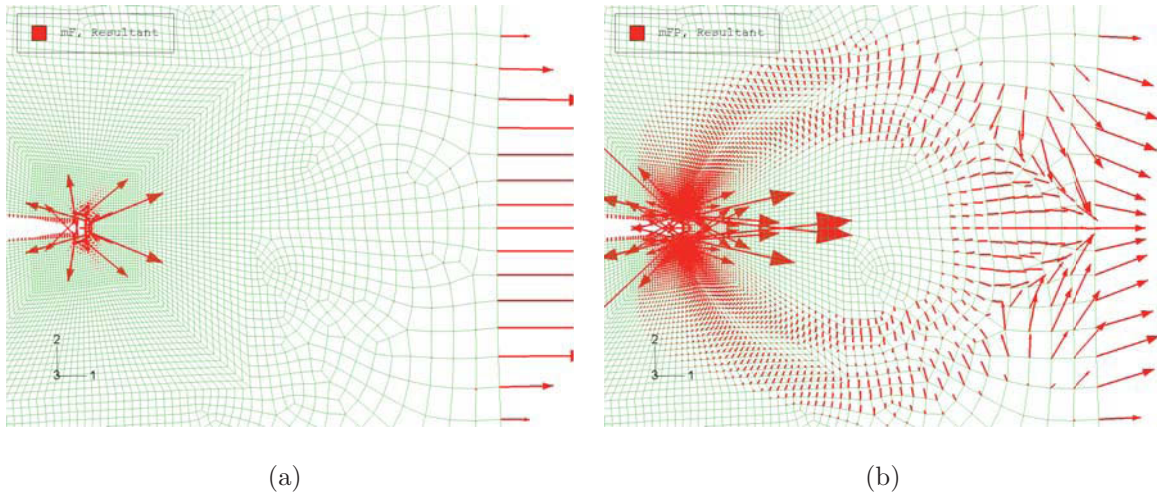


Abbildung 6.18: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Risspitze (ohne CF an der Risspitze) für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

In den Abbildungen 6.17(a) und 6.17(b) sind J^{nlel} und J^{ep} als Funktion der Lastlinienverschiebung dargestellt. Wieder sind J_{tip}^{nlel} und J_{tip}^{ep} unterschiedlich groß und über die gesamte Belastung viel kleiner als die übrigen J_{Γ_i} -Werte. Auch $J_{\Gamma_1}^{nlel}$ und $J_{\Gamma_1}^{ep}$ unterscheiden sich bei höheren Belastungen. Die J_{far}^{nlel} und J_{far}^{ep} -Kurven fallen bis zu einer Belastung von $v_{LL} = 0.22$ mm zusammen. Sobald sich die Probe an der Rückseite plastisch verformt, besitzt die J_{far}^{ep} -Kurve nicht mehr den gleichen Anstieg wie die J_{far}^{nlel} -Kurve und J_{far}^{ep} wird kleiner als J_{far}^{nlel} . Wie man aus Abbildung 6.17(b) sieht, liegt J_{far}^{ep} bei größeren Verformungen auch unter $J_{\Gamma_1}^{ep}$.

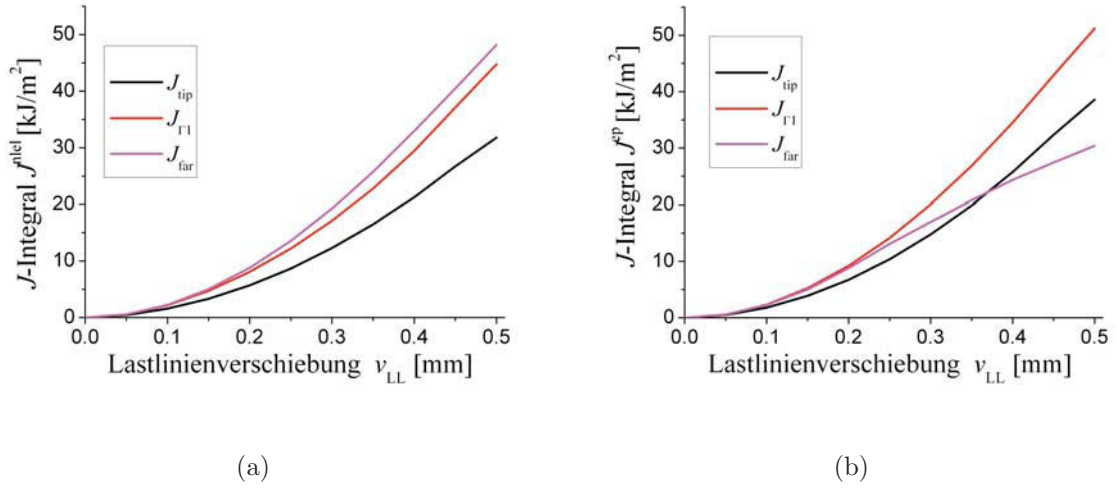


Abbildung 6.19: a) J^{nl} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ

Bei einer weiteren Erhöhung der Belastung wächst die plastische Zone sowohl an der Risspitze als auch an der Probenrückseite. Bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ sind die beiden plastischen Zonen zusammengewachsen. Der Bereich, in dem elastisch-plastische Configurational Forces auftreten, erstreckt sich von der Risspitze bis zur Probenrückseite (siehe Abbildung 6.18(a)). Die Configurational Forces in Bereich II zeigen alle in die positive x-Richtung und erhöhen dadurch den Plasticity Influence Term. Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces beschränken sich auch bei dieser hohen Belastung auf die Umgebung der Risspitze. Betrachtet man den Verlauf der J^{nl} -Kurven zwischen $v_{\text{LL}} = 0.35$ mm und 0.5 mm in Abbildung 6.19(a), sieht man, dass $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$ annähernd linear mit der Belastung zunimmt und immer den größten Wert annimmt.

Ab der Belastung, wo sich das Material an der Probenrückseite plastisch verformt, sinkt die Steigung der $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ - v_{LL} -Kurve. Dadurch weicht die $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Kurve ab einer Belastung von $v_{\text{LL}} = 0.22$ mm stark von der $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$ -Kurve ab. Bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ ist dieser Unterschied sehr deutlich zu sehen. Durch das Auftreten der elastisch-plastischen Configurational Forces in der plastischen Zone der Probenrückseite kommt es zu einem Anti-shielding Effekt, und $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ wird ab $v_{\text{LL}} = 0.37$ mm kleiner als $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$. Der niedrigere Wert von J_{far} unter Verwendung inkrementeller Plastizität kann dadurch erklärt werden, dass der rein elastisch verformte Bereich im Ligament der C(T)-Probe abnimmt. Dadurch setzt die plastische Verformung früher ein, und die dabei verbrauchte Arbeit kann nichts zur globalen risstreibenden Kraft beitragen [17].

Vergleicht man die unterschiedlichen J -Integrale mit den experimentellen J -Integralen,

$J^{(A)}$ und $J_{el}^{(A)}$ (Abbildung 6.20), sieht man, dass J_{far}^{nlel} über den gesamten Lastbereich sehr gut mit $J^{(A)}$ zusammenpasst. $J^{(A)}$ bezeichnet dabei das J -Integral, welches nach ASTM E1820-96 [64] aus der Fläche unter der Last-Verschiebungskurve berechnet wird. $J_{el}^{(A)}$ bezeichnet den elastischen Anteil von $J^{(A)}$.

J_{far}^{ep} stimmt mit J_{far}^{nlel} und $J^{(A)}$ bis zu einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.22$ mm überein. Danach weicht J_{far}^{ep} von $J^{(A)}$ ab und verläuft gleich wie der elastische Anteil des experimentellen J -Integrals, $J_{el}^{(A)}$. Bei $v_{LL} = 0.4$ mm erstreckt sich die plastische Zone über die gesamte Ligamentlänge der C(T)-Probe, und J_{far}^{ep} beginnt auch von $J_{el}^{(A)}$ abzuweichen. $J_{el}^{(A)}$ steigt ab diesem Zeitpunkt nur noch durch die Verfestigung des Materials an. J_{far}^{ep} steigt hingegen sehr viel stärker an.

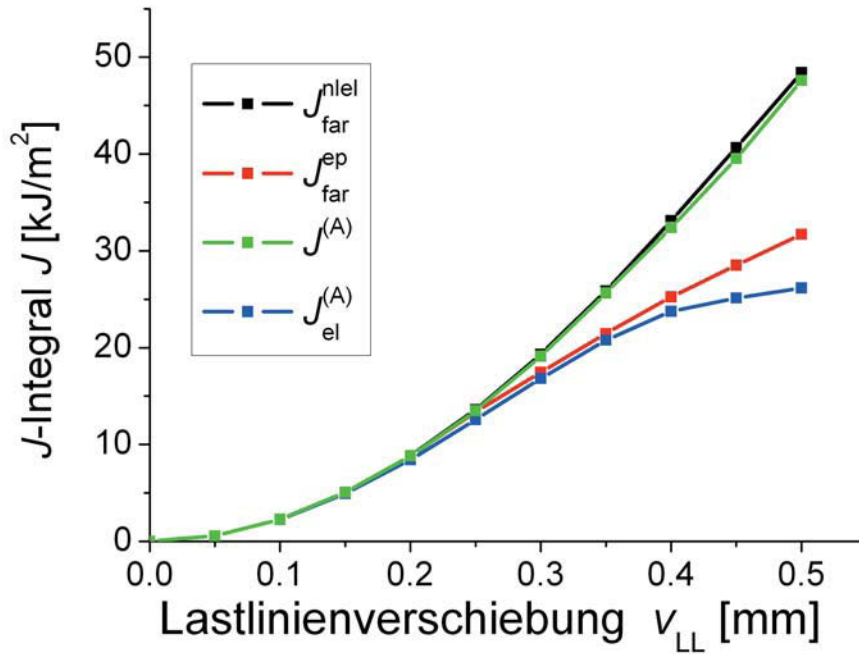


Abbildung 6.20: Vergleich verschiedener J -Integrale bei zunehmender Belastung

Tabelle 6.1: J -Werte für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ

v_{LL}	J_{tip}^{nlel}	J_{tip}^{ep}	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	J_{far}^{nlel}	J_{far}^{ep}
mm	kJ/m²		kJ/m²		kJ/m²		kJ/m²		kJ/m²	
0.1	1.513	1.736	2.132	2.271	2.246	2.246	2.247	2.247	2.247	2.247
0.25	8.45	10.15	11.92	13.9	13.67	13.2	13.56	13.56	13.56	13.1
0.5	31.8	38.58	44.72	51.18	47.03	47.35	48.13	47.72	48.21	30.4

6.4.1.2 Einfluss des Integrationspfades

Brocks et al. [37] berichten, dass in einem elastisch-plastischen Material das J -Integral für Deformationstheorie nicht mehr wegunabhängig ist. J^{nlel} nimmt immer größere Werte an, je mehr von der plastischen Zone eingeschlossen wird [37]. Wird die gesamte plastische Zone vom Integrationspfad eingeschlossen, ist J^{nlel} wieder wegunabhängig. Gibt es keinen Pfad ausserhalb der plastischen Zone, hat $J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$ den größten Wert und liegt nahe an $J^{(A)}$ [37].

In Abbildung 6.21 sind die nichtlinear-elastischen und elastisch-plastischen J -Integrale für unterschiedliche Konturen als Funktion der Lastlinienverschiebung dargestellt. $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ unterscheiden sich bereits bei kleiner Belastung deutlich von den übrigen J -Werten, das, wie bereits erklärt, auf die Diskretisierung der Configurational Forces in den Risspitzenelementen zurückzuführen ist. In Tabelle 6.1 sind die J -Werte für verschiedene Konturen und bei $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm zusammengefasst. Bei $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm wird die gesamte plastische Zone ab der Kontur Γ_7 vollständig eingeschlossen. Ab dieser Kontur sind alle $J_{\Gamma_i}^{\text{nlel}}$ -Werte identisch mit $J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$ und unterscheiden sich auch nicht von den $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ -Werten.

Erhöht man die Belastung auf $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, wird die plastische Zone an der Risspitze erst ab Kontur 25 vollständig eingeschlossen. Ab dieser Kontur sind wieder alle $J_{\Gamma_i}^{\text{nlel}}$ -Werte identisch mit dem $J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$ -Wert. Beim elastisch-plastischen J -Integral fallen alle $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ Werte ab der zweiten Kontur, außer $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$, zusammen.

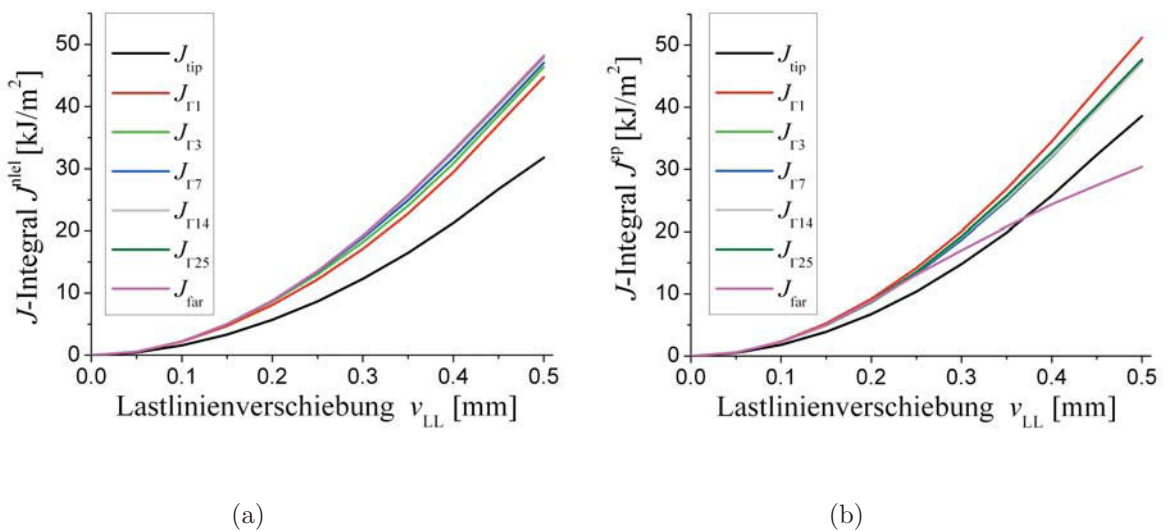


Abbildung 6.21: a) J^{nlel} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ

Erstreckt sich die plastische Zone über das gesamte Ligament der Probe, nehmen die $J_{\Gamma_i}^{\text{nl-el}}$ -Werte mit steigender Kontur immer mehr zu, und $J_{\text{far}}^{\text{nl-el}}$ besitzt den größten Wert (siehe Abbildung 6.21(a)). Die $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ -Kurven fallen auch bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm zusammen, solange der Integrationspfad die plastische Zone an der Probenrückseite nicht schneidet. Beinhalten die Integrationspfade Γ_i auch einen Teil der plastischen Zone an der Probenrückseite, beginnen die $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ -Werte kleiner zu werden. Je mehr von dieser Zone im Integrationspfad enthalten ist, desto kleiner wird $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$, bis der Wert von $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ erreicht wird, sobald die gesamte plastische Zone eingeschlossen ist.

Wie in Brocks et al. [37] gezeigt, nimmt auch hier $J^{\text{nl-el}}$ immer größere Werte an, je mehr von der plastischen Zone durch den Integrationspfad eingeschlossen wird. Diese Zunahme ist besonders stark in der Umgebung der Rissspitze. Für weiter entfernte Pfade ist die Zunahme der J -Werte vernachlässigbar.

Das elastisch-plastische J -Integral ist jedoch bei kleinen Belastungen wegunabhängig und nimmt für Konturen größer Γ_1 nahezu die gleichen Werte an. Bei hohen Belastungen ist J^{ep} ebenfalls wegunabhängig, solange der Integrationspfad nicht durch die plastische Zone der Probenrückseite verläuft. Die Abbildungen 6.22(a) und 6.22(b) zeigen die nichtlinear-

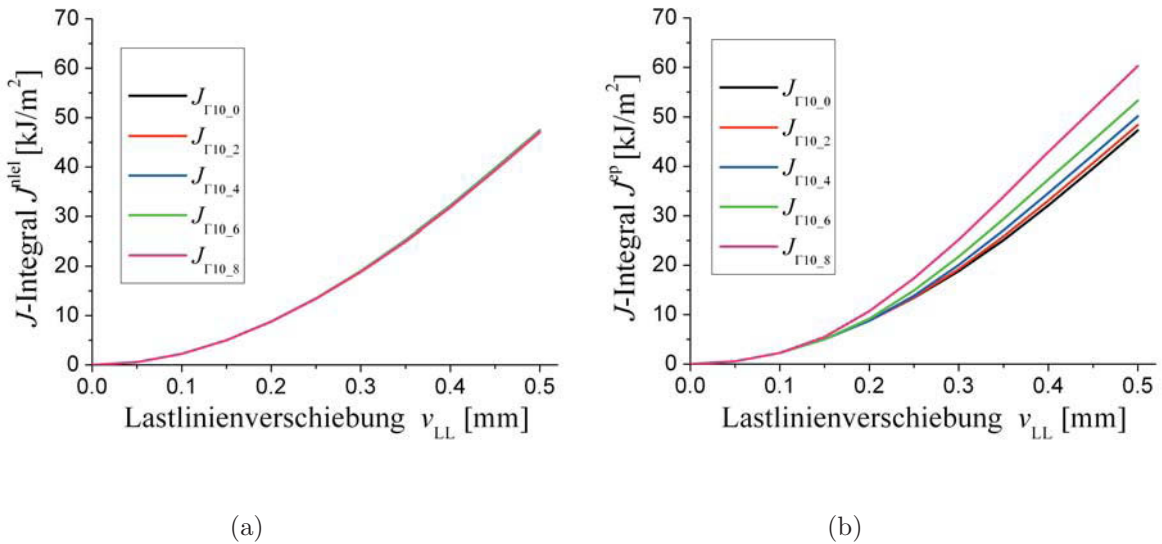


Abbildung 6.22: a) $J^{\text{nl-el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Positionen des Integrationspfades Γ_{10} und EDZ

elastischen J -Integrale und die elastisch-plastischen J -Integrale als Funktion von v_{LL} , wobei die Integrationspfade so gewählt wurden, dass immer zehn Elementringe eingeschlossen werden, die Pfade aber um jeweils zwei Elemente weiter vor der Rissspitze liegen. Das bedeutet also, dass nur für den Integrationspfad Γ_{10_0} die Rissspitze in der

Mitte der Kontur liegt. Aus Abbildungen 6.22(a) kann man erkennen, dass die $J_{\Gamma_{10,i}}^{\text{nel}}$ -Kurven für alle Integrationspfade zusammen fallen und J^{nel} unabhängig vom gewählten Integrationspfad ist. Betrachtet man hingegen die $J_{\Gamma_{10,i}}^{\text{ep}}$ -Kurven aus Abbildung 6.22(b), sieht man, dass die J -Kurven umso größere Werte annehmen je weiter der Mittelpunkt der Integrationspfade von der Rissspitze entfernt liegt. Die elastisch-plastischen Configurational Forces können sich nicht mehr gegenseitig aufheben, und das elastisch-plastische J -Integral wird wegabhängig.

6.4.2 Ebener Spannungszustand

6.4.2.1 Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)

In den Abbildungen 6.23, 6.25 und 6.27 sieht man die Configurational Forces in der C(T)-Probe bei den Lastlinienverschiebungen $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$, 0.25 mm und 0.5 mm und unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes. Bei $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$ bildet sich nur eine kleine plastische Zone um die Rissspitze.

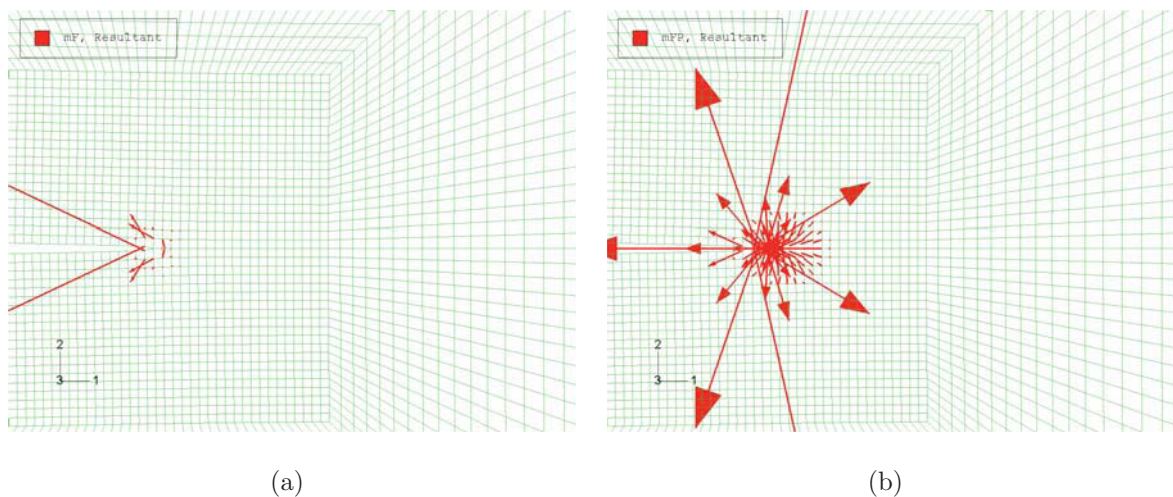


Abbildung 6.23: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

Bei kleinen Belastungen treten im ESZ, ähnlich wie beim EDZ, nur in der Umgebung der Rissspitze Configurational Forces auf.

Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces beschränken sich wieder auf die unmittelbare Umgebung der Rissspitze und entstehen durch numerische Ungenauigkeiten bei der Berechnung. Die elastisch-plastischen Configurational Forces treten in der gesamten plastischen Zone auf. Betrachtet man die dazugehörigen J -Integrale in Abbildung 6.24

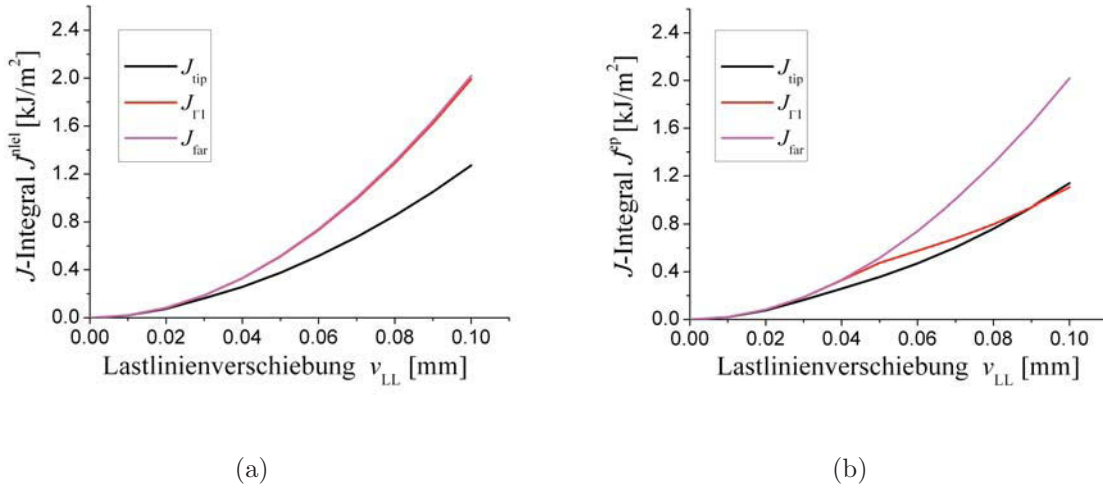


Abbildung 6.24: a) J^{nl} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ

sieht man, dass auch im ESZ die J_{tip} -Werte bereits bei kleinen Belastungen deutlich unter den J_{far} -Werten liegen. Allerdings sind, im Gegensatz zum EDZ, die $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ -Werte über die gesamte Belastung kleiner als die $J_{\text{tip}}^{\text{nl}}$ -Werte (siehe Abbildung 6.24 und Tabelle 7.2). Die $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$ -Kurve stimmt mit der $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Kurve überein, solange sich die plastische Verformung der Probe auf die Umgebung der Risspitze beschränkt. Die $J_{\Gamma_1}^{\text{nl}}$ -Werte sind zwischen $v_{\text{LL}} = 0$ und 0.15 mm ebenfalls gleich groß wie $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$, weichen danach aber nur ein bisschen von den $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$ -Werten ab. Die $J_{\Gamma_1}^{\text{ep}}$ -Kurve weicht allerdings ab einer Lastlinienverschiebung von $v_{\text{LL}} = 0.05$ mm sehr stark von $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ ab. Auf diese Abweichung wird später noch genauer eingegangen. Bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ beginnt sich die C(T)-Probe, auch im ESZ, an der Rückseite plastisch zu verformen. Wieder treten in allen plastischen Zonen elastisch-plastische Configurational Forces auf, wie man in Abbildung 6.25(b) sehen kann. Die Configurational Forces an der Probenrückseite zeigen in die positive x-Richtung und führen daher zu einem niedrigeren $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Wert. Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces in Abbildung 6.25(a) beschränken sich weiterhin auf die Umgebung der Risspitze.

Die J_{tip} - und J_{far} -Kurven zeigen das gleiche Verhalten wie im EDZ, obwohl alle Werte unterhalb der J -Werte aus dem EDZ liegen (siehe Abbildung 6.26 und Tabelle 7.2). Anders als im EDZ liegt der $J_{\Gamma_1}^{\text{nl}}$ -Wert bereits sehr nahe an $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$, und die Wegabhängigkeit von $J_{\Gamma_1}^{\text{nl}}$ ist nicht sehr ausgeprägt. $J_{\Gamma_1}^{\text{ep}}$ wird hingegen im ESZ sehr stark wegabhängig.

In Abbildung 6.27(b) ist zu erkennen, dass sowohl die plastische Zone um die Risspitze und an der Probenrückseite, bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, gewachsen sind, aber noch kein General Yielding auftritt. Dadurch sind die plastischen Zonen in Bereich I und II nicht mitein-

ander verbunden. Um die Grenzlast zu erreichen, müsste die Lastlinienverschiebung auf

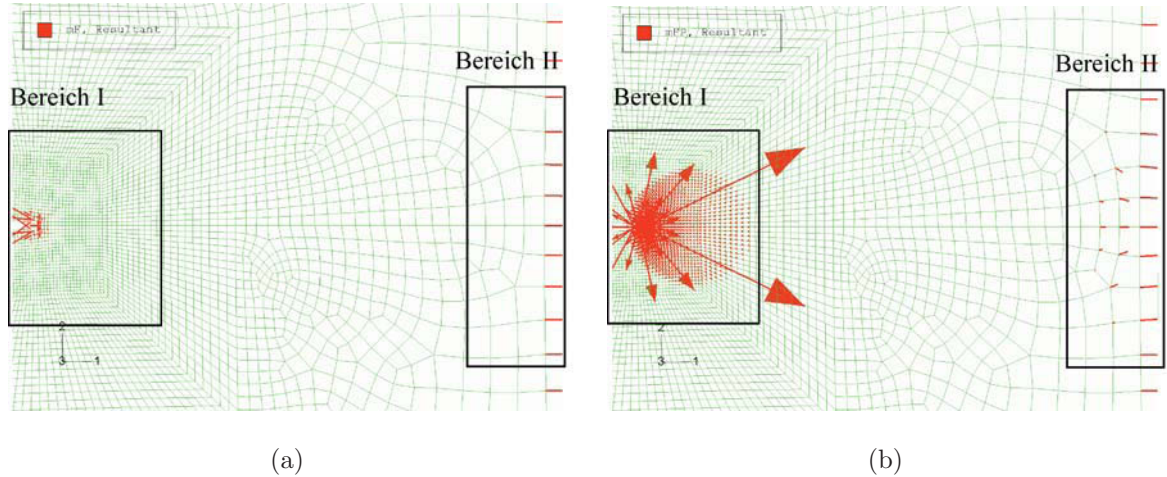


Abbildung 6.25: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Risspitze (ohne CF an der Risspitze) für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

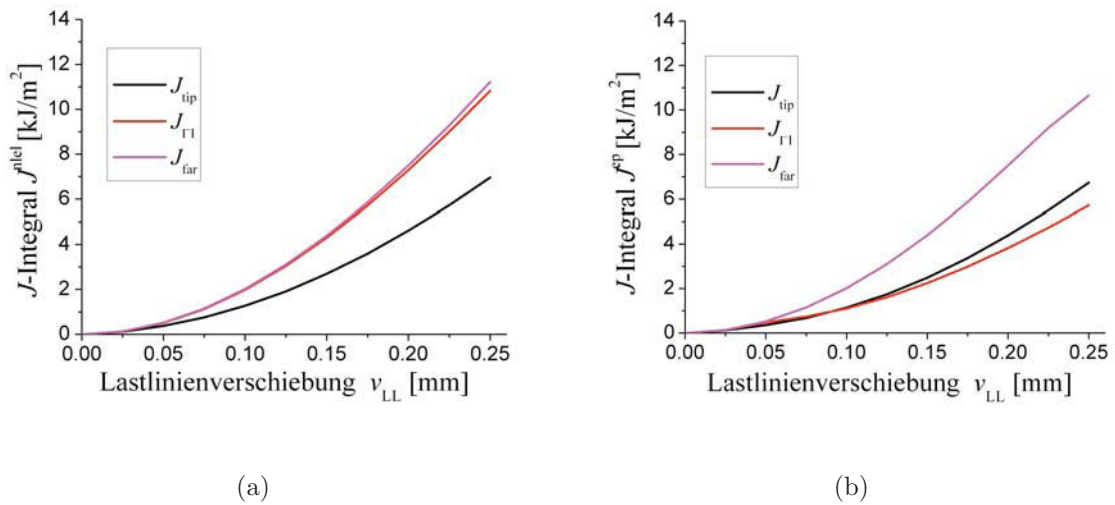


Abbildung 6.26: a) J^{nl} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ

$v_{LL} = 1.0$ mm erhöht werden. Damit man die Werte aus dem EDZ mit jenen aus dem ESZ vergleichen kann, betrachten wir jedoch die J -Integrale bei $v_{LL} = 0.5$ mm. Bei höheren Belastungen werden die J_{tip}^{nl} und J_{tip}^{ep} -Werte immer ähnlicher, und die J_{far}^{nl} und J_{far}^{ep} -Kurven zeigen das gleiche Verhalten wie im EDZ (Abbildung 6.28). J_{far}^{nl} steigt ab $v_{LL} = 0.35$ mm linear mit der Belastung und besitzt immer den größten Wert. Die J_{far}^{ep} -Kurve weicht ab $v_{LL} = 0.22$ mm durch die Plastifizierung der Probenrückseite stark von J_{far}^{nl} ab und wird bei $v_{LL} = 0.46$ mm kleiner als J_{tip}^{ep} , wodurch ein Anti-shielding Effekt auftritt.

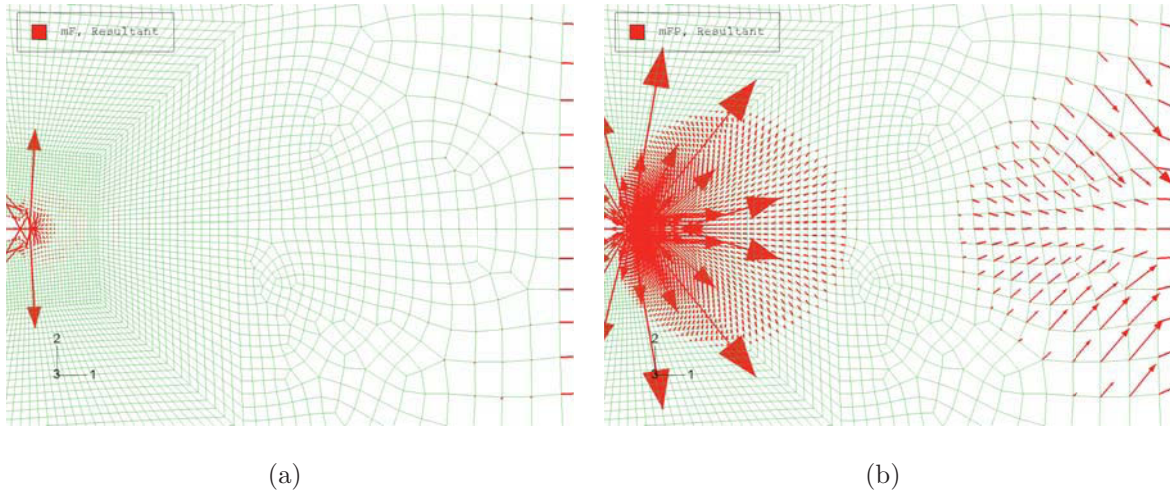


Abbildung 6.27: Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie

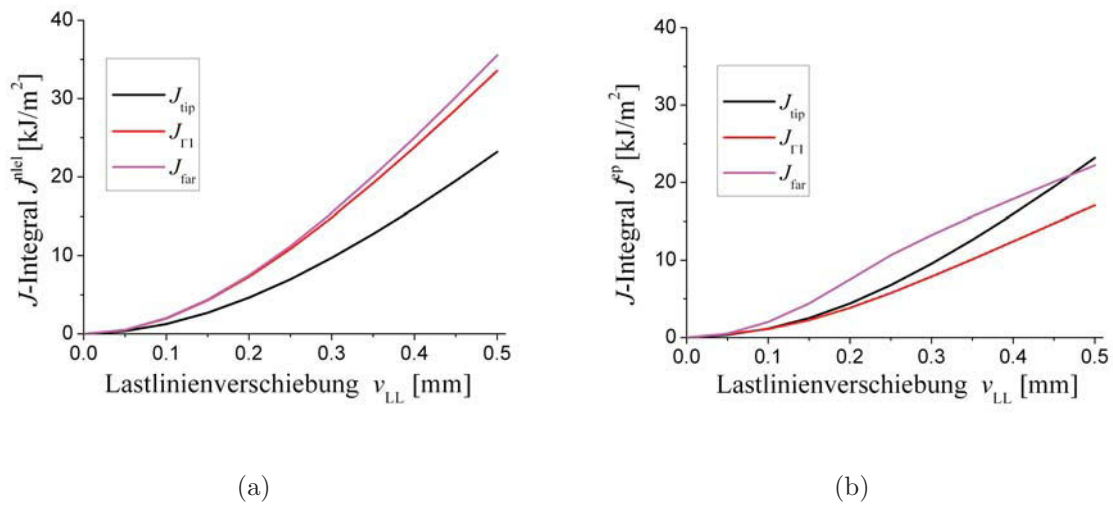


Abbildung 6.28: a) J^{nl} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ

Tabelle 6.2: J -Werte für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm; ESZ

v_{LL}	J_{tip}^{nl}	J_{tip}^{ep}	J_1^{nl}	J_1^{ep}	J_7^{nl}	J_7^{ep}	J_{25}^{nl}	J_{25}^{ep}	J_{far}^{nl}	J_{far}^{ep}
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0.1	1.27	1.14	1.99	1.11	2.02	1.95	2.02	2.02	2.02	2.02
0.25	6.96	6.74	10.83	5.72	11.17	5.27	11.2	9.66	11.22	10.65
0.5	23.19	23.17	33.56	17.03	35.27	15.30	35.48	19.97	35.53	22.21

6.4.2.2 Einfluss des Integrationspfades

Das nichtlinear-elastische J -Integral verhält sich im ESZ gleich wie im EDZ. Sobald sich die Probe plastisch verformt, wird das J -Integral für Pfade innerhalb der plastischen Zone, und nahe an der Rissspitze, wegabhängig. Wie man aus Abbildung 6.29(a) sieht, nimmt $J_{\Gamma_i}^{\text{nel}}$ mit steigender Konturzahl immer größere Werte an und erreicht bei $J_{\text{far}}^{\text{nel}}$ den größten Wert. Der Unterschied zwischen $J_{\Gamma_7}^{\text{nel}}$ und $J_{\text{far}}^{\text{nel}}$ ist aber selbst bei der höchsten Belastung nur mehr sehr gering (siehe Tabelle 7.2).

Der Verlauf des elastisch-plastischen J -Integrals ändert sich jedoch im ESZ und $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ wird extrem wegabhängig. Aus Abbildung 6.29(b) sieht man, dass $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ ungefähr gleich groß ist wie $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$. Doch bereits bei der ersten Kontur um die Rissspitze weichen die J^{ep} -Werte mit zunehmender Belastung stark von den J^{nel} -Werte ab.

Um diesen Unterschied besser beschreiben zu können, betrachten wir $J_{\Gamma_{25}}^{\text{ep}}$ aus Abbildung 6.29(b) genauer.

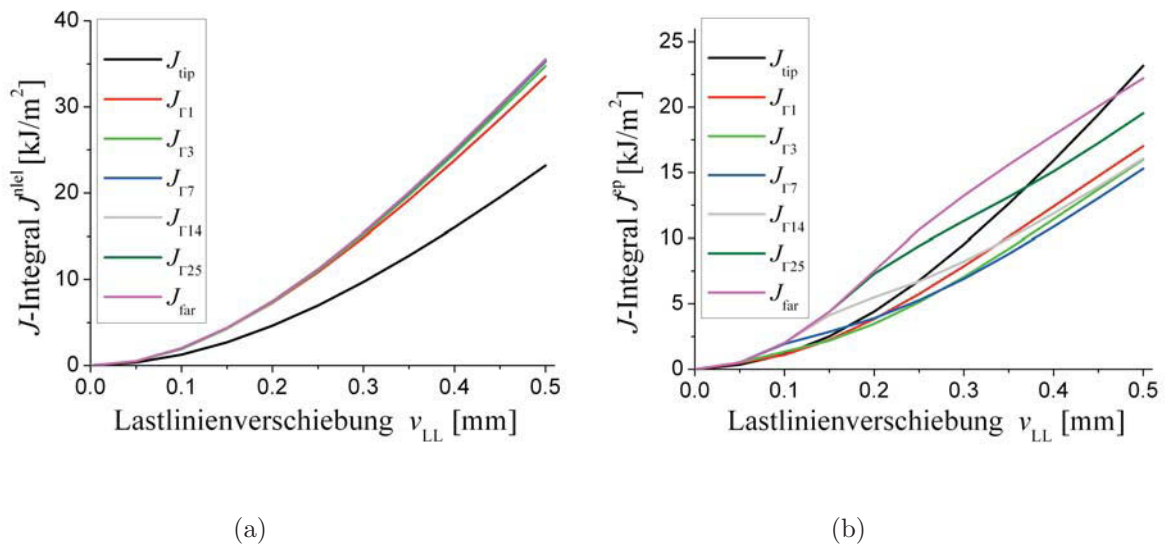


Abbildung 6.29: a) J^{nel} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ

Bei kleinen Belastungen schließt der Integrationspfad Γ_{25} die gesamte plastische Zone ein und $J_{\Gamma_{25}}^{\text{ep}}$ ist gleich groß wie $J_{\Gamma_{25}}^{\text{nel}}$, denn alle im Material auftretenden Configurational Forces liegen innerhalb des Integrationspfades. In diesem Fall ist $J_{\Gamma_{25}}^{\text{ep}}$ auch gleich groß wie $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ und $J_{\text{far}}^{\text{ep}} = J_{\text{far}}^{\text{nel}}$. Mit zunehmender Belastung wächst die plastische Zone, und damit auch der Bereich, in dem elastisch-plastische Configurational Forces auftreten, bis die plastische Zone den Rand des Integrationsbereiches erreicht. Bei $v_{\text{LL}} = 0.2$ mm schneidet der Pfad Γ_{25} durch die plastische Zone, und es werden nicht mehr alle im Material

vorhandenen Configurational Forces summiert.

Der plastische Bereich direkt an der Risspitze (ca. 3 bis 5 Elemente um die Risspitze) bewirkt eine Absenkung von J^{ep} . Das bedeutet, dass die plastische Verformung dieses Bereiches eine treibende Wirkung auf den Riss besitzt (Anti-shielding). Eine mögliche Erklärung ist, dass die plastische Zone um die Risspitze im ESZ den seitlichen Rand der Probe berührt, wobei hier, im Gegensatz zum EDZ, Dehnungen in Dickenrichtung (z-Richtung) auftreten. Dadurch kommt es zu einem Anti-shielding Effekt, der ähnlich wie im EDZ auftritt, sobald der rückwärtige Rand der Probe plastisch verformt wird. Summiert man die Configurational Forces in der gesamten plastischen Zone auf, wird der Plasticity Influence Term wieder zu Null.

Auch beim ESZ führt die plastische Verformung der Probenrückseite zu einer Erniedrigung von $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$. Die Begründung ist identisch zu jener aus dem EDZ.

Betrachtet man wieder $J^{\text{nl}}^{\text{el}}$ und J^{ep} für Integrationspfade, deren Mittelpunkt nicht mit der Risspitze zusammenfällt, erhält man die Kurven aus den Abbildungen 6.30(a) und 6.30(b). Auch im ESZ sind die $J_{\Gamma_{10,i}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ -Kurve unabhängig vom gewählten Integrationspfad; die $J_{\Gamma_{10,i}}^{\text{ep}}$ -Kurven werden jedoch wieder wegabhängig. Auch hier ist die Begründung die selbe wie im Fall des EDZ.

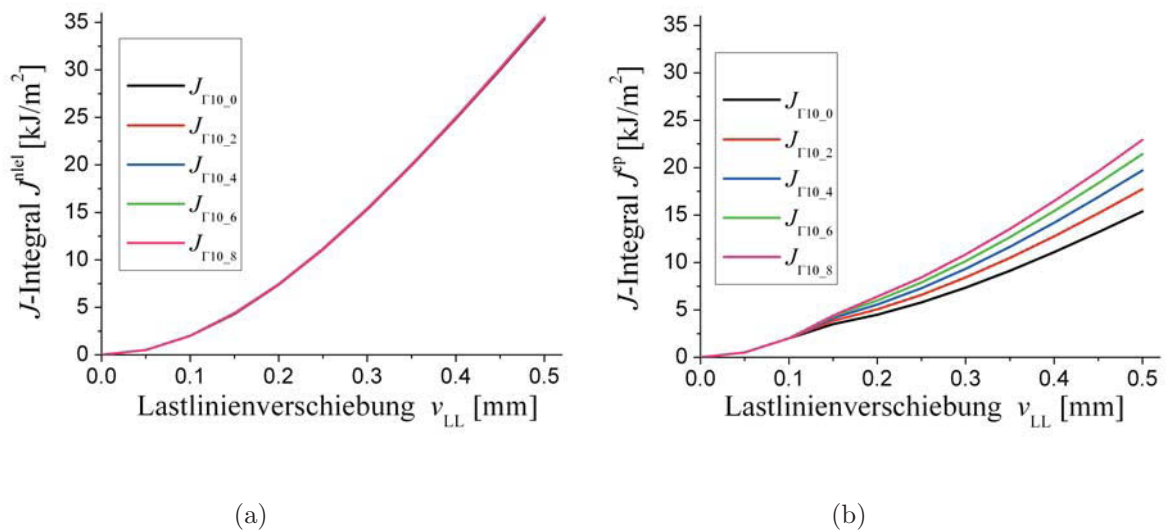


Abbildung 6.30: a) $J^{\text{nl}}^{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Positionen des Integrationspfades Γ_{10} und ESZ

6.5 J -Integrale für Pfade sehr nahe an der Rissspitze

Wie man bereits in den vorangegangenen Kapiteln gesehen hat, ist das J -Integral innerhalb der plastischen Zone wegabhängig. Für die Bestimmung der risstreibenden Kraft, ist es besonders interessant, wie die Wegabhängigkeit der J -Integrale (insbesondere J^{ep}) im Rissspitzennahen Bereich verläuft.

In den Arbeiten [4, 37, 40, 62, 63] wurde gezeigt, dass $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ direkt an der Rissspitze (für $\Gamma_r \rightarrow 0$) nur dann einen endlichen Wert annimmt, wenn in nichtlinear-elastischen Materialien an der Rissspitze eine Singularität von der Ordnung $1/r$ auftritt. Die $1/r$ -Singularität ist auch in einem elastisch-plastischen Material unter Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie gegeben, solange der Riss sich nicht bewegt und die Verformungen als infinitesimal angenommen werden (der Zusammenhang zwischen den Verzerrungstensoren und den Verschiebungsgradienten ist linear).

Wird die Berechnung des Spannungs- und Verformungsfeldes unter Zugrundelegung großer Verformungen (finiten Deformationen) durchgeführt, kommt es zur Rissabstumpfung (Blunting). Dadurch entsteht direkt an der Rissspitze eine Prozesszone mit einer Größe von ca. $(2 \div 3) \delta_t$ (δ_t = Rissöffnungsverschiebung). Innerhalb der Prozesszone ist die Belastung nicht mehr proportional und das HRR-Feld verliert seine Gültigkeit [65]. Dadurch beschreibt das J -Integral für nichtlinear-elastische Materialien nicht mehr die risstreibende Kraft, das elastisch-plastische J -Integral jedoch schon.

In den Abbildungen 6.31(a), 6.31(c) und 6.31(e) sind die J -Integrale für verschiedene Konturen unter Annahme infinitesimaler Verformungen über die Belastung dargestellt. Die Abbildungen 6.31(b), 6.31(d) und 6.31(f) zeigen die dazugehörigen J -Integrale bei finiten Deformationen (geometrisch nichtlinear gerechnet). Der Abstand des Integrationspfades zur Rissspitze nimmt mit steigender Konturnummer zu. Dabei wird J_{tip} direkt am Rissspitzenknoten ermittelt, und für jede weitere Kontur wird ein zusätzlicher Elementtring eingeschlossen. Der Bereich um die Rissspitze wurde mit linearen Elementen vernetzt, wobei die Elemente eine Größe von $m = 1.5625 \mu\text{m}$ haben. Die Größe der Elemente im Bereich der Rissspitze ist also um zwei Größenordnungen kleiner als die zuvor verwendete Elementgröße. Dadurch wird ein Bereich sehr nahe an der Rissspitze betrachtet, und beinahe alle Integrationspfade liegen innerhalb der Prozesszone. Alle Berechnungen wurden unter Annahme eines EDZ durchgeführt.

Man sieht, dass das J -Integral nach der „VCE“-Methode auch in einem elastisch-plastischen Material unter Annahme kleiner Verformungen bis zu einer Belastung von $v_{\text{LL}} = 0.3 \text{ mm}$

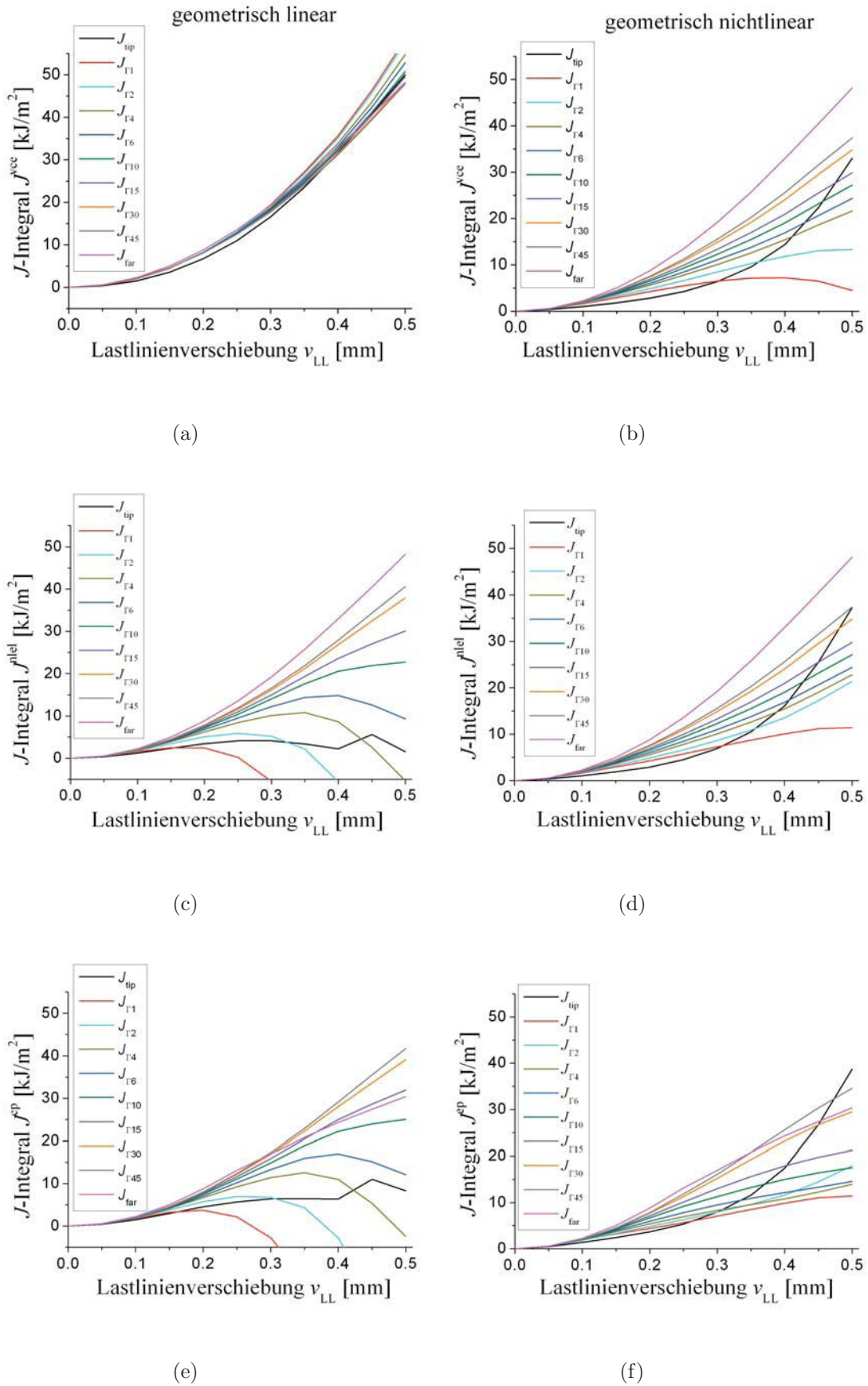


Abbildung 6.31: J -Integrale für verschiedene Pfade bei $m = 1.5625 \mu\text{m}$ und EDZ; a-b) J^{vce} , c-d) J^{nlcl} und e-f) J^{ep}

wegunabhängig ist. Wird die Verformung an der Rissspitze zu groß, wird auch J^{vce} we-
gababhängig, wobei aber alle $J_{\Gamma_i}^{\text{vce}}$ -Werte, außer $J_{\text{tip}}^{\text{vce}}$, über dem $J_{\text{far}}^{\text{vce}}$ -Wert liegen. Die nume-
rischen Fehler bei der Berechnung des J -Integrals werden in der Nähe der Rissspitze so
groß, dass die „VCE“-Methode erst ab der zehnten Kontur brauchbare Lösungen liefert.
Berechnet man J^{vce} unter Annahme großer Verformungen, erkennt man eine starke We-
gababhängigkeit bereits bei kleinen Verformungen. Die J^{vce} -Werte für Integrationspfade sehr
nahe an der Rissspitze fallen deutlich ab. Nur $J_{\text{tip}}^{\text{vce}}$ weicht von diesem Trend ab. Wiederum
sind die numerischen Fehler sehr nahe an der Rissspitze zu groß, um eindeutige Aussagen
treffen zu können. Hier scheint jedoch bereits die vierte Kontur brauchbare Werte zu lie-
fern.

Betrachtet man die aus den Configurational Forces berechneten J -Integrale, sieht man,
dass sowohl das nichtlinear-elastische J -Integral als auch das elastisch-plastische J -Integral
stark wegababhängig sind. Dabei ist es egal, ob die Berechnung unter Annahme kleiner Ver-
formungen durchgeführt wurde oder nicht. Berechnet man $J^{\text{nl-el}}$ bzw. J^{ep} mittels kleiner
Verformungen (Abbildung 6.31(c) und 6.31(e)), erhält man bereits ab einer Belastung von
 $v_{\text{LL}} = 0.15$ mm unbrauchbare J_{Γ_1} -Werte. Mit zunehmender Belastung werden auch die
weiteren J -Integral-Werte unbrauchbar. Bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm liefert erst die zehnte Kontur
(Abstand zur Rissspitze $x = 15.625 \mu\text{m}$) einen brauchbaren Wert.

Führt man die Berechnung unter Annahme großer Verformungen durch, stimmen die $J^{\text{nl-el}}$ -
Werte wieder mit den J^{vce} -Werten überein (Vergleich Abbildung 6.31(b) mit 6.31(d)).
Die J^{ep} -Kurven steigen nur bei kleinen Belastungen quadratisch mit der Lastlinienver-
schiebung an. Abhängig vom Integrationspfad flachen die J^{ep} -Werte ab einer bestimmten
Belastung ab. Dies kann durch die plastische Verformung hinter der Rissspitze erklärt
werden. Dieser Bereich verstärkt die risstreibende Kraft (Anti-shielding Effekt) und führt
zu einer Abnahme des J -Integrale.

In Abbildung 6.32 sind die J -Integrale für unterschiedliche Konturen als Funktion des
normierten Abstandes zur Rissspitze aufgetragen. Die Normierung erfolgt dabei durch
den Wert der Rissöffnungsverschiebung δ_t , der in einem Abstand von 0.3 mm hinter der
Rissspitze gemessen wurde und für $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm $\delta_t = 0.0945$ mm beträgt. Den wirklichen
normierten Konturradius erhält man, indem man den normierten Abstand zur Rissspitze
mit der Konturnummer multipliziert. Der Konturradius von $J_{\Gamma_{10}}^{\text{nl-el}}$ bei $m = 1.5625 \mu\text{m}$
beträgt z.B. $r = 10 \cdot m/\delta_t = 0.165$. Man sieht, dass der Abstand der Konturen mit
abnehmender Elementgröße sinkt.

Die Berechnungen wurden mit infinitesimalen Verformungen (Abbildung 6.32(a), 6.32(c))

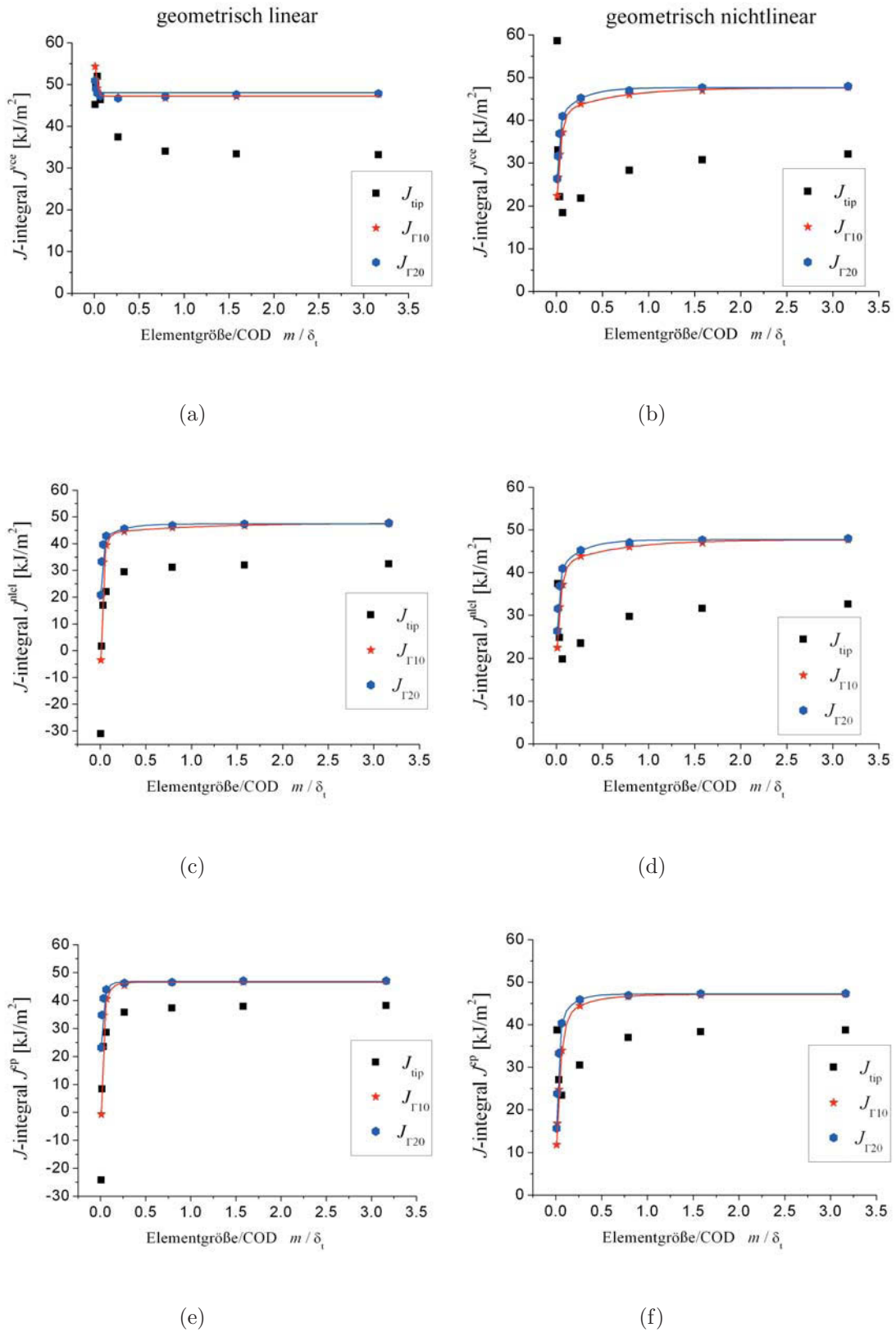


Abbildung 6.32: J -Werte bei abnehmender Distanz zur Risspitze für a-b) J^{vce} , c-d) J^{nl} und e-f) J^{ep} ; bei $v_{\text{LL}} = 0.5$ und EDZ

und 6.32(e)) und mit finiten Deformationen (Abbildung 6.32(b), 6.32(d) und 6.32(f)) durchgeführt. J^{vce} konvergiert in einem elastisch-plastischen Material unter Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie nur dann zu einem endlichen Wert, wenn mit infinitesimalen Verformungen gerechnet wird. Unter dieser Annahme bleibt die Rissspitze scharf und die $1/r$ -Singularität erhalten. Die Zunahme von J^{vce} ab $\delta_t/m = 0.066$ in Abbildung 6.31(a) kann, wie bereits erwähnt, durch numerische Fehler bei der Berechnung des J -Integrales erklärt werden.

Bei Berücksichtigung finiter Deformationen kommt es zur Abstumpfung der Rissspitze. Diese verhält sich nun wie eine Kerbe, und die $1/r$ -Singularität ist nicht mehr gegeben [29, 37]. In einem Abstand von $\Gamma_r < 4 \delta_t$ wird J stark wegabhängig und fällt für $\Gamma_r \rightarrow 0$ auf Null ab [29, 62]. J^{nlel} und J^{ep} fallen, unabhängig ob man mit kleinen oder mit großen Verformungen rechnet, mit abnehmendem Abstand zur Rissspitze sehr stark ab. Die Abnahme von J^{nlel} und J^{ep} , berechnet mittels kleiner Verformungen, beginnt jedoch erst bei $m/\delta_t = 0.066$ und ist viel steiler als die Abnahme von J^{nlel} und J^{ep} , berechnet mittels finiter Deformationen. Diese Reduktion kann durch die numerische Ungenauigkeit bei der Bestimmung der Configurational Forces in der unmittelbaren Nähe der Rissspitze erklärt werden. Rechnet man mit finiten Deformationen (Abbildung 6.32(d) und 6.32(f)), beginnt die Abnahme der J -Kurven bereits bei $m/\delta_t = 0.264$. Hier zeigen sowohl J^{nlel} als auch J^{ep} das gleiche Verhalten wie J^{vce} . Die Abnahme entsteht also auch durch die Abstumpfung der Rissspitze und nicht durch numerische Fehler. In allen Diagrammen sieht man, dass J_{tip} viel kleiner ist als J_{Γ_i} und ab einer Größe von $\delta_t/m = 0.066$ keine brauchbaren Werte mehr liefert.

Man sieht allerdings, dass die J_{Γ_i} -Werte für Konturradien größer als $4 \delta_t$ zusammenfallen. In Abbildung 6.33 sind die J -Integrale als Funktion der Elementgröße dargestellt, wobei aber der Integrationsbereich A1 konstant bleibt, die Elementgröße innerhalb dieses Bereiches jedoch immer kleiner wird. Der Integrationsbereich A1 ist ein 0.6×0.6 mm großes Quadrat um die Rissspitze. Bei $m/\delta_t = 3.17$ enthält A1 4 Elemente, bei $m/\delta_t = 1.59$ 16 Elemente, bei $m/\delta_t = 0.79$ 64 Elemente usw.

In Abbildung 6.33(a) sind die Ergebnisse von J^{vce} , J^{nlel} und J^{ep} unter Annahme kleiner Verformungen dargestellt. Man sieht sehr deutlich, dass alle drei J -Integrale unterschiedliche Ergebnisse liefern. Bei $m/\delta_t = 3.17$ liegt $J_{\Gamma A1}^{\text{ep}}$ deutlich über $J_{\Gamma A1}^{\text{vce}}$ und $J_{\Gamma A1}^{\text{nlel}}$. Mit abnehmender Elementgröße nähert sich das elastisch-plastische J -Integral dem nichtlinear-elastischen an und liegt ab $m/\delta_t = 0.79$ mm zwischen $J_{\Gamma A1}^{\text{vce}}$ und $J_{\Gamma A1}^{\text{nlel}}$. Für alle Elementgrößen liegt $J_{\Gamma A1}^{\text{nlel}}$ unter $J_{\Gamma A1}^{\text{vce}}$, wobei der Unterschied mehr oder weniger konstant bleibt.

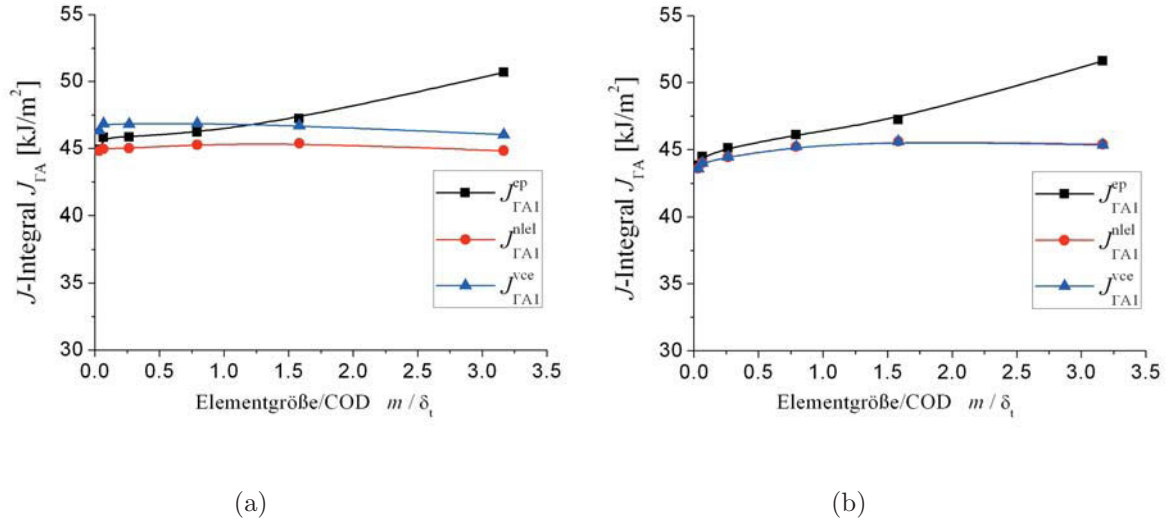


Abbildung 6.33: J -Werte bei abnehmender Elementgröße und gleich bleibender Distanz zur Risspitze; a) geometrisch linear b) geometrisch nichtlinear; für $v_{LL} = 0.5$ und EDZ

Alle drei J -Integrale besitzen jedoch auch für $m \rightarrow 0$ einen endlichen Wert. Rechnet man mit Berücksichtigung großer Verformungen, erhält man die J -Werte aus Abbildung 6.33(b). Man sieht, dass $J_{\Gamma A1}^{vce}$ und $J_{\Gamma A1}^{nl}$ über alle Elementgrößen beinahe identisch sind und für $m \rightarrow 0$ ebenfalls einen endlichen Wert annehmen. Das elastisch-plastische J -Integral verhält sich ähnlich wie in Abbildung 6.33(a). Zunächst liegt $J_{\Gamma A1}^{ep}$ deutlich über $J_{\Gamma A1}^{vce}$ und $J_{\Gamma A1}^{nl}$, nähert sich aber mit abnehmender Elementgröße den nichtlinear-elastischen J -Werten an.

6.6 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse für den stationären Riss

In Simha et al. [17], wurde gezeigt, dass im Bulk eines homogenen elastisch-plastischen Materials Configurational Forces auftreten. Wie man aus den Abbildungen 6.14(b) bis 6.18(b) und 6.23(b) bis 6.27(b) sehen kann, treten diese Configurational Forces sowohl im EDZ als auch im ESZ überall dort auf, wo sich die C(T)-Probe plastisch verformt und es einen Gradienten in der plastischen Verformung gibt. Die Summe dieser elastisch-plastischen Configurational Forces im Bulk ergibt nach Gleichung (4.47) den Plasticity Influence Term, C_p .

Die Configurational Forces sind innerhalb der plastischen Zone um die Risspitze an-

nähernd symmetrisch angeordnet und heben sich bei der Summierung aller Configurational Forces in diesem Bereich, mit Ausnahme der Kräfte in den Rissspitzenelementen, nahezu auf. Dadurch wird der Plasticity Influence Term bei kleinen Belastungen (Contained Yielding) beinahe Null und kann vernachlässigt werden. Bei größeren Belastungen (Uncontained und General Yielding) entstehen auch im plastisch verformten Bereich an der Probenrückseite Configurational Forces. Diese zeigen innerhalb dieser plastischen Zone in die positive x-Richtung. Da sich die elastisch-plastischen Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze wieder nahezu aufheben, hängt die Größe des C_p -Wertes hauptsächlich von der x-Komponente der elastisch-plastischen Configurational Forces in der plastischen Zone nahe der Probenrückseite ab. Dadurch wird der Plasticity Influence Term positiv und es kommt zu einem Anti-shielding Effekt und zu einer Herabsetzung von $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ [17].

Dies kann man verstehen, wenn man eine sehr große und eine sehr kleine C(T)-Probe betrachtet, wobei man die Belastungen so wählt, dass $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ für beide Proben gleich groß ist. Nach Gleichung (3.13) ist die Größe der plastischen Zone proportional zu K^2 und somit proportional zum nichtlinear-elastischen J-Integral. Das heißt also, bei einem konstanten $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ -Wert ist die plastische Zone um die Rissspitze für beide Proben gleich. Bei der kleinen Probe verformt sich auch die Probenrückseite plastisch. Die gesamte plastische Verformung ist daher in der kleinen Probe größer und die reversible Formänderungsenergie ist nicht mehr gleich groß wie in der großen Probe.

Die Configurational Forces innerhalb der plastischen Zone erklären auch die Wegabhängigkeit des J -Integrals in einem elastisch-plastischen Material bei Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie. Wählt man einen symmetrischen Pfad, der durch die plastische Zone an der Rissspitze verläuft, heben sich die vom Integrationspfad eingeschlossenen Configurational Forces nicht mehr gegenseitig auf und das J -Integral wird wegabhängig. Dies ist besonders gut bei ESZ zu erkennen, wo die plastische Zone hauptsächlich vor der Rissspitze liegt (siehe Abbildung 6.29). Im EDZ heben sich die elastisch-plastischen Configurational Forces solange gegenseitig auf, solange der Integrationspfad so gewählt wird, dass er nicht durch die plastische Zone an der Probenrückseite verläuft und der Mittelpunkt des Integrationspfades mit der Rissspitze zusammenfällt.

Das elastisch-plastische J -Integral fällt solange mit dem nichtlinear-elastischen J -Integral zusammen, solange sich die plastische Verformung auf die Umgebung der Rissspitze konzentriert und der Mittelpunkt des Integrationspfades mit der Rissspitze zusammenfällt. Für Konturen, welche die plastische Zone an der Probenrückseite schneiden oder deren

Mittelpunkt nicht die Rissspitze ist, ergeben sich Unterschiede zwischen J^{nlel} und J^{ep} . Bei der Ermittlung der risstreibenden Kraft direkt an der Rissspitze wird sowohl das nichtlinear-elastische als auch das elastisch-plastische J -Integral stark wegabhängig, wenn der Integrationspfad sehr nahe an der Rissspitze liegt. Solange die Verformungen an der Rissspitze als infinitesimal angenommen werden (die Belastung ist proportional) sollte das J -Integral an der Rissspitze einen endlichen Wert annehmen. Man sieht jedoch, dass das J -Integral für einen Integrationspfad sehr nahe an der Rissspitze nicht konstant ist, J^{vce} steigt bzw. J^{nlel} und J^{ep} fallen ab. Die numerischen Fehler bei der Berechnung der Spannungen und Dehnungen sehr nahe an der Rissspitze sind so groß, dass das J -Integral nicht mehr genau berechnet werden kann.

Ermittelt man die Spannungen und Dehnungen unter Annahme von finiten Deformationen, kommt es zu einer Rissabstumpfung und die $1/r$ Singularität geht verloren. Innerhalb der Prozesszone ist die Belastung nicht mehr proportional und $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ darf nicht mehr zur Beschreibung der risstreibenden Kraft verwendet werden. Anstelle von $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ muss $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ verwendet werden.

Für $\Gamma_i \rightarrow 0$ scheinen die beiden J -Integrale gegen den Wert Null zu streben. Der Grund, warum $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ für $\Gamma \rightarrow 0$ gegen Null streben, ist, dass in einem elastisch-plastischen Material nahe an der Rissspitze die $1/r$ Singularität verloren geht sobald man mit finiten Deformationen rechnet. Durch das Blunting der Rissspitze tritt ein Anti-shielding Effekt auf, der nur bei J^{ep} beobachtet werden dürfte. Jedoch strebt auch J^{nlel} für $\Gamma \rightarrow 0$ gegen den Wert Null. Dies lässt vermuten, dass der Abfall der J -Kurven nur durch die numerische Fehler verursacht wird. Daher kann man aufgrund der numerischen Ungenauigkeiten bei der Ermittlung der J -Integrale keine genauen Aussagen über die Größe der risstreibenden Kraft treffen.

Berechnet man die Configurational Forces über die Deformationstheorie, ist die einzige Stelle im Material, an der eine Configurational Force auftreten kann, die Rissspitze. Hält man den Integrationsbereich konstant und lässt nur die Elementgröße an der Rissspitze gegen Null gehen, minimiert man den numerischen Fehler und erhält die risstreibende Kraft direkt an der Rissspitze. Sowohl $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ als auch $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ nehmen, im Falle eines stationären Risses, einen endlichen Wert an. Daraus kann man schließen, dass die risstreibende Kraft für einen stationären Riss in einem elastisch-plastischen Material größer als Null ist.

Kapitel 7

Der wachsende Riss

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Ermittlung des J -Integrals und der risstreibenden Kraft für einen wachsenden Riss in einem homogenen elastisch-plastischen Material. Das herkömmliche J -Integral von Rice [4] darf in diesem Fall nicht mehr verwendet werden. Das neue J -Integral von Simha et al. [17] beschreibt auch bei einem wachsenden Riss die risstreibende Kraft, und stellt damit eine Erweiterung der elastisch-plastischen Bruchmechanik dar.

Mittels verschiedener numerischer Modelle soll die Größe der risstreibenden Kraft bestimmt werden. Dazu wird die Verteilung der Configurational Forces in der Probe bei unterschiedlichen Belastungen betrachtet.

Um die Wegabhängigkeit des J -Integrals zu untersuchen werden verschiedene Integrationspfade ausgewertet.

Weiters soll untersucht werden, ob es einen Unterschied zwischen der risstreibenden Kraft bei einem stationären und bei einem wachsenden Riss gibt. Abschließend soll geklärt werden, ob die risstreibende Kraft für einen wachsenden Riss in einem elastisch-plastischen Material wirklich gegen Null geht, wie von Rice 1979 [40] postuliert.

Ein weiterer Punkt in diesem Kapitel ist es festzustellen wie groß der Fehler ist, wenn das J -Integral von Rice [4] angewendet wird um die risstreibende Kraft für einen wachsenden Riss in einem elastisch-plastischen Material zu bestimmen. Dafür werden die Ergebnisse für J^{nel} und J^{ep} gegenübergestellt, und miteinander verglichen.

7.1 Modellbeschreibung

7.1.1 Geometrie, Belastung und Integrationsbereiche

Für die Risswachstumssimulation wurde das im Kapitel 6.1 beschriebene Modell einer C(T)-Probe verwendet. Der einzige Unterschied zum Modell des stationären Risses ist, dass die C(T)-Probe aus zwei getrennten Hälften modelliert wurde. Der Grund dafür liegt in der verwendeten Risswachstumssimulation, worauf im nächsten Kapitel noch genauer eingegangen wird. Bei einem geraden Riss unter Mode I-Belastung würde es aufgrund der Symmetrie ausreichen, nur die halbe Probe zu modellieren. Um das Modell später für eine Mixed-Mode-Belastung erweitern zu können, wurde jedoch immer die gesamte Probe modelliert.

Das verwendete Material ist wiederum ein Stahl S235 mit den in Kapitel 6.1 beschriebenen Eigenschaften.

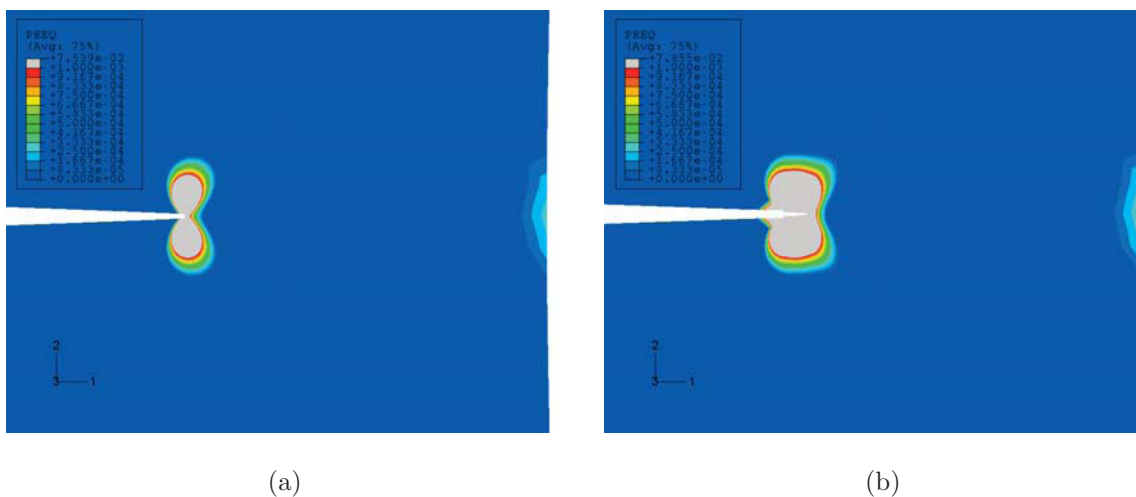


Abbildung 7.1: Plastische Vergleichsdehnung bei $v_{LL} = 0.25$ mm und EDZ; a) kurz vor dem Risswachstum, b) nach Rissverlängerung $\Delta a = 2.7$ mm

Die Risswachstumssimulation erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wurde die Belastung durch die Verschiebung zweier Knoten am linken Rand der Probe aufgebracht (siehe Abbildung 6.2). Dabei steigt die Belastung schrittweise von der Prozesszeit $t = 0$ bis $t = 1$, mit einem Zeitinkrement von $\Delta t = 0.1$. Während der gesamten Belastung bleibt die Risslänge konstant, wobei $a_0 = 27$ mm beträgt. Im zweiten Schritt erfolgte die Rissverlängerung bei konstanter Lastlinienverschiebung, wobei der Riss um $\Delta a = 3$ mm verlängert wurde. Der Rissfortschritt betrug dabei in allen Modellen 0.15 mm pro Zeitinkrement $\Delta t = 0.1$.

Um den Einfluss der Größe der plastischen Zone auf die risstreibende Kraft bei einem wachsenden Riss untersuchen zu können, wurden Materialien mit unterschiedlichen Risswiderständen angenommen und drei Modelle erstellt. Im ersten Modell erfolgt die Initiierung des Risswachstums bereits bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.1$ mm (Contained Yielding), im zweiten Modell bei $v_{LL} = 0.25$ mm (Uncontained Yielding) und im dritten Modell bei $v_{LL} = 0.5$ mm (General Yielding).

In Abbildung 7.1 kann man die Entwicklung der plastischen Zone bei $v_{LL} = 0.25$ mm sehen. Im Belastungsschritt bildet sich um die Rissspitze und an der Probenrückseite eine plastische Zone aus (Abbildung 7.1(a)). Beim Risswachstum kommt es zu einer Vergrößerung der gesamten plastischen Zone (Abbildung 7.1(b)). Der Bereich vor der aktuellen Rissspitze wird durch das Risswachstum plastisch Verformt. Dieser plastisch verformte Bereich wandert mit der Rissspitze mit (siehe Abbildung 7.2. Die Größe dieser aktuellen plastische Zone ist kleiner als die ursprüngliche plastische Zone und nimmt auch mit zunehmender Rissverlängerung ab. Die Abnahme ist durch die Rissverlängerung unter konstanter Lastlinienverschiebung zu erklären. Die Rissverlängerung unter konstanter Lastlinienverschiebung wurde nur gewählt, um die Modellierung möglichst einfach zu machen. Bei einer Rissverlängerung unter konstanter Last, würde die aktuelle plastische Zone größer werden.

Alle Berechnungen wurden sowohl für den EDZ als auch für den ESZ durchgeführt. weilers wurde auch beim wachsenden Riss die Elementgröße im Bereich A (Abbildung 6.2) zwischen $m = 0.3$ und 0.025 mm variiert.

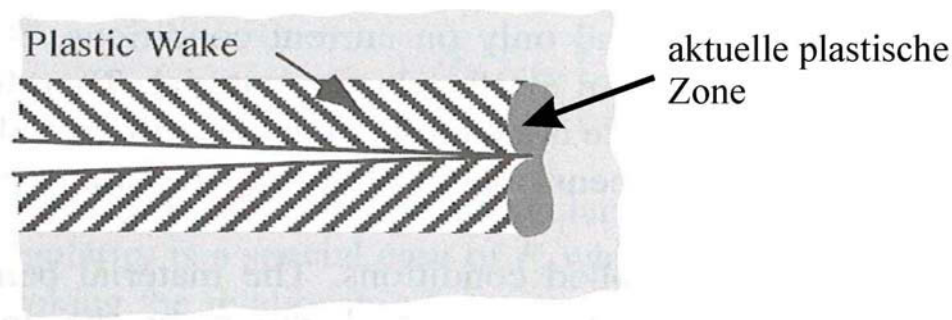


Abbildung 7.2: Steady State Risswachstum mit gesamter und aktueller plastischer Zone

[28]

Für die Berechnung der J -Integrale aus den Configurational Forces wurden wieder unterschiedliche Integrationsbereiche innerhalb der C(T)-Probe definiert. In Abbildung 7.3 sind verschiedene Integrationsbereiche vor und nach einer Rissverlängerung, $\Delta a = 2.7$, mm eingezeichnet. Die Integrationsbereiche sind quadratisch und werden mit Γ_{i-j} be-

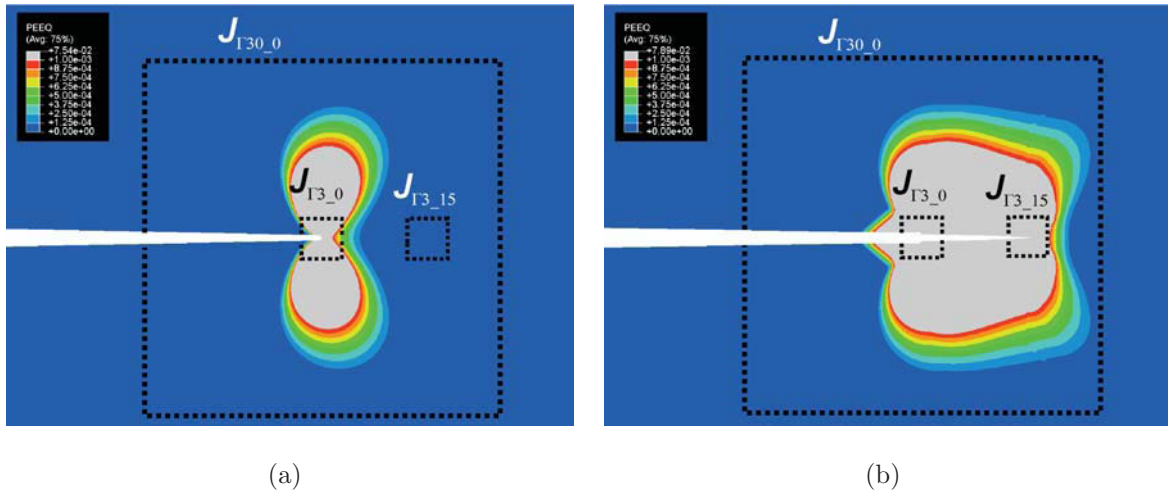


Abbildung 7.3: Verschiedene Integrationsbereiche zur Bestimmung des J -Integrals für $v_{LL} = 0.25$ mm und EDZ; a) kurz vor dem Risswachstum, b) nach Rissverlängerung $\Delta a = 2.7$ mm

zeichnet. Dabei bezeichnet der Index i die Nummer der Kontur um die Risspitze (Größe des Integrationsbereiches $\Gamma = (2 * i)^2 m^2$) und der Index j um wie viele Knoten der Mittelpunkt des Integrationsbereiches von der Risspitze des stationären Risses entfernt liegt. Zum Beispiel bedeutet Γ_{10_10} , dass die Kontur zehn Elementringe um die Risspitze enthält, und dass der Mittelpunkt der Kontur 10 Elemente vor der Risspitze des stationären Risses liegt.

Die J -Integrale wurden für jeden Risswachstumsschritt und für alle Bereiche berechnet. Dadurch können die Verläufe der J -Integrale für verschiedene Konturen bestimmt werden. Befindet sich die aktuelle Risspitze immer im Zentrum der Kontur, erhält man einen J -Integralverlauf, bei dem die Integrationskontur mit der aktuellen Risspitze mitwandert. Im Weiteren werden diese J -Integraleverläufe mit J_{Γ_i} bezeichnet.

Bleibt j konstant, ist die Kontur ortsfest, wodurch der Riss die Kontur durchquert. Für die Berechnung von J_{far} wurde wieder ein Pfad nahe an der Probenoberfläche verwendet der sich immer eine Elementreihe hinter der Probenoberfläche befindet und auch den Bereich D (siehe Abbildung 6.5) ausschließt.

7.1.2 Risswachstumssimulation

Für die Risswachstumssimulation wurde ein in ABAQUS [38] integriertes Werkzeug verwendet, welches als Debonding bezeichnet wird. Dabei wird der Risspfad bereits im Anfangszustand festgelegt, indem man die obere und untere Hälfte der Probe getrennt mo-

modelliert. Die potentiellen Rissflanken werden dabei als Master- und Slave-Kontaktfläche modelliert (siehe Abbildung 7.4). Entlang des Risspfades existieren also Knotenpaare, wobei ein Knoten der Master-Fläche und ein Knoten der Slave-Fläche zugeordnet ist. Um nun festzustellen, welche Knotenpaare am Anfang noch miteinander verbunden sind, muss man ein Knotenset festlegen, welches gerade die gebundenen Knoten der Slave-Fläche enthält (siehe Abbildung 7.4). Der restliche Teil der Slave-Fläche wird als normale Kontaktfläche behandelt. Um Risswachstum zu simulieren, müssen die gebundenen Knoten von der Master-Fläche gelöst werden. Um festzulegen, wann dies geschehen soll, gibt es in ABAQUS (Versionen 6.6 und 6.7) drei unterschiedliche Kriterien. Alle drei Kriterien gehen davon aus, dass der Rissspitzenknoten gelöst wird, sobald das gewählte Bruchkriterium f den Wert 1.0 erreicht.

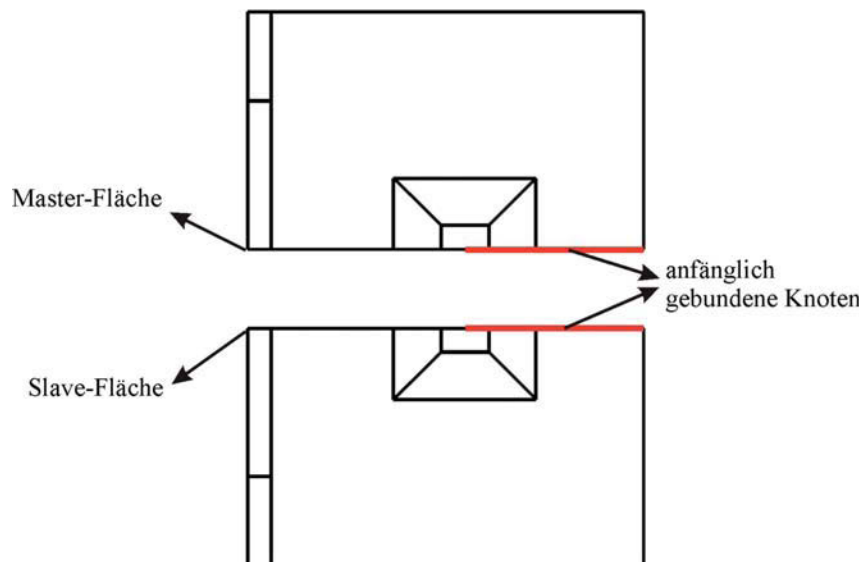


Abbildung 7.4: 2D Risswachstumsmodell mit den Kontaktflächen und den gebundenen Knoten

Abbildung 7.5 zeigt die drei verschiedenen Bruchkriterien. Beim Kriterium der kritischen Spannung (Abbildung 7.5a) kommt es zu Rissverlängerung, sobald eine kritische Spannung in einem definierten Abstand vor der Risspitze überschritten wird,

$$f = \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma^f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{\tau_1^f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_2^f}\right)^2}, \quad (7.1)$$

mit $\hat{\sigma}_n = \max(\sigma_n, 0)$. In Gleichung (7.1) bezeichnet σ_n die Spannungskomponente normal zum Interface, τ_1 und τ_2 die Scherspannungen im Interface und σ^f , τ_1^f und τ_2^f die kritischen Werte, bei denen es zum Risswachstum kommt. Dieses Kriterium ist besonders gut für

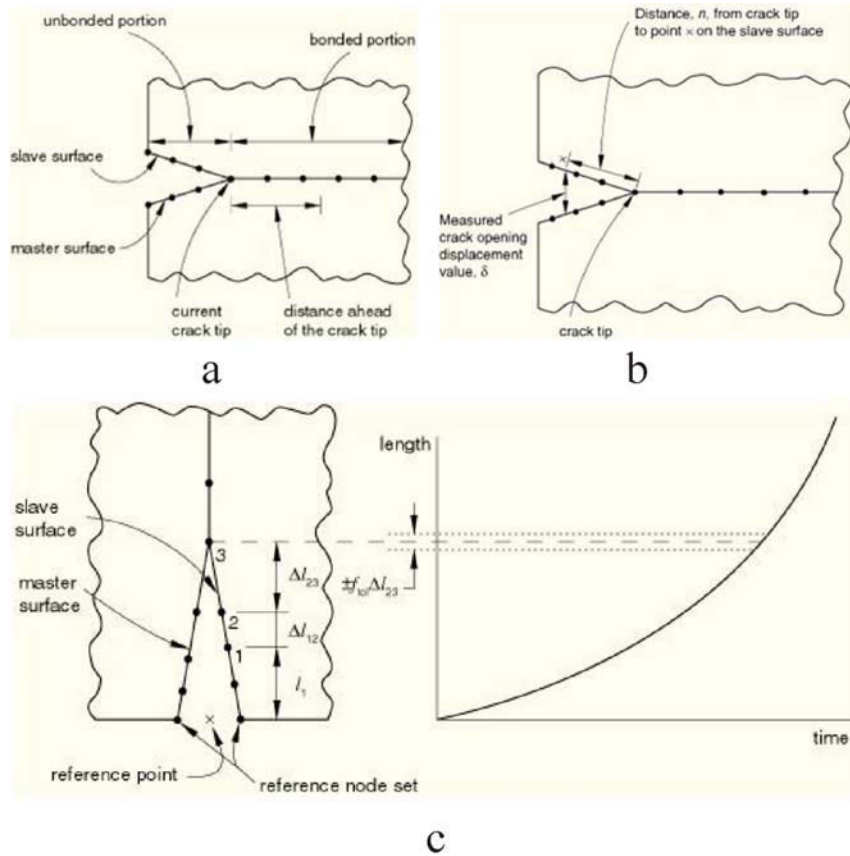


Abbildung 7.5: Möglichkeiten für eine Risswachstumssimulation a) Kriterium der kritischen Spannung b) Kriterium des kritischen COD-Wertes c) Kriterium der Rissverlängerung pro Zeitinkrement, [38].

spröde Werkstoffe geeignet.

Abbildung 7.5b zeigt das Kriterium des kritischen COD-Wertes. Dabei geht man davon aus, dass der Risspitzenknoten gelöst wird, sobald ein kritischer COD-Wert in einem definierten Abstand hinter der Risspitze erreicht wird,

$$f = \frac{\delta}{\delta_c}, \quad (7.2)$$

wobei δ den aktuellen gemessenen COD-Wert und δ_c den kritischen COD-Wert bezeichnet. Beim dritten Kriterium (siehe Abbildung 7.5c) ist die Risslänge eine explizite Funktion der Zeit. Man muss also einen Zusammenhang zwischen Risslänge und Zeit angeben. Es kommt pro vorgegebenen Zeitinkrement zu einer definierten Rissverlängerung, und das Bruchkriterium lautet

$$f = \frac{l - l_3 - \delta l_{23}}{\Delta l_{23}} \quad (7.3)$$

mit $l_3 = l_1 + \Delta l_{12} + \Delta_{23}$ (siehe Abbildung 7.5c), wobei l die Risslänge zu einer definierten Zeit t bezeichnet.

Für eine Risswachstumssimulation unter konstanter Lastlinienverschiebung ist das dritte Kriterium besonders gut geeignet, weshalb alle Berechnungen mit diesem Kriterium durchgeführt wurden.

Um eine sprunghafte Rissverlängerung zu vermeiden, werden die beiden Rissspitzenknoten mit einer Kraft normal zur Rissflanke beaufschlagt, sobald die Verbindung des Knotenpaares gelöst wird. Diese Kraft wird dann abhängig vom Materialverhalten auf Null gesenkt [38].

7.2 Verteilung der Configurational Forces in der C(T)-Probe bei Risswachstum

7.2.1 Ebener Dehnungszustand

In Abbildung 7.6, sind die nichtlinear-elastischen Configurational Forces, \mathbf{f}^{nel} , in der Umgebung der Rissspitze bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{\text{LL}} = 0.25$ dargestellt. Abbildung 7.6(a) zeigt die Verteilung der Configurational Forces im Moment vor der Initiierung des Risswachstums und Abbildung 7.6(b) die Verteilung nach einer Rissverlängerung $\Delta a = 2.7$ mm. In Abbildung 7.7 sieht man die Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces, \mathbf{f}^{ep} , vor und nach einer Rissverlängerung von 2.7 mm. Dargestellt sind nur Configurational Forces, deren Betrag kleiner als 1.7 kJ/m^2 ist.

Die Verteilung der Configurational Forces in der plastischen Zone eines stationären Risses wurde bereits in Kapitel 6.2 ausführlich erklärt. Der einzige Unterschied zu den Bildern in Kapitel 6.2 sind die Configurational Forces, die entlang des Risspfades auftreten. Diese entstehen durch die Risswachstumssimulation. Die beiden Probenhälften wurden, wie in Abschnitt 7.1.2 beschrieben, getrennt voneinander modelliert. Die Verbindung erfolgt durch die Kopplung der Knoten entlang des Risspfades. Das bedeutet also, dass sich die Elemente oberhalb und unterhalb des Risspfades nicht die selben Knoten teilen. Es liegen lediglich Knotenpaare auf den gleichen Koordinaten.

Wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, ergeben sich die Configurational Forces in einem Knoten durch die Assemblierung der Configurational Forces der sie umgebenden Elemente. Nun fehlen jedoch die Elemente oberhalb bzw. unterhalb des Risspfades bei der Assemblierung, da sich die Elemente auf einen anderen Knoten beziehen. Dadurch treten entlang der

Probenteilung Configurational Forces in y -Richtung auf. Diese kommen an der Probenoberseite und an der Probenunterseite mit umgekehrten Vorzeichen vor und eliminieren sich daher gegenseitig.

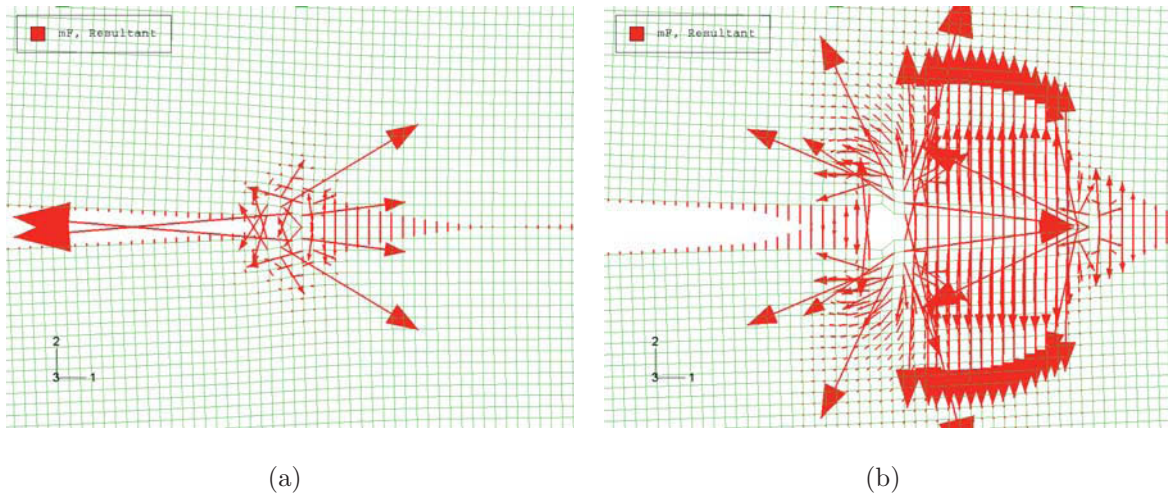


Abbildung 7.6: Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, EDZ bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm

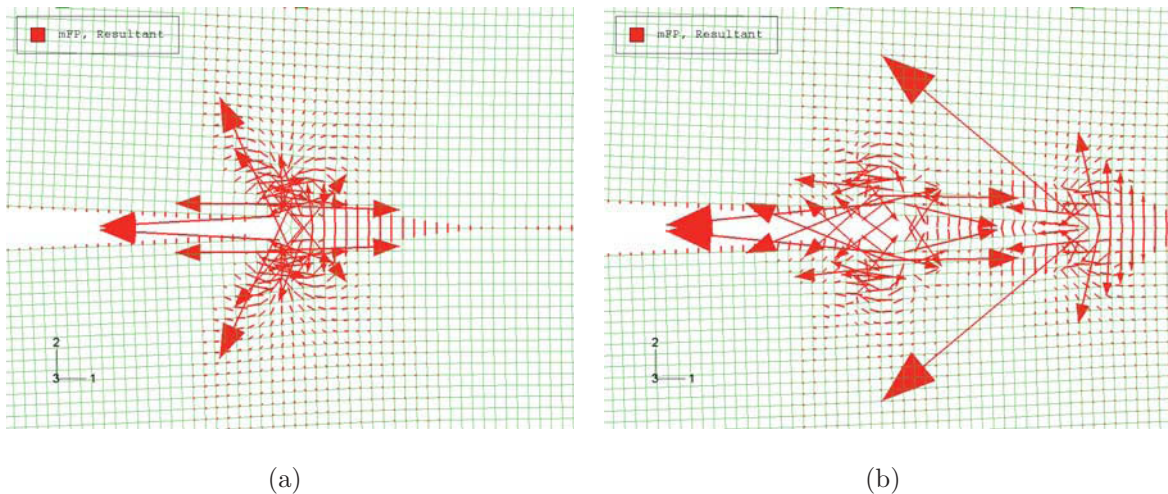


Abbildung 7.7: Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, EDZ bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm

Direkt an der Rissspitze treten ebenfalls zwei Configurational Forces auf (siehe Abbildung 7.6(b) und 7.7(b)), das dadurch erklärt werden kann, dass die Rissspitze aus zwei Knoten besteht. Die risstreibende Kraft \mathbf{f}_{tip} ergibt sich aus der Vektoraddition dieser beiden Kräfte.

Kommt es zum Risswachstum, wächst die plastische Zone mit der Rissspitze mit. Dadurch entstehen auch in der wachsenden plastischen Zone Configurational Forces (Ab-

bildung 7.7(b)). Die elastisch-plastischen Configurational Forces entstehen wieder durch den Gradient der plastischen Verformung. Betrachtet man die elastisch-plastischen Configurational Forces nach 2.7 mm Rissverlängerung, sieht man, dass Configurational Forces sowohl in der aktuellen plastischen Zone als auch in der ursprünglichen plastischen Zone auftreten. Zwischen diesen Bereichen sind die elastisch-plastischen Configurational Forces sehr klein, da dort der Gradient der plastischen Verformung sehr klein ist.

Anders als beim stationären Riss, treten beim wachsenden Riss nichtlinear-elastische Configurational Forces nicht nur in der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze sondern auch in der gesamten plastischen Zone auf. Entlang der neuen Bruchflächen entstehen sehr große Configurational Forces in y -Richtung (siehe Abbildung 7.6(b)).

In einem homogenen nichtlinear-elastischen Material dürfen Configurational Forces nur an der Rissspitze und an den Probenberandungen, aber nicht im Bulk des Material (siehe Kapitel 6), auftreten. Ursache für das Auftreten dieser nichtlinear-elastischen Bulk Configurational Forces ist, dass bei ihrer Berechnung die Deformationstheorie der Plastizität bei einem realen elastisch-plastischen Körper angewendet wird. Durch das Risswachstum kommt es jedoch zu Entlastungen im Material. Die Deformationstheorie geht davon aus, dass die gesamte Formänderungsenergie reversibel ist. In einem elastisch-plastischen Material ist jedoch nur mehr der elastische Teil der Formänderungsenergie reversibel. Dadurch darf die Deformationstheorie bei Entlastungen, wie z.B. beim Risswachstum, nicht mehr angewendet werden.

Erfolgen die Ermittlung der Spannungen und Dehnungen mittels der inkrementellen Plastizitätstheorie und die Berechnung des J -Integrals bzw. der Configurational Forces mittels Deformationstheorie, verschwindet die Divergenz des Eshelby-Tensors nicht mehr (Kapitel 4.3 und 4.4) und es treten innerhalb der plastischen Zone nichtlinear-elastische Configurational Forces auf. Beim Entlasten bleibt der plastische Anteil der Formänderungsenergie-dichte konstant, oder nimmt sogar etwas zu, wodurch der Klammerterm von Gleichung (4.32) nicht verschwindet, und es treten nichtlinear-elastische Configurational Forces auf. Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces entstehen ebenfalls nur dort, wo es einen Gradient der plastischen Verformung gibt.

Um besser zu verstehen, weshalb diese nichtlinear-elastischen Configurational Forces beim Risswachstum auftreten, betrachten wir zwei Materialpunkte (Knoten) in der plastischen Zone (Abbildung 7.8). Der Knoten P_I liegt beim Belastungsschritt innerhalb des plastisch verformten Bereiches, während Knoten P_{II} zunächst in einem rein elastisch verformten Bereich liegt. Erst nach einer Rissverlängerung von $\Delta a = 0.9$ mm beginnt sich der Bereich

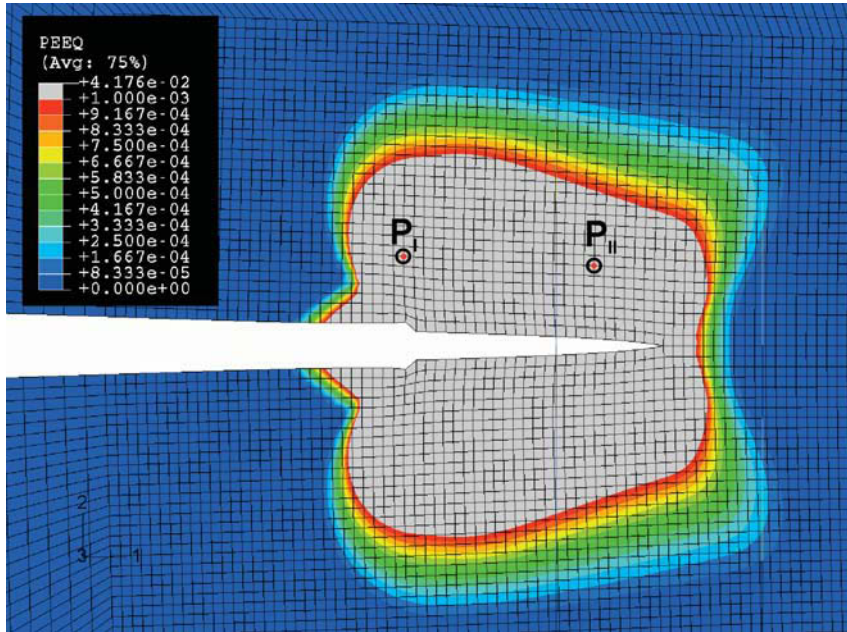


Abbildung 7.8: Materialpunkte zur Bestimmung der Configurational Forces in der plastischen Zone; für EDZ $v_{LL} = 0.25$ mm, $\Delta a = 2.7$ mm und $m = 0.15$ mm

um P_{II} plastisch zu verformen.

In Abbildung 7.9 sind die Configurational Forces und die Formänderungsenergiedichte in den beiden Materialpunkten über die Prozesszeit aufgetragen. Die gesamte Formänderungsenergiedichte in einem elastisch-plastischen Material kann nach Gleichung (3.30) in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden. Im Weiteren wird der elastische Anteil der Formänderungsenergiedichte mit ϕ^{el} und der plastische mit ϕ^{pl} bezeichnet.

Betrachtet man zunächst die Configurational Forces in Punkt P_I sieht man, dass sowohl die Komponenten der elastisch-plastischen Configurational Forces f_x^{ep} und f_y^{ep} als auch die Komponenten der nichtlinear-elastischen Configurational Forces f_x^{nlel} und f_y^{nlel} bis zur Prozesszeit $t = 0.4$ gleich Null sind. Erst ab $t = 0.4$ beginnt sich das Material am gewählte Materialpunkt plastisch zu verformen, das man aus dem Verlauf der plastischen Formänderungsenergiedichte, ϕ^{pl} , erkennen kann (Abbildung 7.9(d)). Der plastische Anteil der Formänderungsenergiedichte, ϕ^{pl} , ist ebenfalls bis zur Prozesszeit $t = 0.4$ gleich Null (schwarze Kurve in Abbildung 7.9(d)). Der elastische Anteil, ϕ^{el} , steigt bereits ab dem Beginn der Belastung an. Bis zur Zeit $t = 1.0$ (Initiierung des Risswachstums) steigen sowohl ϕ^{el} als auch ϕ^{pl} sehr stark an. ϕ^{el} erreicht in P_I bei maximaler Belastung, $v_{LL} = 0.25$, ein Maximum von 0.528 MJ/m³ und sinkt während des Risswachstums nach ca. 2.7 mm auf einen konstanten Wert von 0.125 MJ/m³ ab. ϕ^{pl} erreicht erst bei $t = 1.5$ ($\Delta a = 0.75$

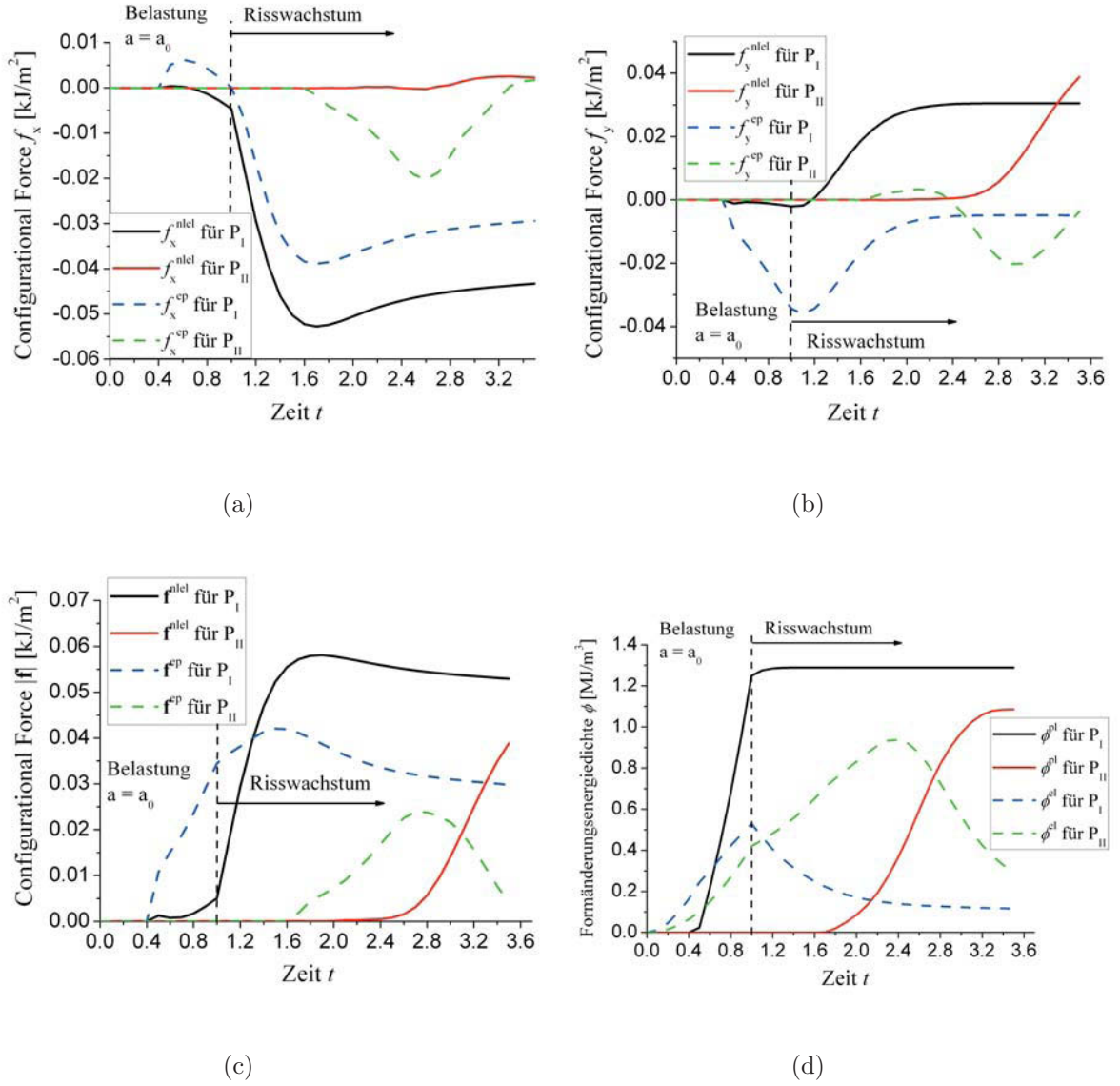


Abbildung 7.9: Entwicklung der Configurational Forces und der Formänderungsenergie-dichte in den Punkten P_I und P_{II} ; a) Configurational Forces in x-Richtung, b) Configurational Forces in y-Richtung, c) Betrag der Configurational Force-Vektoren, d) Formänderungsenergie-dichte; $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ

mm) ein Maximum von 1.289 MJ/m^3 und bleibt danach konstant. Zwischen $t = 1.0$ und $t = 1.5$ kommt es jedoch nur zu einer sehr geringen Zunahme von ϕ^{pl} . Diese ergibt sich durch den Abbau der gespeicherten elastischen Arbeit, die beim Risswachstum frei wird. Betrachtet man die dazugehörigen Configurational Forces für den Punkt P_I , sieht man, dass f_x^{nlel} (Abbildung 7.9(a)) und f_y^{nlel} (Abbildung 7.9(b)) zu vernachlässigen sind, solange die Belastung stetig zunimmt. Erst ab dem Zeitpunkt, bei dem das Risswachstum einsetzt, beginnt f_x^{nlel} stark zu fallen bzw. f_y^{nlel} stark zu steigen. Bei $t = 1.7$ ($\Delta a = 1.05$

mm) erreicht f_x^{nlel} ein Minimum von -0.053 kJ/m^2 und beginnt danach wieder leicht zu steigen. f_y^{nlel} steigt bis $t = 2.1$ ($\Delta a = 1.65 \text{ mm}$) und bleibt anschließend konstant, $f_y^{\text{nlel}} = 0.031 \text{ kJ/m}^2$.

Im Gegensatz zu f_x^{nlel} und f_y^{nlel} beginnen f_x^{ep} und f_y^{ep} zu steigen bzw. zu fallen, sobald der Punkt P_I plastisch verformt wird. Dabei nimmt f_x^{ep} zunächst positive Werte an, sinkt ab $t = 0.6$ und erreicht bei $t = 1.0$ wieder Null. Im Risswachstumsschritt sinkt f_x^{ep} weiter ab und erreicht ebenfalls bei $t = 1.7$ ein Minimum. Danach verlaufen die Kurven von f_x^{ep} und f_x^{nlel} parallel bei unterschiedlichen Werten. f_y^{ep} sinkt ab $t = 0.4$ und erreicht bei $t = 1.1$ ($\Delta a = 0.15 \text{ mm}$) ein Minimum. Danach steigt f_y^{ep} wieder an und bleibt ab $t = 2.1$ konstant. Auch f_y^{ep} ist im Risswachstumsschritt parallel zu f_y^{nlel} , hat jedoch negative Werte. Die roten bzw. die grünen Kurven in Abbildung 7.9(a) und 7.9(b) zeigen den Verlauf der Configurational Forces für den Materialpunkt P_{II} . Auch die Formänderungsenergiedichten ϕ^{el} und ϕ^{pl} sind in Abbildung 7.9(d) aufgetragen, in der man sieht, dass der Punkt P_{II} erst nach $t = 1.6$ ($\Delta a = 0.9 \text{ mm}$) plastisch verformt wird, denn erst ab diesem Zeitpunkt steigt ϕ^{pl} stark an und erreicht bei $t = 3.4$ ($\Delta a = 3.6 \text{ mm}$) den maximalen Wert. ϕ^{el} steigt bereits am Beginn der Belastung und erreicht bei $t = 2.3$ ($\Delta a = 1.95 \text{ mm}$) ein Maximum, obwohl die Risspitze noch hinter P_{II} liegt. Danach fällt ϕ^{el} ab und nimmt bei weiterer Rissverlängerung wieder einen konstanten Wert an.

Auch die Komponenten der Configurational Forces in Punkt P_{II} sind bis $t = 1.6$ gleich Null. Erst wenn sich der Materialpunkt plastisch verformt und ein Gradient in der plastischen Verformung entsteht, tritt eine elastisch-plastische Configurational Force in Punkt P_{II} auf. Dabei erreicht f_x^{ep} bei $t = 2.5$ ($\Delta a = 2.25 \text{ mm}$) ein Minimum und geht anschließend wieder auf Null zurück. Ist die gesamte aktuelle plastische Zone durch P_{II} gelaufen, ist die plastische Verformung in der Umgebung von P_{II} überall gleich groß, und es treten keine Configurational Forces mehr auf. Die y-Komponente von \mathbf{f}^{ep} nimmt zunächst kleine positive Werte an, sinkt jedoch bei $t = 2.2$ ($\Delta a = 1.8 \text{ mm}$) und wird bei $t = 2.4$ ($\Delta a = 2.1 \text{ mm}$) negativ bis sie bei $t = 2.9$ ($\Delta a = 2.85 \text{ mm}$) ein Minimum erreicht und danach wieder ansteigt.

Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces treten wiederum erst dann auf, wenn es im Punkt P_{II} zu Entlastungen kommt. Bei $t = 2.3$ beginnt die elastische Formänderungsenergiedichte im Punkt P_{II} abzunehmen, und zum selben Zeitpunkt beginnt f_y^{nlel} anzusteigen. f_x^{nlel} in P_{II} bleibt über den gesamten Belastungszeitraum sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces treten also zufolge der Entlastungs-

vorgänge beim Risswachstum auf. Daher liefert die Berechnung des nichtlinear-elastischen J -Integrals falsche Ergebnisse, sobald es zu Entlastungen im Material kommt und darf auch nicht mehr verwendet werden.

7.2.2 Ebener Spannungszustand

In den Abbildung 7.10 und 7.11 sind die Configurational Forces in der plastischen Zone vor und nach 2.7 mm Rissverlängerung für den ebenen Spannungszustand dargestellt. Zu sehen sind nur Configurational Forces, die kleiner als 1.7 kJ/m^2 sind, bei $v_{LL} = 0.25 \text{ mm}$.

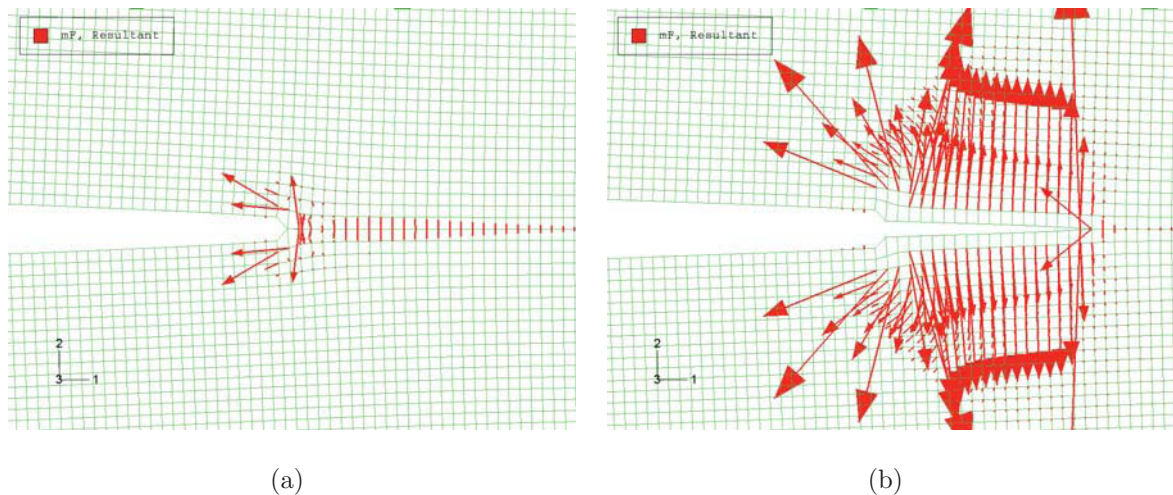


Abbildung 7.10: Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.25 \text{ mm}$, $m = 0.15 \text{ mm}$, ESZ und bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7 \text{ mm}$

Auch beim ESZ ändert sich im Belastungsschritt annähernd nichts im Vergleich zum stationären Riss. Die nichtlinear-elastischen Configurational Forces treten nur in der Umgebung der Risspitze, auf und die elastisch-plastischen Configurational Forces existieren in der gesamten plastischen Zone. Die Kräfte entlang des Risspfades entstehen wieder durch die getrennte Modellierung der beiden Probenhälften.

Auch im ESZ treten nach Rissverlängerung nichtlinear-elastische Configurational Forces in der plastischen Zone auf. Der Grund entspricht jenem wie beim ebenen Dehnungszustand.

Die elastisch-plastischen Configurational Forces nehmen in der plastischen Zone hinter der laufenden Risspitze ab und verschwinden beinahe (Abbildung 7.11(b)). Nur in der aktuellen plastischen Zone und in einem kleinen Bereich um die ursprüngliche Risspitze

treten Configurational Forces auf.

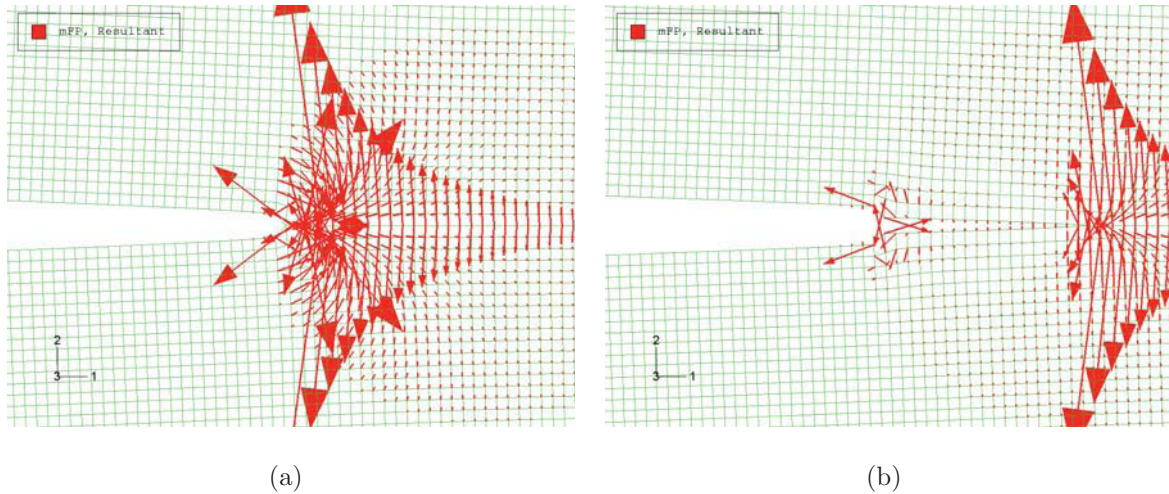


Abbildung 7.11: Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, ESZ und bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm

7.3 Die risstreibende Kraft für wachsende Risse

In diesem Kapitel soll die risstreibende Kraft für einen wachsenden Riss bestimmt werden. Dafür wird zunächst J^{ep} für unterschiedliche Integrationsbereiche betrachtet. Anschließend wird die Elementgröße im Bereich der Rissspitze geändert um den Rissspitzen nahen Bereich genauer zu betrachten.

Obwohl das herkömmliche J -Integral von Rice [4] bei Risswachstum nicht mehr verwendet werden darf, wird auch J^{nlel} berechnet um die Ergebnisse der beiden J -Integrale gegenüber zu stellen.

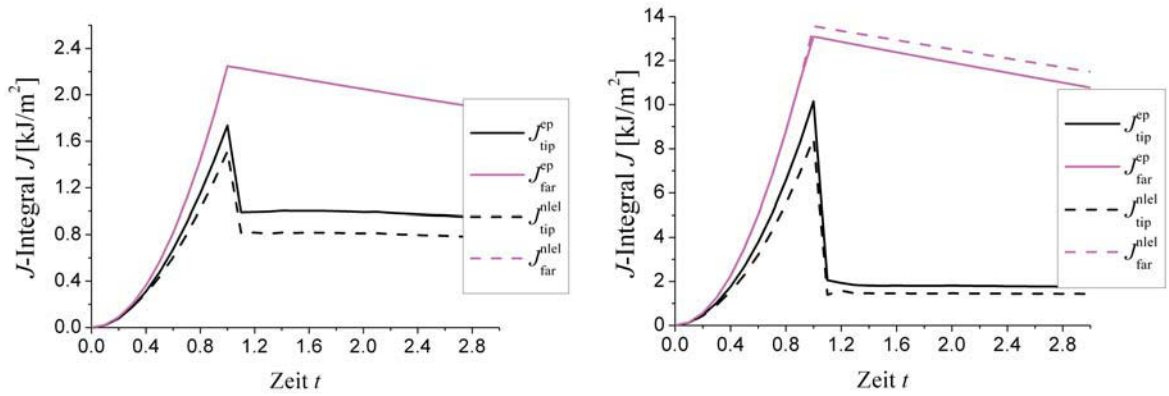
7.3.1 Ebener Dehnungszustand

7.3.1.1 Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)

In den Abbildungen 7.12(a) bis 7.12(c) sind J_{tip} und J_{far} über die Prozesszeit für $v_{LL} = 0.1$, 0.25 und 0.5 mm dargestellt. Für die Berechnung der J_{far} -Werte wurde eine Kontur nahe der Probenoberfläche verwendet. Zur Berechnung der J_{tip} -Werte wurde nur der Rissspitzenknoten verwendet.

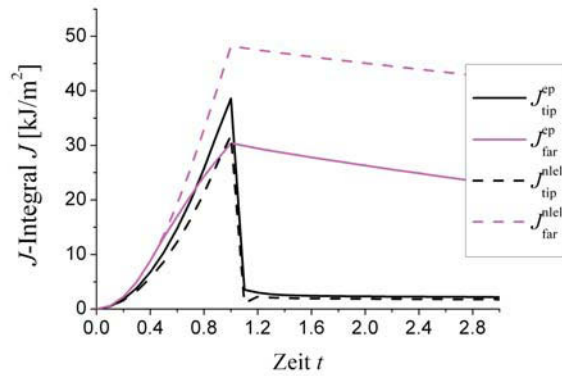
Der Verlauf der J -Kurven im Belastungsschritt wurde bereits ausführlich im Kapitel 6 erklärt, weshalb wir uns hier auf den Risswachstumsschritt beschränken wollen. Betrachtet

man den Verlauf von J_{far} bei einer Belastung von $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$, so sieht man, dass sowohl $J_{\text{far}}^{\text{nlcl}}$ als auch $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ mit zunehmender Risslänge monoton abnehmen. Die Abnahme von J_{far} erfolgt aufgrund der Rissverlängerung unter konstant bleibender Lastlinienverschiebung. Wie beim Belasten einer Probe mit stationären Riss sind auch beim Risswachstum $J_{\text{far}}^{\text{nlcl}}$



(a)

(b)



(c)

Abbildung 7.12: J_{tip} und J_{far} für a) $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$, b) $v_{\text{LL}} = 0.25 \text{ mm}$ und c) $v_{\text{LL}} = 0.5 \text{ mm}$, $m = 0.15 \text{ mm}$ und für EDZ

und $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ identisch, solange sich die plastische Verformung auf die Umgebung der Risspitze konzentriert, das gilt für $v_{\text{LL}} = 0.1 \text{ mm}$ (Contained Yielding). Auch bei einer Belastung von $v_{\text{LL}} = 0.25 \text{ mm}$ und $v_{\text{LL}} = 0.5 \text{ mm}$ nimmt J_{far} mit zunehmender Risslänge linear ab. Ein Unterschied zwischen $J_{\text{far}}^{\text{nlcl}}$ und $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ tritt bereits im Belastungsschritt auf, wie schon in Kapitel 6 beschrieben. Die J -Werte sind für die drei Belastungen und für zwei Risslängen ($\Delta a = 0$ und 2.7 mm) in Tabelle 7.1, am Ende dieses Abschnitts, eingetragen.

Betrachtet man $J_{\text{tip}}^{\text{nlcl}}$ und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$, sieht man, dass sowohl die $J_{\text{tip}}^{\text{nlcl}}$ -Werte als auch die $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ -Werte bereits nach dem ersten Risswachstumsschritt auf einen kleinen Wert abfallen.

Dieser Wert hängt von der Höhe der Belastung ab und bleibt bei der weiteren Rissverlängerung annähernd konstant (siehe Abbildung 7.12 und Tabelle 7.1). Die Höhe des J_{tip} -Wertes hängt jedoch primär von der gewählten Elementgröße in der Umgebung der Risspitze ab. Darauf wird aber später noch ausführlich eingegangen.

Zunächst sollen die J -Integrale für Integrationspfade zwischen Γ_{tip} und Γ_{far} genauer betrachtet werden.

7.3.1.2 Einfluss des Integrationspfades

In den Abbildungen 7.16 bis 7.18 sind die J -Werte zwischen J_{tip} und J_{far} bei unterschiedlichen Belastungen über die Prozesszeit aufgetragen. Die J_{Γ_i} -Werte wurden in jedem Risswachstumsschritt für unterschiedliche Konturen um die Risspitze berechnet. Dabei liegt die Mitte der Kontur Γ_i immer an der aktuellen Risspitze.

Die Entwicklung des J -Integrals ist für die unterschiedlichen Konturen und auch für die unterschiedlichen Belastungen sehr ähnlich. Daher betrachten wir zunächst den Verlauf einer einzigen Kontur, Γ_{14} , bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm (Abbildung 7.13). Um die Abweichungen von J_{tip} und J_{far} zu zeigen, sind in Abbildung 7.13 zusätzlich zu $J_{\Gamma_{14}}$ noch die Verläufe von J_{tip} und J_{far} eingetragen. Die roten Linien sollen die Zeitpunkte kennzeichnen, bei denen sich der Verlauf der J -Kurve ändert. Um diese Änderungen genauer zu beschreiben, sind in den Abbildungen 7.14(a) bis 7.14(d) die Configurational Forces in der Umgebung der Risspitze und der Integrationspfad Γ_{14} für unterschiedliche Risslängen bzw. Prozesszeiten dargestellt.

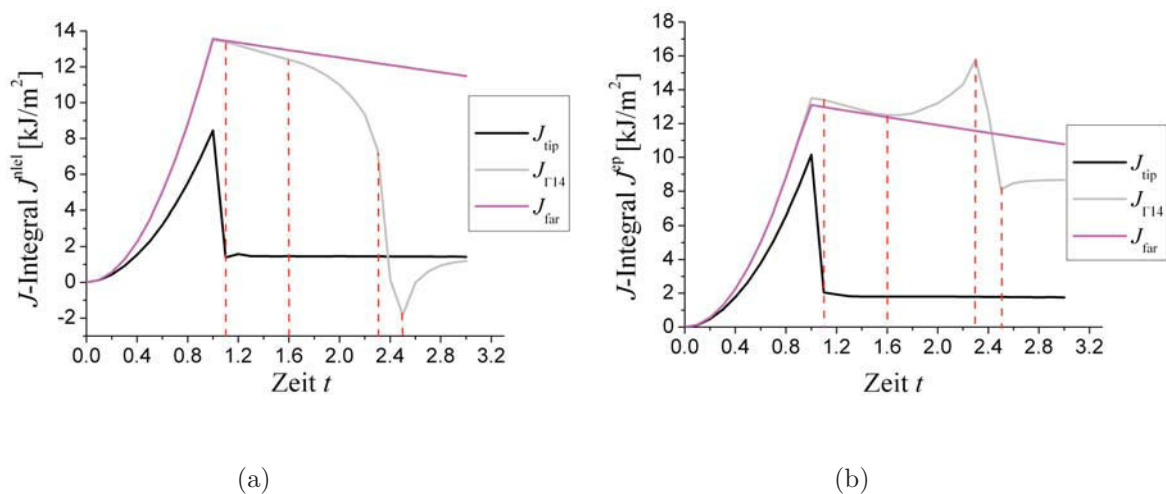


Abbildung 7.13: J_{tip} , J_{far} und $J_{\Gamma_{14}}$ für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

Das elastisch-plastische J -Integral für die Kontur Γ_{14} steigt ebenso wie $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ und $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ während der Belastung quadratisch mit der Lastlinienverschiebung an. Bei maximaler Belastung ist $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ etwas größer als $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ (siehe Tabelle 7.1), da wegen der plastischen Verformung an der Probenrückseite $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ reduziert wird. Die Kontur $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ durchquert die plastische Zone an der Probenrückseite nicht, und ist dadurch etwas größer als $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$. Beim

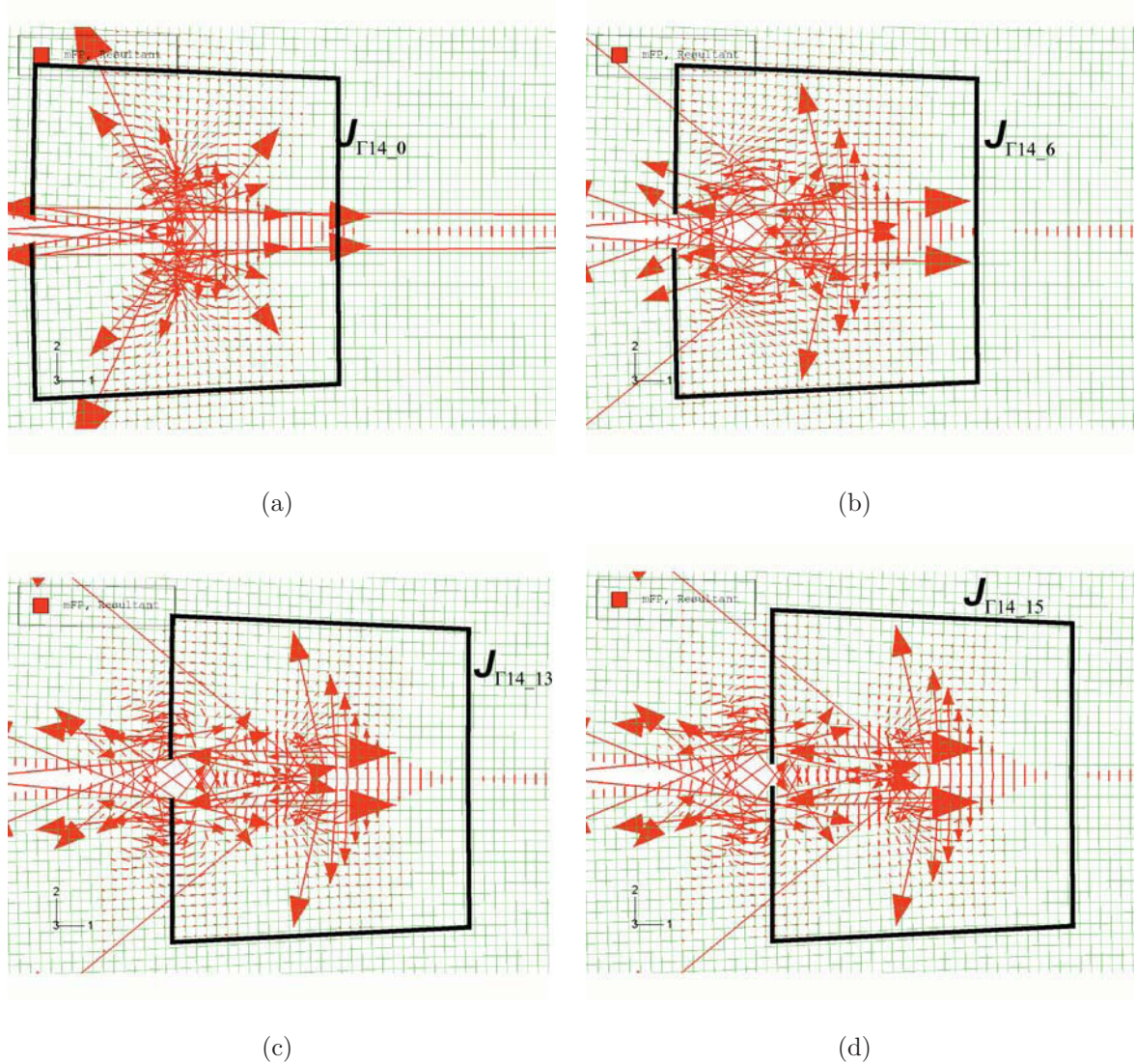


Abbildung 7.14: Elastisch-plastische Configurational Forces in der Umgebung der Risspitze und der Pfad Γ_{14} für eine Rissverlängerung von a) $\Delta a = 0$, b) $\Delta a = 0.9$ mm, c) $\Delta a = 1.95$ mm und d) $\Delta a = 2.1$ mm; für $m = 0.15$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und EDZ.

Risswachstum sinkt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ zunächst und erreicht bei einer Rissverlängerung von $\Delta a = 0.9$ mm ($t = 1.6$) einen Wert von $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}} = 12.5$ kJ/m². Die Abnahme von $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ ist durch die Abnahme der Spannungen in der Umgebung des wachsenden Risses zu erklären. Dadurch werden die Configurational Forces in der plastischen Zone kleiner und $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ sinkt. Ab

$t = 1.6$ beginnt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ wieder zu steigen und erreicht bei einer Risslänge von $\Delta a = 1.95$ mm ($t = 2.3$) den maximalen Wert von 15.8 kJ/m². Die Zunahme von $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ kann leicht erklärt werden, wenn man Abbildung 7.14(c) betrachtet:

Da sich der Integrationsbereich mit der Rissspitze mitbewegt, berührt der linke Rand des Integrationsbereiches ab dem Zeitpunkt $t = 1.6$ den hinteren Rand der plastischen Zone hinter der ursprünglichen Rissspitze des stationären Risses. Wächst der Riss nun um ein Element weiter, beinhaltet der aktuelle Integrationsbereich nicht mehr alle Configurational Forces hinter der Rissspitze. Da diese Configurational Forces der risstreibenden Kraft entgegenwirken, fällt die abschirmende Wirkung des plastifizierten Bereiches hinter der Rissspitze weg und $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ beginnt zu steigen. Im plastisch Verformten Bereich vor der Rissspitze zeigen die Configurational Forces in Richtung der risstreibenden Kraft. Sie führen als zu einem Anti-shielding Effekt. Beinhaltet die Integrationskontur alle Configurational Forces, heben sie sich die Wirkungen gegenseitig auf.

Bei $t = 2.3$ fällt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ sehr stark ab. Ab einer Risslänge von $\Delta a = 2.1$ mm ($t = 2.4$) ist der Blunting-Bereich (Bereich der Rissabstumpfung), indem große Configurational Forces auftreten, in der Kontur Γ_{14} nicht mehr enthalten. Dadurch sinkt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ auf 12.6 kJ/m². Wächst der Riss um ein Element weiter, wird auch die ursprüngliche Rissspitze des stationären Risses nicht mehr von Γ_{14} eingeschlossen, wodurch $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ noch weiter abfällt und den kleinsten Wert annimmt. Bei weiterem Risswachstum nimmt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ wieder etwas zu und erreicht nach einigen Rissverlängerungsschritten einen konstanten Wert von 8.65 kJ/m². Dieser Wert liegt deutlich unter dem $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Wert und ist abhängig vom eingeschlossenen plastischen Bereich. Umso mehr von der plastischen Zone innerhalb der Kontur enthalten liegt, desto größer ist dieser Wert. Dies kann man in Abbildung 7.17(b) gut erkennen, wo $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ mit zunehmender Konturgröße einen immer größeren Wert annimmt. Der maximale Wert ist erreicht, wenn die gesamte aktuelle plastische Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Der $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ -Wert liegt jedoch auch dann unter dem $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Wert, wenn die gesamte aktuelle plastische Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Dies kann man z.B. in Abbildung 7.16(b) sehen. Bei einer Belastung von $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm wird die gesamte aktuelle plastische Zone ab der Kontur Γ_7 vollständig eingeschlossen. Man sieht, dass $J_{\Gamma_7}^{\text{ep}}$ und auch $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ unter dem $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ -Wert liegen. Schließt die Kontur den gesamten Bereich der ursprünglichen plastischen Zone und den Bereich der aktuellen plastischen Zone ein, ist $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ gleich groß wie $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$, z.B. Kontur Γ_{14} bis $t = 2.2$ für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm (Abbildung 7.16(b)). Der Unterschied zwischen $J_{\Gamma_{14}}^{\text{ep}}$ und $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ nach $\Delta a = 2.1$ mm entsteht durch die Configurational Forces in der ursprünglichen plastischen Zone die im Belastungsschritt entsteht und

die Dehnungen größer als in der aktuellen plastischen Zone sind. Das Material hat sich durch die Belastung stark verfestigt. Wird die Probe durch die Rissverlängerung entlastet entstehen in diesem Bereich Eigenspannungen, die zum Auftreten von Configurational Forces führen.

Die Zunahme von $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}}$ ab einer Risslänge von $\Delta a = 2.1$ mm in Abbildung 7.13(b) kann dadurch erklärt werden, dass der Riss von einem harten in ein weiches Material gewachsen ist [54, 55].

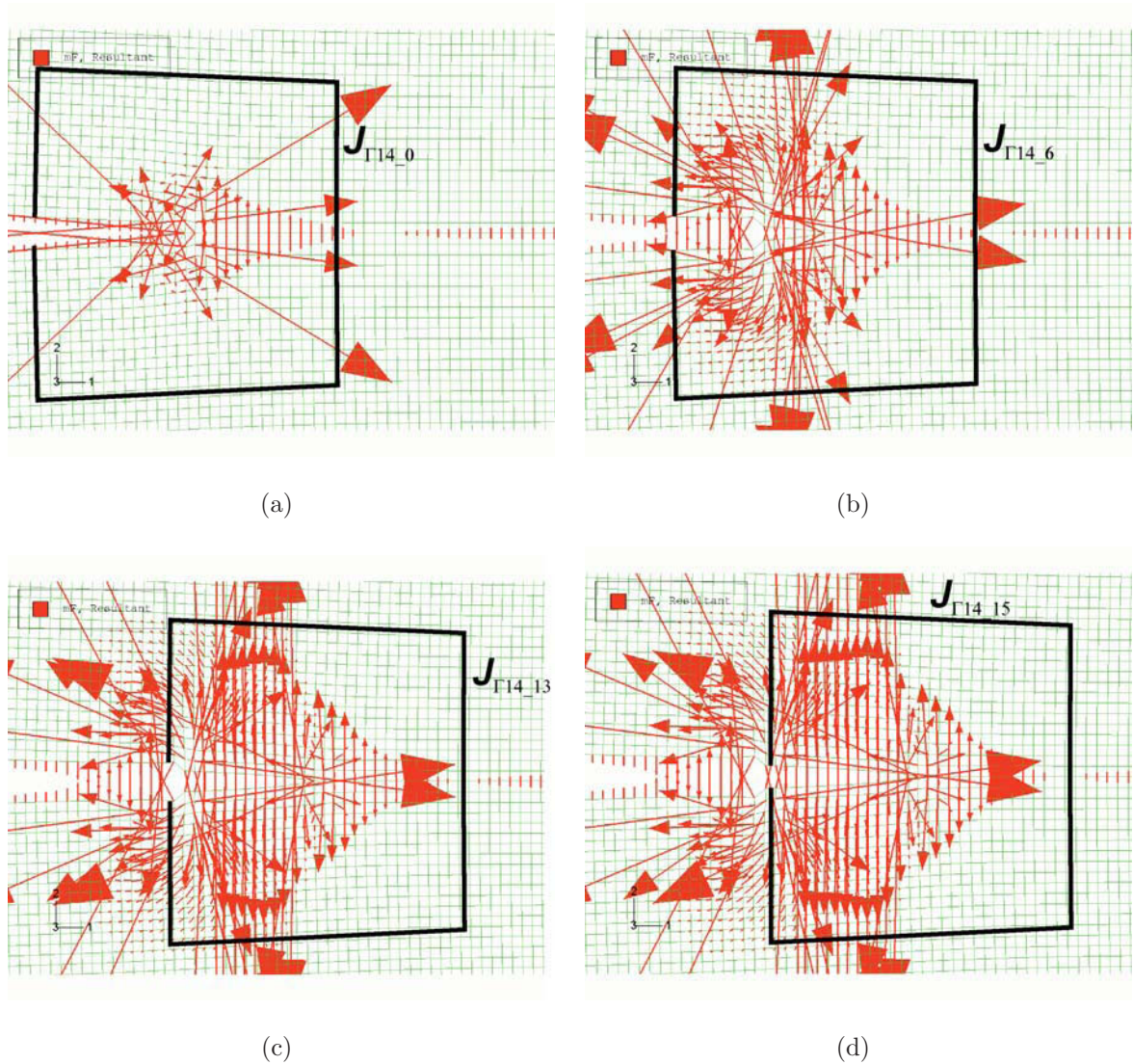


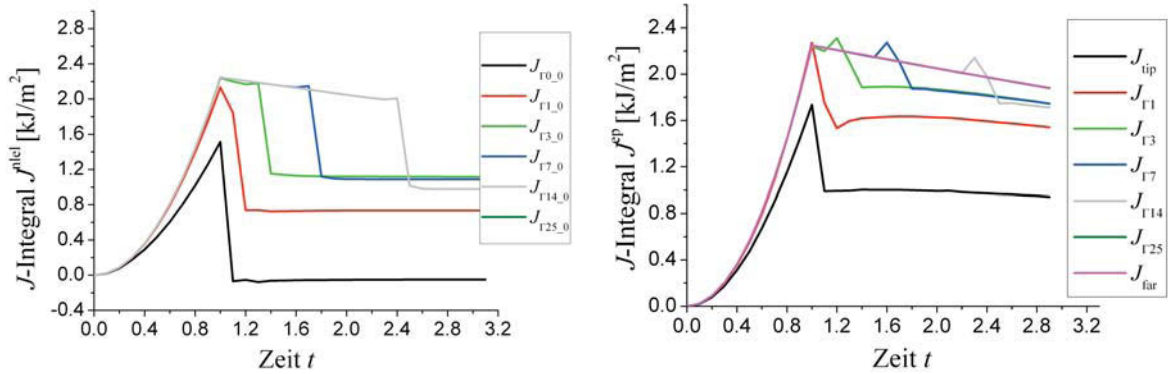
Abbildung 7.15: nichtlinear-elastische Configurational Forces in der Umgebung der Risspitze und der Pfad $\Gamma 14$ für eine Rissverlängerung von a) $\Delta a = 0$, b) $\Delta a = 0.9$ mm, c) $\Delta a = 1.95$ mm und d) $\Delta a = 2.1$ mm; für $m = 0.15$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und den EDZ.

Betrachtet man den Verlauf des nichtlinear-elastischen J -Integrals für die Kontur $\Gamma 14$ und bei einer Belastung von $v_{LL} = 0.25$ mm (Abbildung 7.13(a)) sieht man, dass $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ im

Belastungsschritt ebenfalls quadratisch mit der Belastung zunimmt und bei $t = 1.0$ ca. gleich groß ist wie $J_{\text{far}}^{\text{nel}}$.

Zum besseren Verständnis von $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ ist die Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces für unterschiedliche Risslängen in Abbildung 7.15 dargestellt. Im Risswachstumsschritt sinkt $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ ähnlich wie $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}}$ linear mit zunehmender Risslänge (siehe Abbildung 7.13(a)) bis $t = 1.6$ auf $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}} = 12.4 \text{ kJ/m}^2$. Diese Abnahme ist ebenfalls durch die Abnahme der Spannungen in der Umgebung der Rissspitze zu erklären. Ab $t = 1.6$ nimmt $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ jedoch stark ab und erreicht bei $t = 2.3$ den Wert, $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}} = 7.38 \text{ kJ/m}^2$. Die starke Abnahme kann wieder durch die Nichtberücksichtigung der Configurational Forces im plastisch verformten Bereich hinter der Rissspitze erklärt werden. Anders als im elastisch-plastischen Fall zeigen die nichtlinear-elastischen Configurational Forces in diesem Bereich in Richtung der risstreibenden Kraft (siehe Abbildung 7.15(a) bis 7.15(d)). Berücksichtigt man diese bei der Summierung nicht, führt dies zu einer starken Abnahme von J .

Bei $t = 2.3$ ist der Blunting-Bereich der ursprünglichen Rissspitze des stationären Risses nicht mehr im Integrationspfad $\Gamma 14$ enthalten und $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ springt auf den Wert 0.156 kJ/m^2 . Ist auch die ursprüngliche Rissspitze nicht mehr in $\Gamma 14$ enthalten (bei $t = 2.4$), wird $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ sogar negativ. Wächst der Riss weiter, beginnt $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ wieder zu steigen und erreicht nach einigen Rissverlängerungsschritten einen konstanten Wert. Dieser Wert ist annähernd gleich groß wie $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ beim Risswachstum und ist ebenso wie $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ von der gewählten Elementgröße in der Umgebung der Rissspitze abhängig. Weiters ist dieser Wert unabhängig vom



(a)

(b)

Abbildung 7.16: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.1 \text{ mm}$, $m = 0.15 \text{ mm}$ und EDZ.

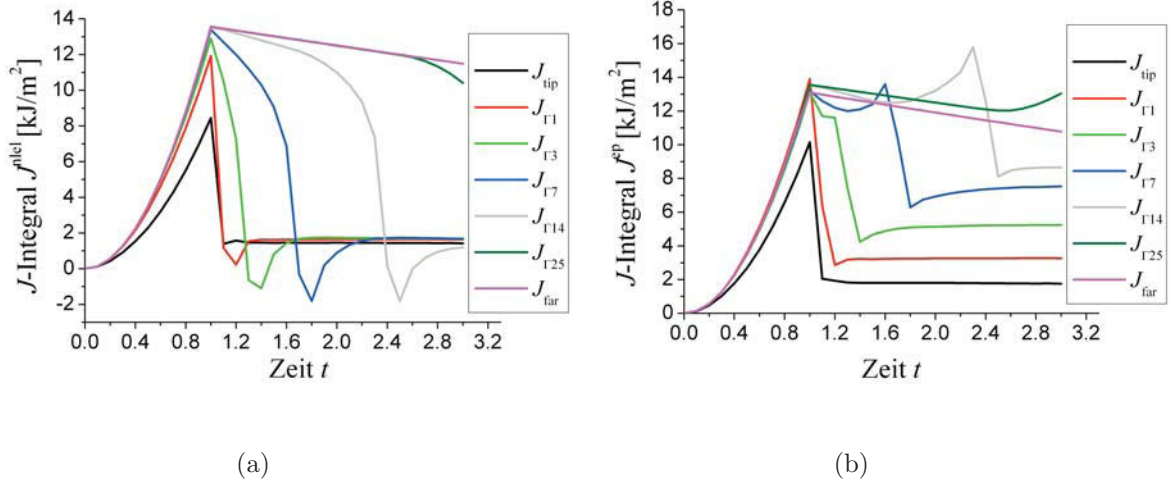


Abbildung 7.17: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Risspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

Integrationsbereich. In Abbildung 7.17(a) sieht man, dass die J -Integrale für die Konturen Γ_1 bis Γ_{25} nach einer bestimmten Rissverlängerung ungefähr gleich groß sind wie J_{tip}^{nlel} . Wie schon erklärt, treten alle nichtlinear-elastischer Bulk Configurational Forces nur als Artefakt auf. Damit sind auch die nichtlinear-elastischen J -Integrale Artefakte und haben keine physikalische Bedeutung. Nur wenn alle Configurational Forces innerhalb des Integrationspfades liegen, heben sie sich gegenseitig auf, und man erhält auch für J^{nlel}

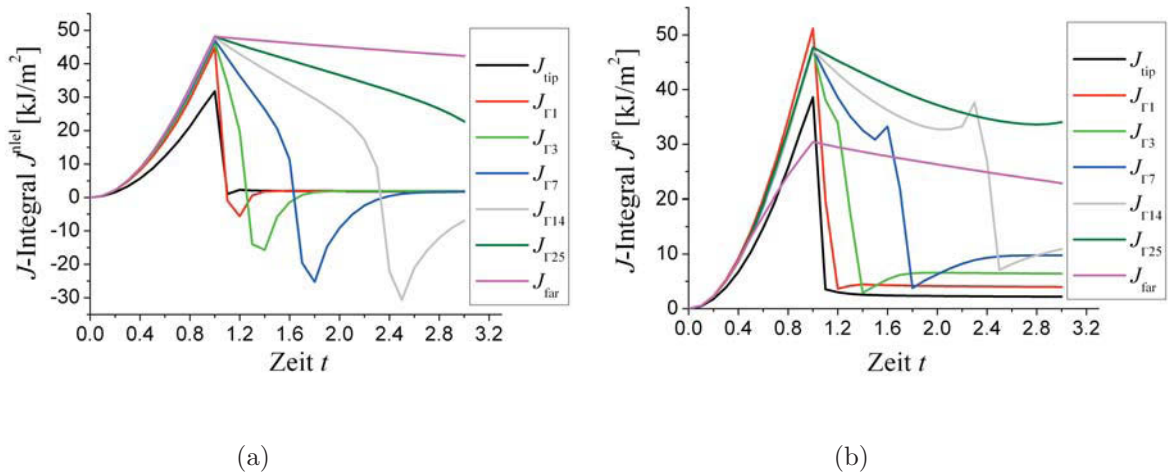


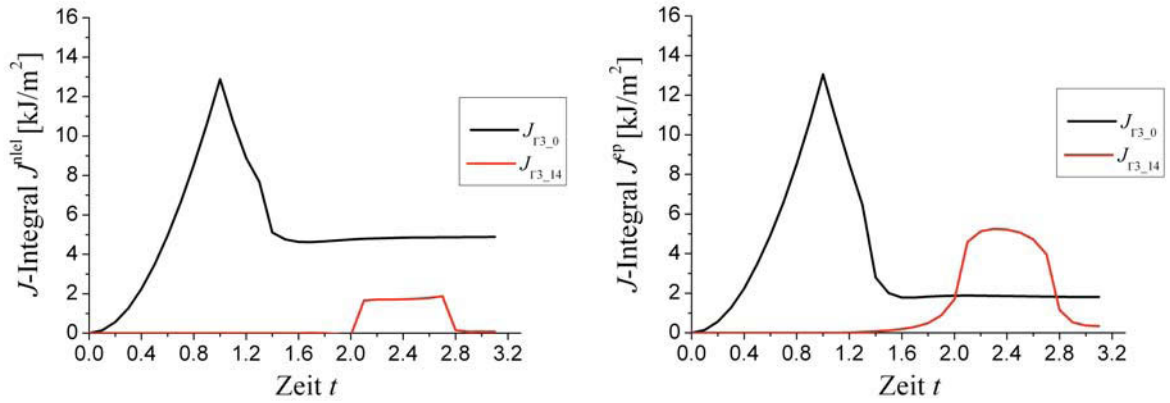
Abbildung 7.18: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Risspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

richtige Werte und $J_{\Gamma_i}^{\text{nel}} = J_{\text{far}}^{\text{nel}}$.

Bewegt sich der Integrationsbereich nicht mit der Rissspitze mit und bleibt somit ortsfest, findet man die J -Kurven in den Abbildungen 7.19. Dargestellt sind die Entwicklung der J -Integrale für eine Lastlinienverschiebung von $v_{\text{LL}} = 0.25$. Dabei werden die J -Werte für verschiedene ortsfeste Integrationsbereiche ermittelt. Da sich der qualitative Verlauf der Kurven bei höheren Belastungen nicht ändert (es ändert sich nur die Größe der J -Werte) genügt es, den Kurvenverlauf anhand nur einer Belastung zu beschreiben. Abbildung 7.19(b) zeigt den Verlauf des elastisch-plastischen J -Integrals bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm. Die Kontur Γ_{3_0} bezeichnet dabei die dritte Kontur um die Rissspitze, deren Mittelpunkt die Rissspitze des ursprünglichen stationären Risses ist. Die Kontur Γ_{3_14} ist die dritte Kontur, deren Mittelpunkt 14 Elemente vor der Rissspitze des stationären Risses liegt. Das bedeutet also, dass die Kontur Γ_{3_14} zunächst in einem rein elastisch verformten Bereich ohne Defekte liegt.

Während der Belastung ist $J_{\Gamma_{3_0}}^{\text{ep}}$ identisch mit $J_{\Gamma_3}^{\text{ep}}$ des stationären Risses. Sobald jedoch ein Rissfortschritt eintritt, beginnt $J_{\Gamma_{3_0}}^{\text{ep}}$ stark zu sinken. Bei $t = 1.4$ bzw. bei $\Delta a = 0.6$ mm ist die aktuelle Rissspitze durch die Kontur Γ_{3_0} gewandert, und $J_{\Gamma_{3_0}}^{\text{ep}}$ nimmt einen annähernd konstanten Wert von 1.85 kJ/m^2 an, hauptsächlich verursacht durch die Configurational Forces im Blunting-Bereich, wo sich die Rissspitze durch die Belastung abstumpft und die Rissöffnungsverschiebung (COD) verursacht. Der konstante Wert nach einigen Rissverlängerungsschritten hängt von der Höhe der Belastung im Belastungsschritt ab und ist im Fall des elastisch-plastischen J -Integrals ab der Kontur Γ_{3_0} nahezu unabhängig vom Integrationspfad, obwohl Γ_{3_0} nicht die gesamte plastische Zone einschließt. Die Abbildungen 7.20 bis 7.22 zeigen die nichtlinear-elastischen und die elastisch-plastischen J -Integrale für unterschiedliche Konturen um die Ausgangsrisspitze. Dabei sieht man, dass $J_{\Gamma_{i_0}}^{\text{ep}}$ solange gleich $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ ist, solange sich die plastische Zone auf die Umgebung der Rissspitze konzentriert und solange die aktuelle plastische Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird, z.B. $J_{\Gamma_{7_0}}^{\text{ep}}$ in Abbildung 7.20(a)). Wird nur mehr ein Teil der aktuellen plastische Zone eingeschlossen, beginnt $J_{\Gamma_{i_0}}^{\text{ep}}$ kleiner zu werden. Ist die aktuelle Rissspitze durch den Integrationsbereich gewandert, springt $J_{\Gamma_{i_0}}^{\text{ep}}$ auf einen niedrigeren aber konstanten Wert. Nur bei $J_{0_0}^{\text{ep}}$ und $J_{\Gamma_{1_0}}^{\text{ep}}$ weicht dieser Wert etwas ab. Der $J_{0_0}^{\text{ep}}$ -Wert liegt etwas unter dem der übrigen Konturen, und der $J_{\Gamma_{1_0}}^{\text{ep}}$ liegt etwas darüber (siehe Abbildung 7.20(b) bis 7.22(b)).

Die Kontur Γ_{3_14} befindet sich zu Beginn des Risswachstums in einem rein elastisch verformten Bereich, sodass $J_{\Gamma_{3_14}}^{\text{ep}}$ am Anfang den Wert Null besitzt (siehe Abbildung 7.19(b)).



(a)

(b)

Abbildung 7.19: J -Integrale für ortsfeste Konturen und für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

Wächst der Riss um $\Delta a = 0.3$ mm (bei $t = 1.2$), berührt die aktuelle plastische Zone den äußeren Rand der Kontur $\Gamma_{3,14}$, und $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ beginnt leicht zu steigen.

Zwischen $t = 1.2$ und $t = 2.0$ steigt $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ nur durch die plastische Verformung des Materials innerhalb der Kontur $\Gamma_{3,14}$ auf $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}} = 1.69$ kJ/m². Erst ab $t = 2.1$ bzw. einer Rissverlängerung von $\Delta a = 1.65$ mm berührt die aktuelle Rissspitze die Kontur $\Gamma_{3,14}$ und $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ steigt auf 4.59 kJ/m². Bei $t = 2.3$ erreicht $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ den Maximalwert von 5.24 kJ/m² und beginnt anschließend wieder zu sinken, bei $t = 2.4$ liegt die aktuelle Rissspitze in der Mitte der Kontur $\Gamma_{3,14}$. Der Wert von $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ sinkt, da das Spannungsniveau hinter der laufenden Rissspitze wieder absinkt. Bei $t = 2.7$ bzw. bei einer Rissverlängerung von $\Delta a = 2.55$ mm berührt die aktuelle Rissspitze den rechten Rand des Integrationsbereiches und bei $\Delta a = 2.7$ mm ist die gesamte aktuelle plastische Zone durch den Integrationsbereich $\Gamma_{3,14}$ gewandert. Sobald die Kontur $\Gamma_{3,14}$ die aktuelle Rissspitze nicht mehr einschließt, fällt $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ auf 1.15 kJ/m² und nicht auf den Wert Null ab, da die Kontur noch einen Teil der aktuellen plastischen Zone beinhaltet. Wächst der Riss weiter, sinkt $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{ep}}$ auf einen annähernd konstanten Wert von 0.34 kJ/m². Durch die plastische Verformung des Materials treten innerhalb der plastischen Zone Eigenspannungen auf, welche zu kleinen Configurational Forces innerhalb der plastischen Zone hinter der aktuellen Rissspitze führen. Weiters nimmt die Größe der aktuellen plastischen Zone bei der Rissverlängerung ab. Dadurch entsteht ein kleiner Gradient in der plastischen Verformung. Betrachtet man das nichtlinear-elastische J -Integral bei Risswachstum unter Verwendung eines ortsfesten Integrationsbereiches, findet man die J -Kurven in Abbildung 7.19(a). Auch $J_{\Gamma_{3,0}}^{\text{nl}}$ ist

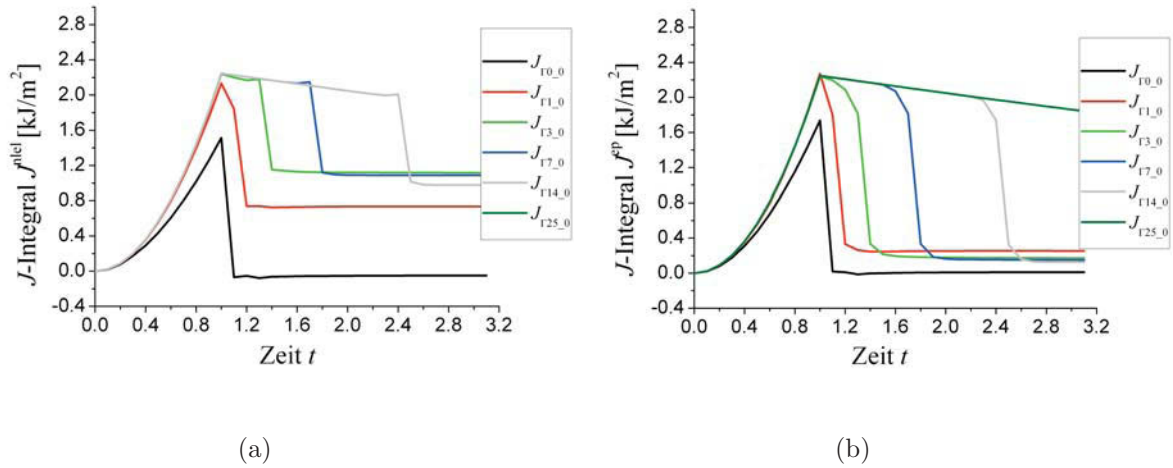


Abbildung 7.20: J -Integrale um die AusgangsRiss Spitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

identisch mit $J_{\Gamma_3}^{nl}$ des stationären Risses. Wächst der Riss, fällt $J_{\Gamma_{3,0}}^{nl}$ stark ab, bis die aktuelle Riss Spitze bei $t = 1.4$ nicht mehr vom Integrationspfad $\Gamma_{3,0}$ eingeschlossen wird (Abbildung 7.19(a)). Bei weiterer Rissverlängerung nimmt auch $J_{\Gamma_{3,0}}^{nl}$ einen konstanten Wert an, der allerdings deutlich über $J_{\Gamma_{3,0}}^{ep}$ liegt. Dieser Wert ist ebenfalls abhängig von der Belastung, aber unterscheidet sich von $J_{\Gamma_{3,0}}^{ep}$ und ist auch vom gewählten Integrationspfad abhängig. In den Abbildungen 7.20(a) bis 7.22(a) sind die $J_{\Gamma_{i,0}}^{nl}$ -Verläufe bei unterschiedlichen Lastlinienverschiebungen dargestellt.

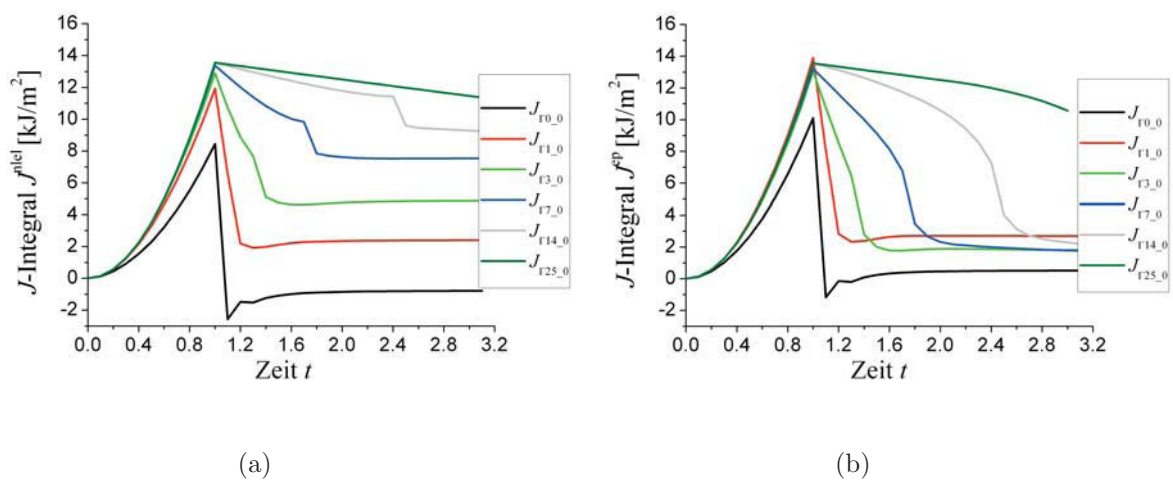


Abbildung 7.21: J -Integrale um die AusgangsRiss Spitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

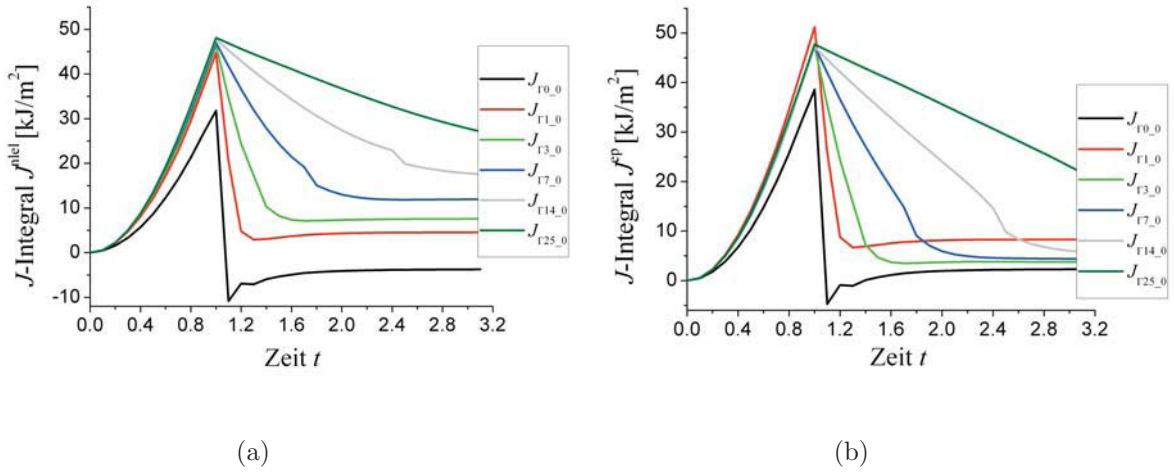


Abbildung 7.22: J -Integrale um die Ausgangsrissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.

Beim nichtlinear-elastischen J -Integral sind die $J_{\Gamma_i,0}^{nlel}$ -Werte auch im Fall des wachsenden Risses solange mit J_{far}^{nlel} identisch, solange der gesamte plastische Bereich um die Rissspitze durch den Integrationspfad eingeschlossen wird, z.B. $J_{\Gamma_{7,0}}^{nlel}$ bis $t = 1.7$ bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.1$ mm in Abbildung 7.20(a) oder $J_{\Gamma_{25,0}}^{nlel}$ bei einer Lastlinienverschiebung von $v_{LL} = 0.25$ mm in Abbildung 7.21(a). Wird nicht die gesamte plastische Zone von Integrationspfad eingeschlossen, sinkt $J_{\Gamma_i,0}^{nlel}$ beim Risswachstum solange, bis die aktuelle Rissspitze aus dem Integrationsbereich gewandert ist. Verlässt die aktuelle Rissspitze den Integrationsbereich, verringert sich $J_{\Gamma_i,0}^{nlel}$ um den Betrag von $J_{tip,0}^{nlel}$ und nimmt anschließend einen konstanten Wert an. Dieser Wert hängt nun davon ab, wie viel von der plastischen Zone des stationären Risses vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Aus den Abbildungen 7.20(a) bis 7.22(a) kann man erkennen, dass $J_{\Gamma_i,0}^{nlel}$, nachdem die aktuelle Rissspitze aus dem Integrationsbereich gelaufen ist, umso größer ist umso mehr von der ursprünglichen plastischen Zone von $\Gamma_{i,0}$ eingeschlossen wird. Betrachtet man $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ aus Abbildung 7.19(a), sieht man, dass $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ solange den Wert Null besitzt, solange die aktuelle Rissspitze nicht von der Kontur $\Gamma_{3,14}$ eingeschlossen wird. Ist der Riss um $\Delta a = 1.65$ mm gewachsen, berührt die aktuelle Rissspitze den Integrationsbereich $\Gamma_{3,14}$, und $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ steigt sprunghaft auf den Wert 1.65 kJ/m^2 an. Beim Durchlaufen der Rissspitze durch den Integrationsbereich $\Gamma_{3,14}$ steigt $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ noch geringfügig auf 1.88 kJ/m^2 an. Sobald die aktuelle Rissspitze nicht mehr von der Kontur $\Gamma_{3,14}$ eingeschlossen wird, springt $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ wieder auf nahezu Null. Die plastische Verformung beim Risswachstum beeinflusst die

Werte von $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{nlel}}$ nicht. Wächst der Riss durch die Kontur $\Gamma_{3,14}$, erhöht sich $J_{\Gamma_{3,14}}^{\text{nlel}}$ nur durch die Configurational Force an der Rissspitze. Diese hängt jedoch von der Elementgröße ab und ist umso kleiner, je feiner das Netz wird.

In Tabelle 7.1 sind die Werte für J^{nlel} und J^{ep} noch einmal für die unterschiedlichen Belastungen und für verschiedene Integrationspfade dargestellt.

Tabelle 7.1: J -Werte vor und nach $\Delta a = 2.7$ mm Risswachstum für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm und EDZ

$v_{\text{LL}} = 0.1$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	1.513	1.736	2.132	2.271	2.246	2.246	2.247	2.247	2.247	2.247
2.7	0.78	0.951	0.92	1.55	0.86	1.76	1.899	1.899	1.899	1.899
$v_{\text{LL}} = 0.25$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	8.45	10.15	11.92	13.9	13.67	13.2	13.56	13.56	13.56	13.1
2.7	1.43	1.76	1.64	3.27	1.71	7.49	11.34	12.37	11.69	11.0
$v_{\text{LL}} = 0.5$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	31.8	38.58	44.72	51.18	47.03	47.35	48.13	47.72	48.21	30.4
2.7	1.77	2.21	1.95	4.0	1.63	9.76	26.53	33.6	42.86	23.5

7.3.1.3 Einfluss der Elementgröße auf die risstreibende Kraft

Um die risstreibende Kraft zu ermitteln und um den Einfluss der numerischen Fehler zu beschreiben, wird, wie in Kapitel 6, die Elementgröße um die Rissspitze (Bereich A) variiert. Dabei werden Elementgrößen zwischen $m = 0.3$ mm und $m = 0.025$ mm verwendet. In Abbildung 7.23 sind das nichtlinear-elastische und das elastisch-plastische J -Integral als Funktion des normierten Abstandes zur Rissspitze aufgetragen. Die Normierung erfolgt wieder durch den δ_t -Wert, der bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm den Wert 0.0312 mm annimmt und 3 Elemente hinter der ursprünglichen Rissspitze des stationären Risses gemessen wurde.

Alle J -Werte wurden nach einer Rissverlängerung von $\Delta a = 2.7$ mm ermittelt.

Man sieht, dass sowohl $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ als auch $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ mit abnehmender Elementgröße kleiner werden und für $m \rightarrow 0$ gegen Null gehen. Dieses Resultat stimmt mit den Ergebnissen von Rice [4, 40] überein und ist als Paradoxon der elastisch-plastischen Bruchmechanik bekannt. Rice postulierte, dass für ein elastisch ideal-plastisches Material oder ein elastisch-plastisches Material mit linearer Verfestigung, die gesamte eingebrachte Energie zur Erzeugung der plastischen Zone verwendet wird und daher keine Energie übrig bleibt, die für das Risswachstum verwendet werden kann, das heißt die risstreibende Kraft wäre gleich Null.

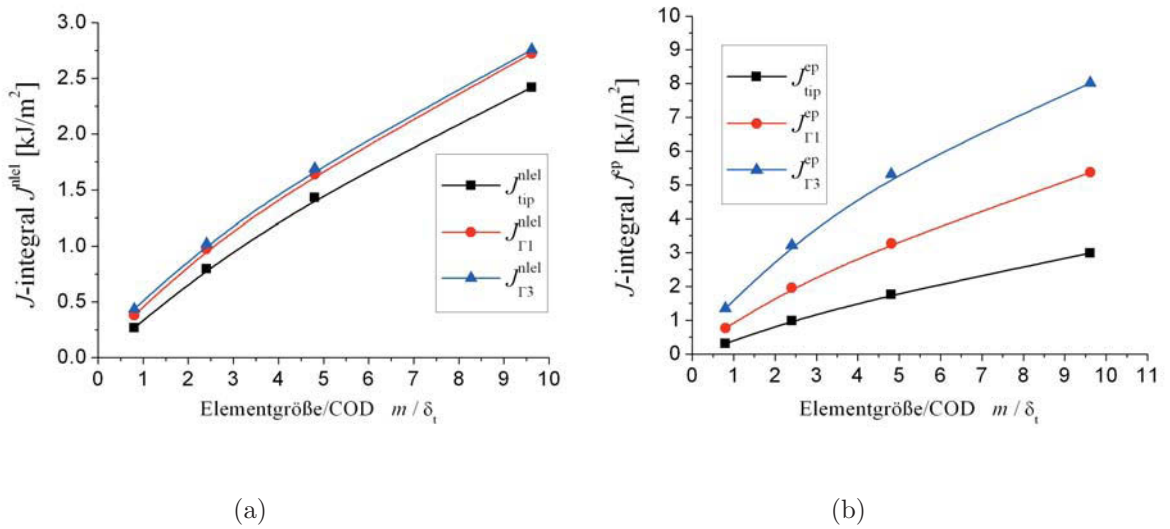


Abbildung 7.23: Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma_i \rightarrow 0$ bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, EDZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie

Betrachtet man Gleichung (4.18), so sieht man, dass J für eine Kontur $\Gamma_i \rightarrow 0$ nur dann einen endlichen Wert annehmen kann, wenn an der Rissspitze eine Singularität der Ordnung r^{-1} auftritt. Bei wachsendem Riss in einem elastisch ideal-plastischen Material ergibt sich an der Rissspitze jedoch nur noch eine schwach logarithmische Singularität [4, 29, 37], und die risstreibende Kraft verschwindet für $\Gamma_i \rightarrow 0$ (siehe auch Gleichung (4.39) [17]). Ob die risstreibende Kraft auch in einem elastisch-plastischen Material gegen Null geht, ist nicht geklärt [40, 66]. Alle J^{ep} -Kurven in den Abbildungen 7.16 bis 7.18 zeigen, dass die plastische Zone einen Shielding Effekt auf die Rissspitze ausübt ($J_{\text{tip}}^{\text{ep}} < J_{\Gamma_1}^{\text{ep}} < J_{\Gamma_3}^{\text{ep}}$). Die Frage ist, ob dieser Shielding Effekt so groß ist, dass $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ (die risstreibende Kraft) den Wert Null annimmt, wie Rice vermutet hat, oder ob $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ einen endlichen Wert aufweist.

In Abbildung 7.23 sind zusätzlich zu den J_{tip} -Kurven auch noch die Kurven für die erste und dritte Kontur um die Rissspitze dargestellt. Auch für diese Konturen wird das J -Integral mit abnehmender Elementgröße immer kleiner. Man sieht in Abbildung 7.23(a), dass $J_{\Gamma_1}^{\text{nel}}$ und $J_{\Gamma_3}^{\text{nel}}$ zusammen fallen und $J_{\Gamma_i}^{\text{nel}}$ daher unabhängig vom gewählten Integrationspfad ist. $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ ist dagegen stark wegabhängig und wird umso größer, je mehr von der plastischen Zone eingeschlossen wird.

In Abbildung 7.24(b) sind die J^{ep} -Werte für die drei Integrationsbereiche A1, A2 und A3 als Funktion des normierten Abstandes zur Rissspitze dargestellt. Der Bereich A1 ist dabei 0.6×0.6 mm groß, $A2 = 1.2 \times 1.2$ mm und $A3 = 3.5 \times 3.5$ mm. Betrachtet man die J^{ep} -Werte, sieht man, dass $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ gegen den Wert Null strebt, die Werte von $J_{\Gamma A1}^{\text{ep}}$, $J_{\Gamma A2}^{\text{ep}}$ und $J_{\Gamma A3}^{\text{ep}}$ mit sinkender Elementgröße abnehmen, aber gegen einen endlichen Wert konvergieren. Dieser Wert ist umso größer, je mehr von der plastischen Zone im Integrationsbereich eingeschlossen wird. Die Abnahme von $J_{\Gamma A1}^{\text{ep}}$, $J_{\Gamma A2}^{\text{ep}}$ und $J_{\Gamma A3}^{\text{ep}}$ hängt mit der Abnahme von $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ zusammen. Der Integrationsbereich $\Gamma A3$ schließt bei einer Lastlinienverschiebung von

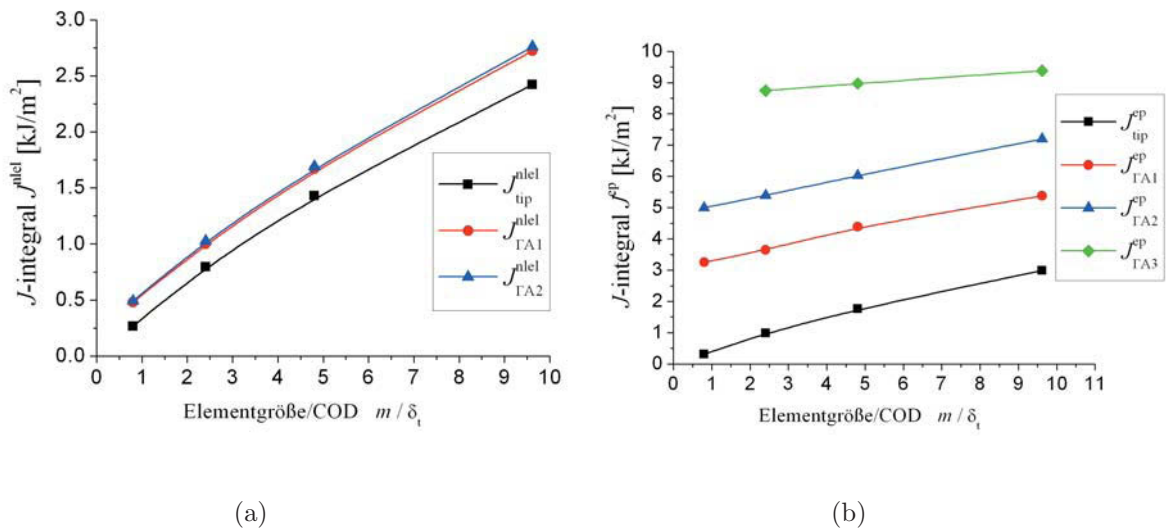


Abbildung 7.24: Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma_i = \text{konst.}$ bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, EDZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie

$v_{\text{LL}} = 0.25$ mm die gesamte aktuelle plastische Zone ein. Für $m \rightarrow 0$ geht $J_{\Gamma A3}^{\text{ep}}$ gegen 8.6 kJ/m^2 . Summiert man alle Configurational Forces in der aktuellen plastischen Zone, erhält man den Plasticity Influence Term C_p der wachsenden plastischen Zone. In Abbildung 7.25 ist C_p als Funktion der des normierten Abstandes zur Rissspitze dargestellt. Anders als $J_{\Gamma A3}^{\text{ep}}$ steigt C_p mit sinkender Elementgröße und konvergiert für $m \rightarrow 0$ gegen

$C_p = 8.5 \text{ kJ/m}^2$. Berechnet man den Risswiderstand über [5, 6, 67],

$$R = \frac{1}{B} \frac{d(W_{pl} + \Gamma_s)}{da}, \quad (7.4)$$

sieht man in Abbildung 7.25, dass der Risswiderstand ungefähr gleich groß ist wie C_p und mit sinkender Elementgröße zunimmt. Dabei bezeichnet W_{pl} die irreversible Verformungsarbeit und Γ_s die Oberflächenenergie. Da Γ_s in elastisch-plastischen Materialien sehr viel kleiner ist als W_{pl} wird die Oberflächenenergie bei der Berechnung von R vernachlässigt. Für $m \rightarrow 0$ geht R gegen 8.3 kJ/m^2 . Aus Abbildung 7.25 ist auch zu erkennen, dass der Risswiderstand für alle Elementgrößen ungefähr gleich groß ist wie der Plasticity Influence Term der wachsenden plastischen Zone.

Für $m \rightarrow 0$ geht $J_{\Gamma A3}^{ep} \rightarrow C_p$ und ist somit ebenfalls gleich groß wie der Risswiderstand. Das legt nahe, dass sich der Risswiderstand nur aus der plastischen Verformung ergibt, und die treibende Kraft auf die Rissspitze Null ist. Betrachtet man J^{lel} in Abbildung 7.24, sieht man, dass J^{lel} auch dann gegen den Wert Null strebt, wenn die von Integrationspfad eingeschlossenen Fläche konstant bleibt, und nur die Elementgröße an der

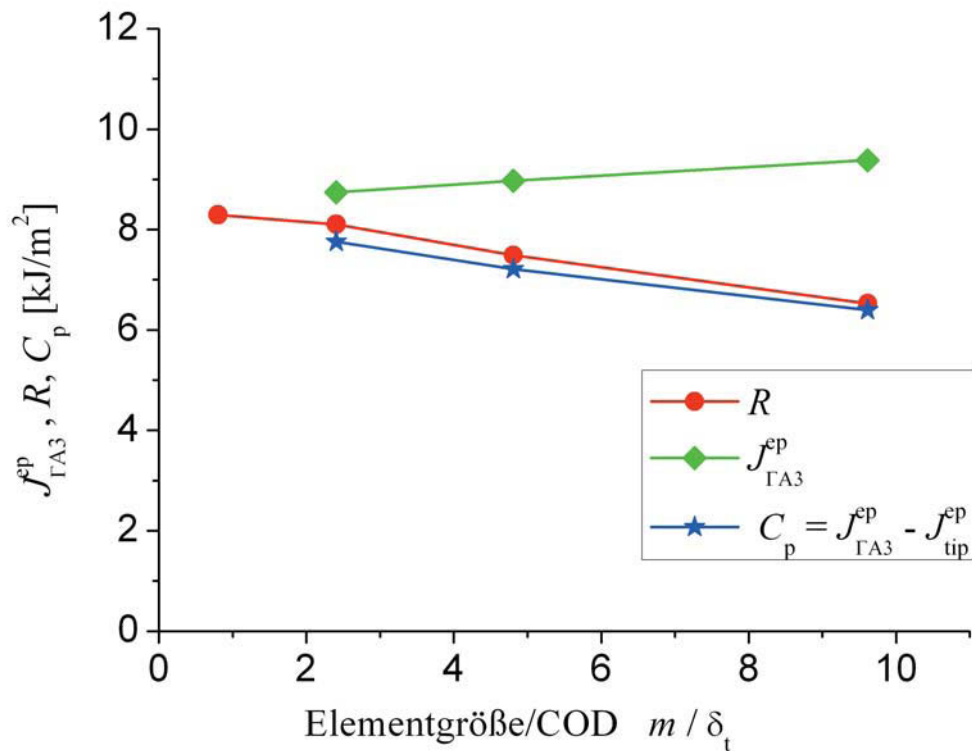


Abbildung 7.25: Netzabhängigkeit des J -Integrals und des Risswiderstands; für $v_{LL} = 0.25 \text{ mm}$, EDZ und $\Delta a = 2.7 \text{ mm}$

Risspitze gegen Null strebt. Nicht nur $J_{\text{tip}}^{\text{nl}}$, sondern auch $J_{\Gamma A1}^{\text{nl}}$ und $J_{\Gamma A2}^{\text{nl}}$ streben für $m \rightarrow 0$ gegen den Wert Null. Das würde bedeuten, dass für das Wachstum der plastischen Zone ebenfalls keine Energie benötigt wird, was jedoch falsch ist.

Das nichtlinear-elastische J -Integral beschreibt nur die Energie, welche notwendig ist, um den Riss zu verlängern, nicht aber die Energie, die benötigt wird, um die plastische Zone ebenfalls wachsen zu lassen. Das nichtlinear-elastische J -Integral ist daher für die Beschreibung der benötigten Energie beim Risswachstum nicht geeignet. Verschiedene Autoren [15, 68] haben versucht, eine Prozesszone mit endlicher Größe zu verwenden, um einen endlichen J -Wert an der bewegten Risspitze zu erhalten. Allerdings hängt der J -Wert von der willkürlich festgelegten Prozesszone ab und strebt für eine kleiner werdende Prozesszone ebenfalls gegen Null [29].

7.3.2 Ebener Spannungszustand

Im ESZ sind die Ergebnisse sehr ähnlich wie im EDZ. Deshalb werden die Ergebnisse in diesem Kapitel nur kurz dargestellt und nicht mehr sehr ausführlich beschrieben.

7.3.2.1 Einfluss der Belastung (Größe der plastischen Zone)

In den Abbildungen 7.26(a) bis 7.26(c) sind J_{tip} und J_{far} als Funktion der Prozesszeit dargestellt. Auch im ESZ steigt J_{tip} mit der Belastung an und sinkt nach dem ersten Rissverlängerungsschritt auf einen kleinen, konstanten Wert. Dabei ist $J_{\text{tip}}^{\text{nl}}$ für alle Belastungen kleiner als $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$. Auch bei J_{far} ändert sich nichts im Vergleich zum EDZ. Mit zunehmender Risslänge sinkt J_{far} linear ab.

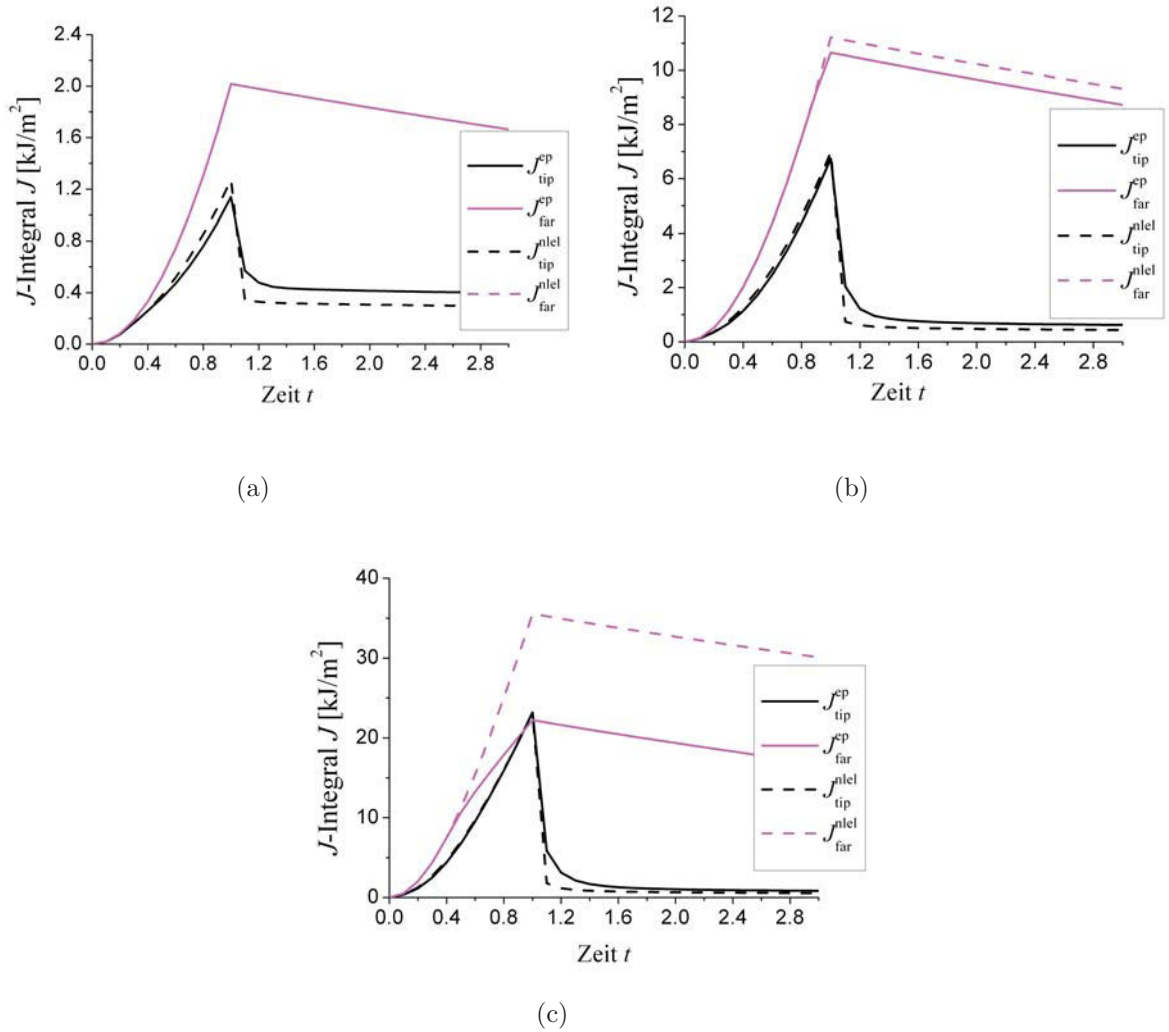


Abbildung 7.26: J_{tip} und J_{far} für a) $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, b) $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und c) $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm; $m = 0.15$ mm und ESZ

7.3.2.2 Einfluss des Integrationspfades

In den Abbildungen 7.27(a) bis 7.29(a) sieht man die $J_{\Gamma_i}^{\text{nlel}}$ -Kurven für die drei Belastungen. Beim nichtlinear-elastischen J -Integral ändert sich im ESZ qualitativ nichts im Vergleich zum EDZ. Der einzige Unterschied besteht darin, dass alle Werte im ESZ etwas niedriger sind als im EDZ. Betrachtet man wieder nur die Kontur Γ_{14} bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, sieht man in Abbildung 7.28(a), dass $J_{\Gamma_{14}}^{\text{nlel}}$ solange gleich $J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$ ist, solange die Kontur den Blunting-Bereich mit einschließt. Sobald dieser Bereich nicht mehr eingeschlossen ist (bei $t = 2.4$), fällt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{nlel}}$ ab. Befindet sich auch die ursprüngliche Risspitze des stationären Risses nicht mehr im Integrationsbereich, wird $J_{\Gamma_{14}}^{\text{nlel}}$ sogar negativ. Mit weiterem Risswachstum steigt $J_{\Gamma_{14}}^{\text{nlel}}$ wieder an und nimmt einen konstanten Wert an, der wiederum abhängig ist von

der Elementgröße an der Rissspitze. Die negativen Werte von $J_{\Gamma 14}^{\text{nel}}$ sind natürlich nicht realistisch und treten nur deshalb auf, weil die Spannungen und Dehnungen mittels der inkrementellen Plastizitätstheorie, die J -Werte jedoch mittels der Deformationstheorie der Plastizität berechnet wurden.

$J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ ist bereits im Belastungsschritt stark wegabhängig (Abbildungen 7.27(b) bis 7.29(b)). Wie bereits in Kapitel 6.4.2.2 erklärt, hängt $J_{\Gamma_i}^{\text{ep}}$ sehr stark vom gewählten Integrationspfad ab, sobald dieser die plastische Zone durchquert. Betrachtet man wieder J^{ep} für den Pfad $\Gamma 14$ bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, sieht man, dass $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}}$ mit zunehmender Risslänge einen konstanten Wert von $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}} = 6.74$ kJ/m² besitzt. Erst wenn der Integrationspfad den Blunting-Bereich erreicht, fällt $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}}$ ab, steigt aber wieder auf 6.1 kJ/m², nachdem sich die ursprüngliche Rissspitze nicht mehr innerhalb von $\Gamma 14$ befindet. Mit weiterem Risswachstum sinkt $J_{\Gamma 14}^{\text{ep}}$ leicht und nimmt danach einen konstanten Wert an. Auch im ESZ hängt dieser Wert davon ab, wie viel von der plastischen Zone eingeschlossen wird. In Tabelle 7.2 sind wieder einige J -Werte für $\Delta a = 0$ und $\Delta a = 2.7$ mm bei $v_{\text{LL}} = 0.1, 0.25$ und 0.5 mm zusammengefasst.

In der Abbildung 7.30 sind die Verläufe der J -Integrale für die ortsfesten Integrationspfade $\Gamma 3.0$ und $\Gamma 3.14$ skizziert. Das nichtlinear-elastische J -Integral verhält sich wieder ähnlich wie im ebenen Dehnungszustand. $J_{\Gamma 3.0}^{\text{nel}}$ ist im Belastungsschritt annähernd gleich $J_{\text{far}}^{\text{nel}}$ und sinkt während des Risswachstums auf einen konstanten Wert, $J_{\Gamma 3.0}^{\text{nel}} = 8.24$ kJ/m² (Abbildung 7.30(a)). Wie man aus Abbildung 7.31(a) sehen kann, ist dieser Wert vom

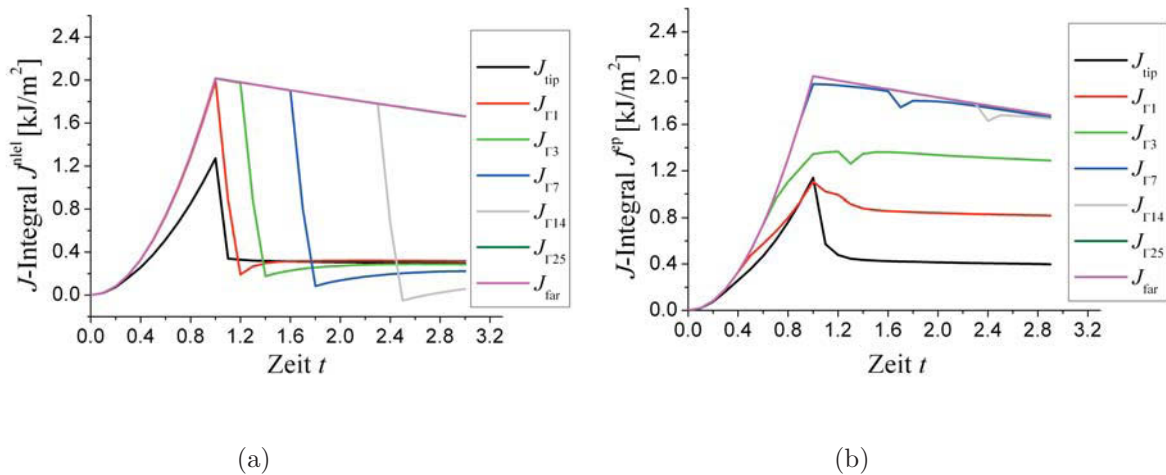


Abbildung 7.27: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm; $m = 0.15$ mm und ESZ.

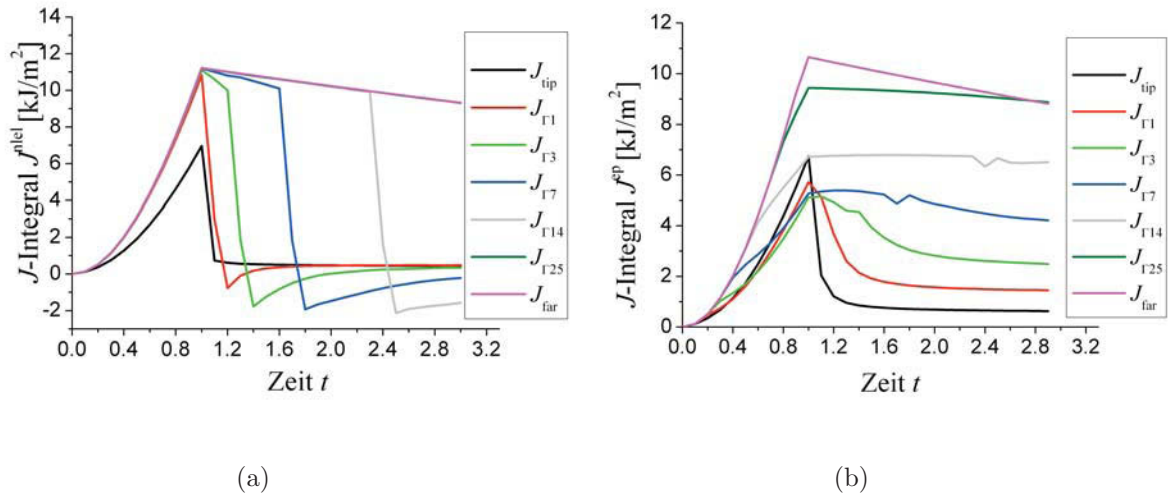


Abbildung 7.28: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Risspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.

gewählten Integrationspfad abhängig und umso größer, je mehr von der plastischen Zone eingeschlossen wird. $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ in Abbildung 7.30(a) besitzt den Wert Null, solange die aktuelle Risspitze vom Integrationspfade nicht eingeschlossen wird. Bei $t = 2.1$ wird die aktuelle Risspitze von $\Gamma_{3,14}$ eingeschlossen, und $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ steigt auf 0.435 kJ/m². Beim weiteren Risswachstum sinkt $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ kontinuierlich bis $t = 2.7$. Bei $t = 2.8$ hat der Riss die Kontur $\Gamma_{3,14}$ durchquert, und $J_{\Gamma_{3,14}}^{nlel}$ fällt auf einen konstanten negativen Wert von

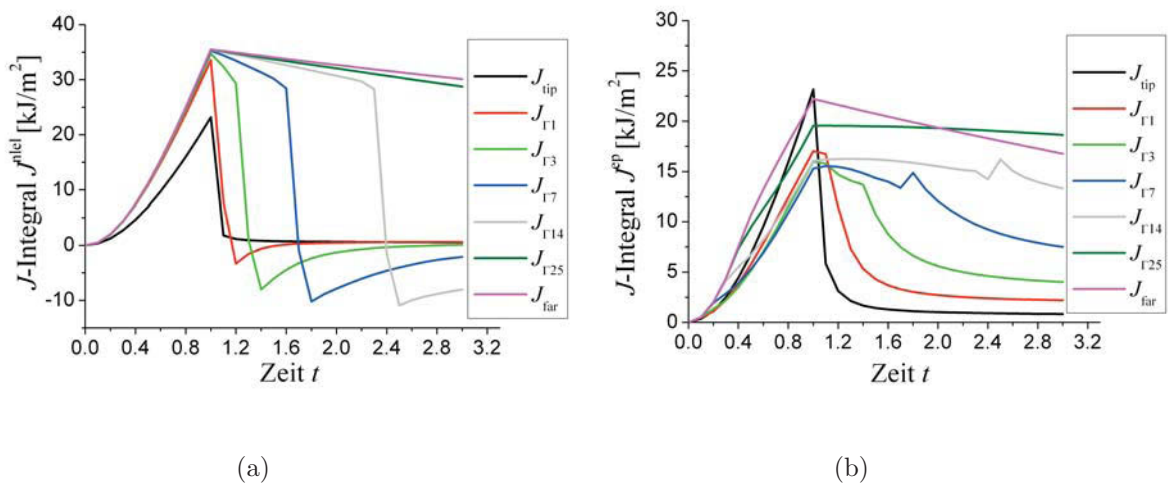


Abbildung 7.29: Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Risspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.

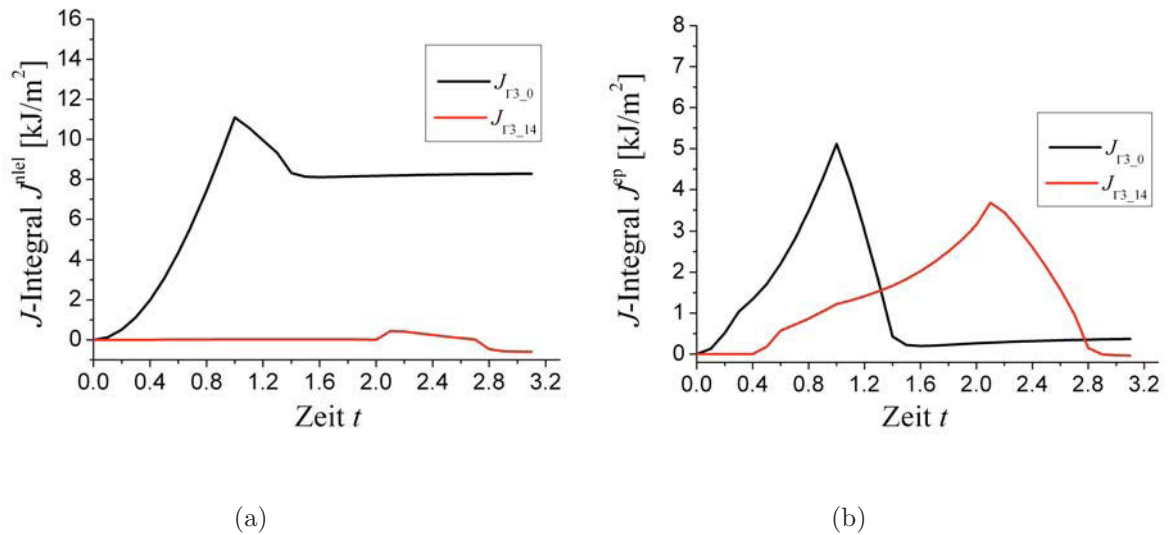


Abbildung 7.30: J -Integrale für ortsfeste Konturen und für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.

-0.465 kJ/m².

Auch das elastisch-plastische J -Integral verhält sich im ESZ während des Risswachstums ähnlich wie im EDZ. Der Wert $J_{\Gamma3,0}^{\text{ep}}$ sinkt ebenfalls, sobald die aktuelle Rissspitze und die aktuelle plastische Zone nicht mehr von $\Gamma3,0$ eingeschlossen werden (bei $t = 1.6$). Anschließend nimmt $J_{\Gamma3,0}^{\text{ep}}$ einen annähernd konstanten Wert von 0.22 kJ/m² an. Dieser Wert ist kleiner als der Wert von $J_{\Gamma3,0}^{\text{ep}}$ im EDZ und ist ebenfalls unabhängig vom gewählten

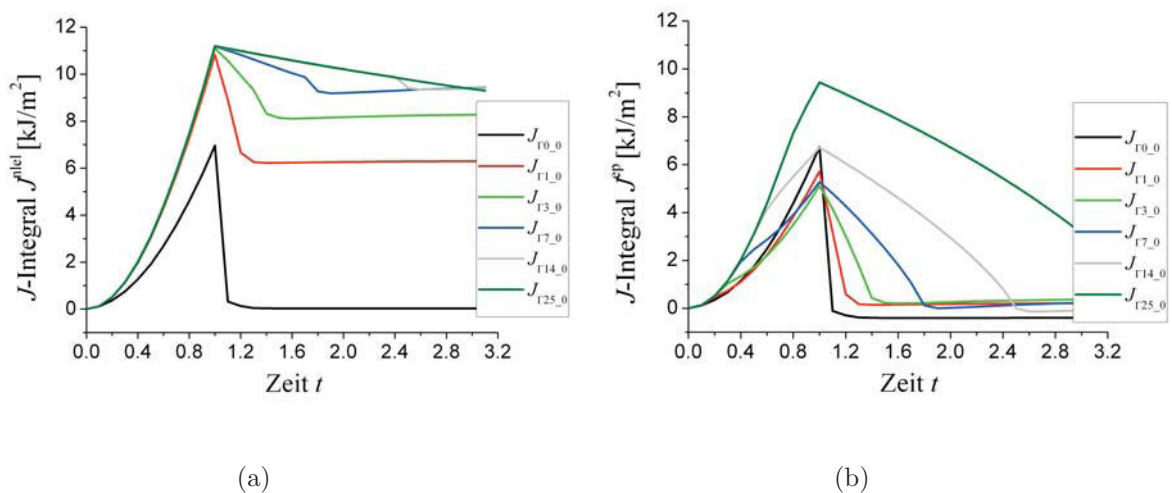


Abbildung 7.31: J -Integrale um die AusgangsRissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.

Integrationspfad (siehe Abbildung 7.31(b)).

In Abbildung 7.31 sind die J -Werte für unterschiedliche Konturen um die Ausgangsrissspitze dargestellt. Sowohl $J_{\Gamma_{i,0}}^{\text{nlel}}$ als auch $J_{\Gamma_{i,0}}^{\text{ep}}$ verhalten sich im ESZ unter Risswachstum ähnlich wie im EDZ.

In Tabelle 7.2 sind noch einmal verschiedene Werte der J -Integrale für unterschiedliche Risslängen und unterschiedliche Belastungen zusammengefasst.

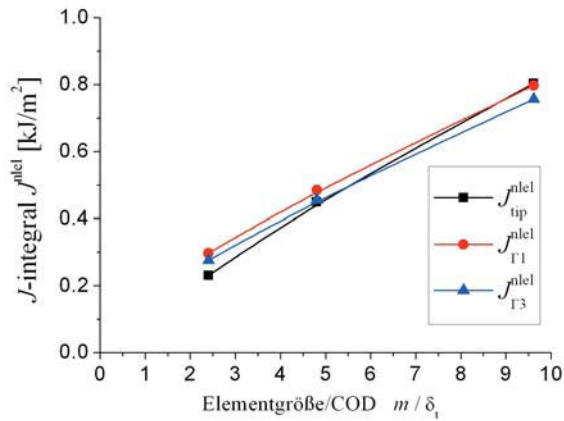
Tabelle 7.2: J -Werte vor und nach $\Delta a = 2.7$ mm Risswachstum für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm und ESZ

$v_{\text{LL}} = 0.1$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	1.27	1.14	1.99	1.11	2.02	1.95	2.02	2.02	2.02	2.02
2.7	0.296	0.4	0.32	0.82	0.22	1.66	1.696	1.696	1.697	1.697
$v_{\text{LL}} = 0.25$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	6.96	6.74	10.83	5.72	11.17	5.27	11.2	9.66	11.22	10.65
2.7	0.44	0.63	0.48	1.46	-0.337	4.25	9.49	9.12	9.49	8.90
$v_{\text{LL}} = 0.5$ mm										
Δa	$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$	J_1^{nlel}	J_1^{ep}	J_7^{nlel}	J_7^{ep}	J_{25}^{nlel}	J_{25}^{ep}	$J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$	$J_{\text{far}}^{\text{ep}}$
mm	kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²		kJ/m ²	
0	23.19	23.17	33.56	17.03	35.27	15.30	35.48	19.97	35.53	22.21
2.7	0.55	0.86	0.61	2.25	-2.65	7.6	29.4	18.79	30.6	17.27

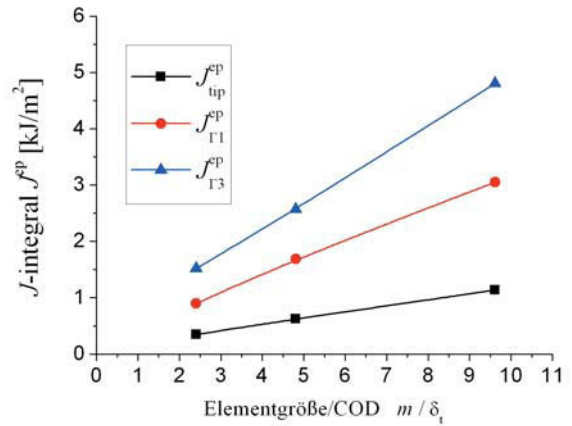
7.3.2.3 Einfluss der Elementgröße auf die risstreibende Kraft

Auch im ESZ wurde die risstreibende Kraft für unterschiedliche Elementgrößen im Bereich der Rissspitze berechnet. Wieder zeigen sowohl das nichtlinear-elastische als auch das elastisch-plastische J -Integral eine sehr starke Abhängigkeit von der Elementgröße. In Abbildung 7.32 sieht man diese Abhängigkeit. Lässt man den Integrationspfad auf die Rissspitze kontrahieren, streben sowohl $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ als auch $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ gegen Null.

Hält man hingegen den Integrationspfad konstant und lässt nur die Elementgröße in der



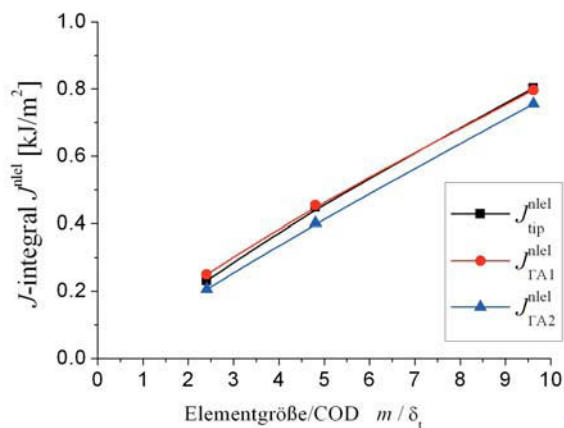
(a)



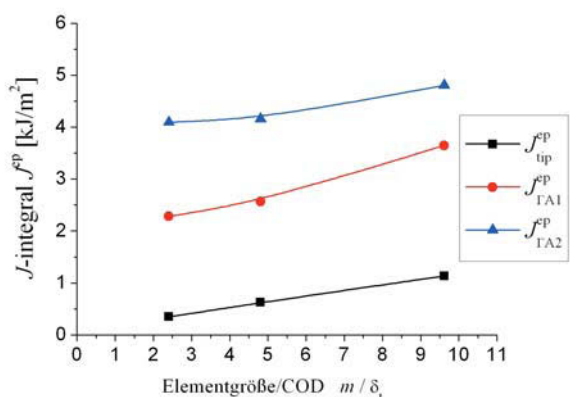
(b)

Abbildung 7.32: Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma_i \rightarrow 0$ für $v_{LL} = 0.25$ mm, ESZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie

Umgebung der Risspitze gegen Null streben, konvergiert nur die $J_{\Gamma A}^{nl}$ -Werte gegen Null. Die $J_{\Gamma A}^{ep}$ -Werte werden mit abnehmender Elementgröße auch kleiner, nehmen jedoch einen endlichen Wert an, der davon abhängig ist, wie viel von der plastischen Zone im Integrationsbereich liegt. Die $J_{\Gamma A}^{ep}$ -Werte erreichen mit zunehmendem Integrationspfad immer höhere Werte. Wird die gesamte aktuelle plastische Zone vom Integrationspfad einge-



(a)



(b)

Abbildung 7.33: Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma_i = \text{konstant}$ für $v_{LL} = 0.25$ mm, ESZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie

geschlossen, steigen die $J_{\Gamma A}^{\text{ep}}$ -Werte nicht mehr an.

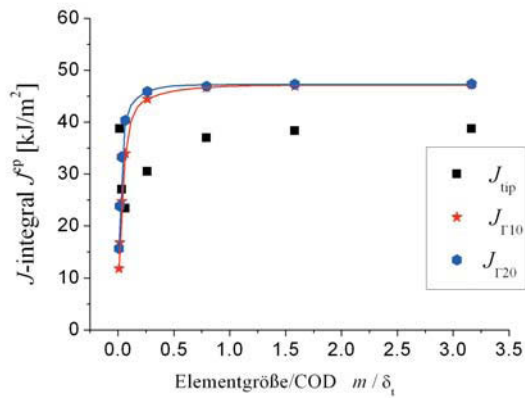
7.4 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse für den wachsenden Riss

Beim Risswachstum treten sowohl elastisch-plastische als auch nichtlinear-elastische Configurational Forces innerhalb der plastischen Zone auf. Die elastisch-plastischen Configurational Forces entstehen durch einen Gradienten in der plastischen Verformung. Das Auftreten von elastisch-plastischen Configurational Forces im entlasteten Bereich hinter der laufenden Risssspitze kann durch das Auftreten von Eigendehnungen im verformten Bereich erklärt werden. In der aktuellen plastischen Zone zeigen alle Configurational Forces in die positive x-Richtung, das zu einem Shielding Effekt führt. Der Plasticity Influence Term ist positiv, und $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ ist kleiner als $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$ [17].

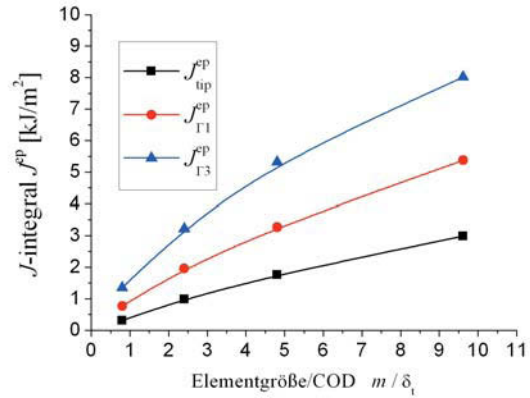
Ermittelt man die Configurational Forces über die Deformationsplastizität, treten in der plastischen Zone überall dort nichtlinear-elastische Configurational Forces auf, wo es zu Entlastungen im Material kommt. Diese nichtlinear-elastischen Bulk Configurational Forces sind Artefakte und haben keine Bedeutung. Summiert man alle auftretenden nichtlinear-elastischen Bulk Configurational Forces, heben sie sich gegenseitig auf. Durch das Auftreten der nichtlinear-elastischen Bulk Configurational Forces wird das nichtlinear-elastische J -Integral stark wegabhängig, sobald der Integrationspfad die plastische Zone durchquert. Beinhaltet der Integrationspfad die gesamte ursprüngliche und aktuelle plastische Zone, ist $J_{\Gamma i}^{\text{nel}}$ wegunabhängig und gleich groß wie $J_{\text{far}}^{\text{nel}}$.

Vergleicht man die Ergebnisse für den stationären Riss (Abbildungen 7.34(a) und 7.35(a)) mit den Ergebnissen des wachsenden Risses (Abbildungen 7.34(b) und 7.35(b)), sieht man, dass es deutliche Unterschiede gibt. Betrachtet man sich J^{ep} für einen stationären Riss, sieht man, dass J^{ep} erst für Integrationspfade sehr nahe an der Risssspitze kleiner zu werden beginnt. Liegen die Integrationspfade innerhalb der Prozesszone $((2 \div 3)\delta_t)$, wird J^{ep} stark wegabhängig und strebt für $\Gamma i < 0.25\delta_t$ gegen den Wert Null. Bei einem wachsenden Riss beginnt der Abfall der J^{ep} -Kurven bereits viel früher. Dies ist durch die schwächere Singularität eines wachsenden Risses zu erklären.

Durch die auftretenden numerischen Fehler ist es jedoch sehr schwierig numerische Ungenauigkeiten von realen physikalischen Effekten zu trennen. Daher kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob die risstreibende Kraft wirklich gegen den Wert Null strebt.



(a)



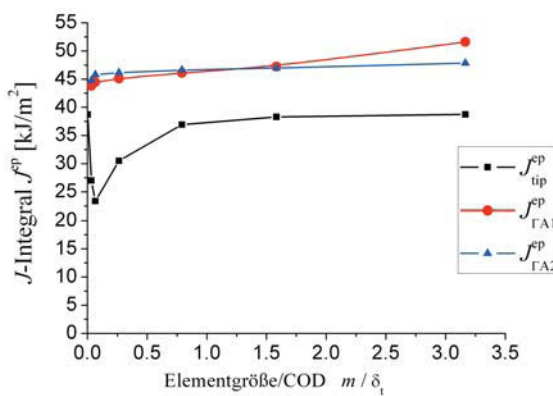
(b)

Abbildung 7.34: J^{ep} als Funktion des Abstandes zur Risspitze für a) einen stationären Riss und b) einen wachsenden Riss.

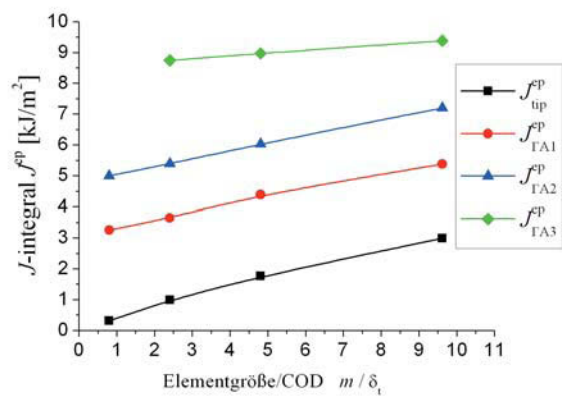
Um den Einfluss der numerischen Fehler zu untersuchen, wurden des elastisch-plastische J -Integral innerhalb eines konstanten Integrationsbereiches berechnet (siehe Abbildung 7.35). Dabei wurde die Elementgröße im Integrationsbereich immer weiter verkleinert.

Beim stationären Riss ist $J_{\Gamma_A}^{\text{ep}}$ nahezu unabhängig davon, wie viel von der plastischen Zone eingeschlossen wird. Mit abnehmender Elementgröße konvergiert $J_{\Gamma_A}^{\text{ep}}$ gegen einen endlichen Wert.

Bei einem wachsenden Riss nimmt $J_{\Gamma_A}^{\text{ep}}$ ebenfalls einen konstanten Wert an (Abbildung



(a)



(b)

Abbildung 7.35: J -Integrale des wachsenden Risses bei konstanten Integrationspfad und abnehmender Elementgröße; a) J^{lel} und b) J^{ep} ; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ und EDZ

7.35(b)), der allerdings davon abhängig ist, wie viel von der aktuellen plastischen Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Schließt der Integrationspfad die gesamte aktuelle plastische Zone ein, entspricht der $J_{\Gamma A}^{ep}$ -Wert für eine Elementgröße $m \rightarrow 0$ genau dem Risswiderstand. Für alle Elementgrößen ist der C_p -Wert eines wachsenden Risses gleich groß wie der Risswiderstand.

Das elastisch-plastische J -Integral beschreibt also genau die Energie, die benötigt wird, um die plastische Zone um ein Risswachstumsinkrement zu verlängern. Die risstreibende Kraft an der Rissspitze wird Null und die gesamte äußere Arbeit wird für die Verlängerung der plastischen Zone benötigt.

Diese Ergebnisse stimmen auch mit bruchmechanischen Experimenten überein, welche nahe legen, dass die risstreibende Kraft in duktilen Materialien gegen Null geht. In Abbildung 7.36 ist der Mechanismus des mikro duktilen Risswachstums schematisch skizziert. Die Verlängerung eines Risses erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt kommt es bei einem stationären Riss zu einem Abstumpfen der Rissspitze und zu Porenbildung vor der Rissspitze. Die Poren wachsen mit zunehmender Belastung, bis sie so groß sind, dass im zweiten Schritt das Ligament zwischen den Poren und der abgestumpften Rissspitze bricht, und es zur Rissverlängerung kommt [7]. Dieser Bruch der Ligamente geschieht sehr schnell (Instabilitätsvorgang), das heißt bei konstanter Belastung. Bei verschiebungskontrollierten Bruchmechanikversuchen erfolgt der Bruch der Ligamente bei konstanter Lastlinienverschiebung.

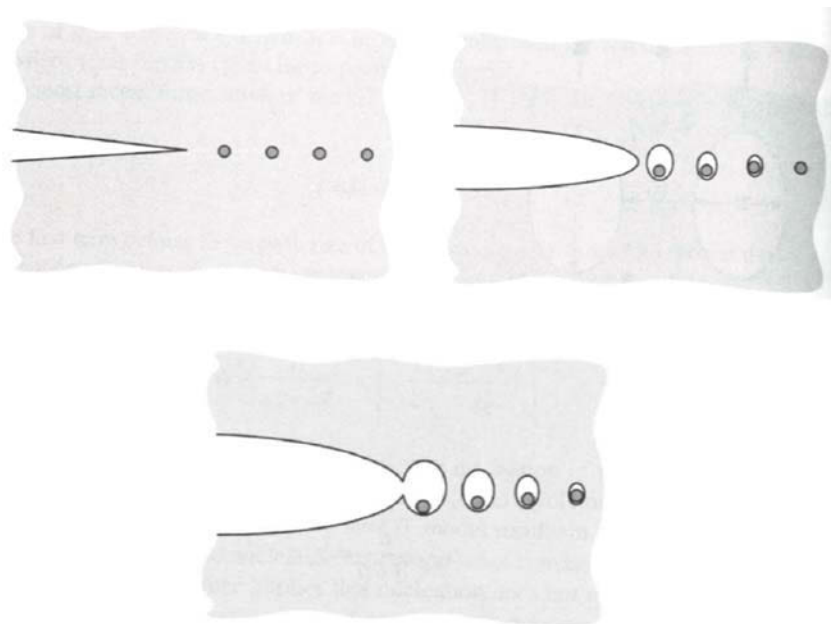


Abbildung 7.36: Mechanismus des Risswachstums in duktilen Werkstoffen [28]

Auch beim Spaltbruch (Cleavage) von kubisch raumzentrierten oder hexagonalen Metallen bei tiefen Temperaturen oder beim Sprödbruch von keramischen Werkstoffen verläuft die Rissausbreitung, lokal, in Belastungs- und Rissverlängerungsschritten. Dabei entsteht im Belastungsschritt, vor der aktuellen Rissspitze, ein Risskeim, von dem aus sich im Rissverlängerungsschritt ein Sekundärriss nach vor und nach hinten zur Rissspitze ausbreitet. Nur in ganz seltenen Fällen tritt Direkt Propagation auf, das heißt Rissausbreitung direkt von der aktuellen Rissspitze [69].

Kapitel 8

Die Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode Belastung

8.1 Allgemeines

Sehr viele Arbeiten haben sich mit dem Thema der Rissausbreitung in Bauteilen unter Mixed-Mode-Belastung beschäftigt. Seit den 1970 wurden die unterschiedlichsten Kriterien entwickelt, die sich mit der Vorhersage der Rissausbreitungsrichtung und dem Eintreten des Versagens in Bauteilen unter Mixed-Mode-Belastung beschäftigen [70–76].

Viele dieser Kriterien beziehen sich auf einen sogenannten „Vergleichsspannungsintensitätsfaktor“ und sind daher nur in der linear-elastischen Bruchmechanik anwendbar. Auch die Experimente zur Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung wurden in vielen Fällen an spröden Materialien durchgeführt.

Eine gute Zusammenfassung all dieser und weiterer Kriterien liefern die Arbeiten von Richard [77], Barsoum [78], Quian und Fatemi [79] und Bold et al. [80].

In diesem Kapitel werden ein paar dieser Kriterien kurz beschrieben. Weiters wird die Anwendung des Configurational Force Concepts zur Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung in linear-elastischen und in elastisch-plastischen Materialien beschrieben.

Nachfolgend werden die Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung mit unterschiedliche Kriterien ermittelt und mit der aus dem Configurational Force Concepts ermittelten Rissausbreitungsrichtung verglichen.

8.2 Kriterien zur Bestimmung der Risswachstumsrichtung

8.2.1 Kriterium der maximalen Tangentialspannung

Das Kriterium der maximalen Tangentialspannung (MTS-Kriterium) wurde als Bruchkriterium für Mixed-Mode beanspruchte Risse im Jahr 1967 von Erdogan und Sih [70] eingeführt. Ihm liegen zwei Annahmen zu Grunde:

- Die Rissausbreitung erfolgt in radialer Richtung senkrecht zur maximalen Tangentialspannung $\sigma_{\theta max}$.
- Risswachstum tritt ein, wenn im Nahfeld die maximale Tangentialspannung im Abstand r vor der Rissspitze den gleichen kritischen Wert annimmt wie in reiner Mode I-Belastung.

Zur Bestimmung des Rissablenkungswinkels werden die K -Feld Spannungen aus Kapitel 3.2.1.1 verwendet. Wird die partielle Ableitung von $\sigma_{\theta max}$ nach θ Null gesetzt, erhält man für die Rissausbreitungsrichtung,

$$\theta = \arccos \left[\frac{3K_{II}^2 + K_I \cdot \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right]. \quad (8.1)$$

Damit zeigt sich, dass die Rissausbreitungsrichtung lediglich von den Spannungsintensitätsfaktoren abhängig ist. Der Winkel beträgt bei reiner Mode I-Belastung 0° und bei reiner Mode II-Belastung -70.5° .

8.2.2 Kriterium der maximalen Scherspannung

Beim Kriterium der maximalen Scherspannung (MSS-Kriterium) geht man davon aus, dass der Riss in Richtung der maximalen Scherspannung $\tau_{r\theta}$ wächst, wenn diese einen kritischen Wert überschreitet. Dabei ergibt sich $\tau_{r\theta}$ wieder aus der K -Feld Lösung. Wird die partielle Ableitung von $\tau_{r\theta}$ nach θ Null gesetzt, erhält man für θ

$$\theta = 9.347 \cdot 10^{-7} \beta_{eq}^4 - 3.222 \cdot 10^{-4} \beta_{eq}^3 + 9.086 \cdot 10^{-4} \beta_{eq}^2 + 2.8686 \cdot 10^{-1} \beta_{eq} - 4.884 \cdot 10^{-2} \quad (8.2)$$

als Näherungslösung für die Rissausbreitungsrichtung, wobei $\beta_{eq} = \arctan(K_I/K_{II})$ ist. Der Rissablenkungswinkel beträgt bei reiner Mode I-Belastung 70.5° und bei reiner Mode II-Belastung 0° .

8.2.3 Kriterium der Energiefreisetzungsrate

Nuismer [72] benutzte die Energiefreisetzungsrate für die Berechnung einer Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung, welche von zwei Annahmen ausgeht:

- Die Rissausbreitung erfolgt in jene Rissausbreitungsrichtung mit der maximalen Energiefreisetzungsrate.
- Zum Risswachstum kommt es, wenn die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} einen kritischen Wert \mathcal{G}_c erreicht.

Die Rissausbreitungsrichtung ergibt sich dann als,

$$\theta = \arccos \left[\frac{3K_{\text{II}}^2 + K_{\text{I}} \cdot \sqrt{K_{\text{I}}^2 + 8K_{\text{II}}^2}}{K_{\text{I}}^2 + 9K_{\text{II}}^2} \right]. \quad (8.3)$$

Dabei ist Gleichung (8.3), welche Nuismer aus der Energiefreisetzungsrate herleitet, identisch mit Gleichung (8.1).

8.2.4 Das J -Integral Kriterium

Hellen und Blackburn [76] bestimmten die Rissausbreitungsrichtung über den J -Integralvektor. Dieses Kriterium ist sowohl für elastische, als auch für elastisch-plastischen Materialien anwendbar.

Im linear-elastischen Fall ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Komponenten des J -Vektors und den Spannungsintensitätsfaktoren:

$$J_1 = \frac{K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2}{E'}, \quad (8.4)$$

$$J_2 = \frac{-2K_{\text{I}}K_{\text{II}}}{E'} \quad (8.5)$$

mit $E' = E$ für den ESZ und $E' = E/(1 - \nu^2)$ für den EDZ. Die Rissausbreitungsrichtung ergibt sich aus der Richtung des J -Vektors als

$$\theta = \arctan \left(\frac{J_2}{J_1} \right). \quad (8.6)$$

Nach dem J -Integral Kriterium erfolgt die Rissausbreitung sowohl bei reiner Mode I-Belastung als auch bei reiner Mode II-Belastung in Richtung der Rissebene.

Bei $K_{II}/K_I = 1$ ergibt sich die maximale Rissablenkung. Für Belastungen mit hohen Schubanteilen weicht die nach dem J -Integral berechnete Rissausbreitungsrichtung sehr stark von jener der übrigen Kriterien ab.

8.2.5 Das Configurational Force-Kriterium (CF-Kriterium)

Das Configurational Force-Kriterium basiert auf dem Kriterium der maximalen Energiedissipation [81, 82]. Dieses Kriterium geht davon aus, dass alle physikalischen Prozesse in einem Material so ablaufen, dass die Energiedissipation ein Maximum wird. Eine „starke“ Formulierung dieses Kriteriums nimmt an, dass dies auch für jedes Teilgebiet in einem Material zutrifft. Wenn man die Umgebung der Riss Spitze als Teilgebiet betrachtet, erhält man mit Gleichung (4.17)

$$\psi_{\text{tip}} = (-\mathbf{f}_{\text{tip}}) \cdot \mathbf{v}_{\text{tip}} \rightarrow \max . \quad (8.7)$$

Geht man davon aus, dass die Rissausbreitungsgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich groß ist, ergibt sich die Rissausbreitungsrichtung aus der negativen Richtung des Configurational Force Vektors an der Riss Spitze \mathbf{f}_{tip} , der durch Gleichung (4.10) gegeben ist. Damit ist das Configurational Force-Kriterium für elastische Materialien identisch mit dem J -Integral Kriterium und θ ergibt sich aus,

$$\theta = \arctan \left(\frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f}_{\text{tip}}}{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{\text{tip}}} \right) = \left(\frac{J_{\text{tip},y}}{J_{\text{tip},x}} \right) , \quad (8.8)$$

wobei \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y die Einheitsvektoren in x und y Richtung bezeichnen.

8.3 Modelldaten

Um die Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung zu bestimmen, wurde die Umgebung der Riss Spitze in einer unendlichen Platte modelliert (siehe Abbildung 8.1). Dabei genügt es, nur die unmittelbare Umgebung der Riss Spitze zu modellieren und als Randbedingung die Verschiebungslösungen des K -Feldes vorzugeben (siehe Abbildung 8.1). Der Radius der Probe beträgt $R = 10$ mm. Die Probe wurde durch die Verschiebung der Knoten am Probenrand entsprechend den Verschiebungslösungen des K -Feldes, siehe (3.5) bis 3.7, beaufschlagt. Bei einer Mixed-Mode-Belastung ergeben sich die Verschiebungen im Nahfeld der Riss Spitze durch eine Linearkombination der Mode I- und Mode II-Lösung. Um verschiedene Mixed-Mode-Belastungen zu untersuchen, wurde K_I von 48

MPa $\sqrt{\text{m}}$ auf Null gesenkt und K_{II} von Null auf 48 MPa $\sqrt{\text{m}}$ erhöht. Die Schrittweite beträgt 4.8 MPa $\sqrt{\text{m}}$, sowohl für K_{I} als auch für K_{II} . Dadurch ergeben sich Mixed-Mode Verhältnisse zwischen $M = 0$ und 1 mit einer Schrittweite von 0.1. Der Mixed-Mode Parameter M wird definiert als

$$M = \frac{K_{\text{II}}}{K_{\text{II}} + K_{\text{I}}} \quad (8.9)$$

Zur Berechnung der Configurational Forces wurde die Probe um die Risspitze mit linearen isoparametrischen Dreieckselementen vernetzt und der Rest der Probe mit viereckigen Elementen aufgefüllt. Für die Berechnung der K -Werte und der Rissausbreitungsrichtung mittels dem in ABAQUS integrierten MTS-Kriteriums benötigt man eine präzise Abbildung der Singularität an der Risspitze. Dies ist mit linearen isoparametrischen Dreieckselementen nicht möglich. Daher wurde die Probe für die Bestimmung der K -Faktoren und der Rissausbreitungsrichtung neu vernetzt, wobei speziellen Rissspitzenelementen verwendet wurden.

Alle Berechnungen erfolgten unter der Annahme kleiner Verformungen und eines ebenen Dehnungszustandes. Die Berechnungen wurden sowohl für ein rein elastisches Material als

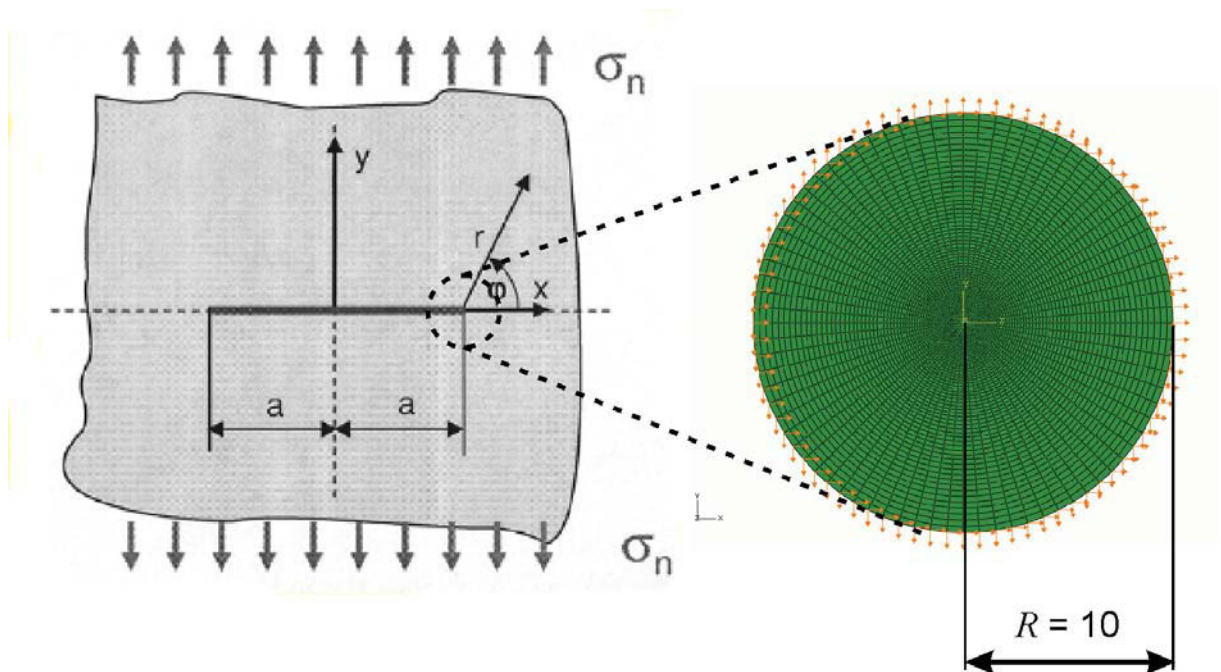


Abbildung 8.1: Modell zur Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung

auch für ein elastisch-plastisches Material mit ABAQUS [38] durchgeführt. Als Material wurde wieder ein Stahl S235 mit den in Kapitel 6.1 beschriebenen Eigenschaften, gewählt.

Die Lösungen des K -Feldes gelten natürlich nur für ein rein elastisches Material. Um die Lösungen miteinander vergleichen zu können, wurden jedoch auch die Modelle mit den elastisch-plastischen Materialeigenschaften mit den Verschiebungslösungen des K -Feldes belastet.

Für die Berechnung der Configurational Forces wurde wieder das in Abschnitt 4.4 beschriebene Post-Processing-Programm verwendet.

8.4 Ergebnisse

8.4.1 Risswachstumsrichtung in elastischen Materialien

In den Abbildungen 8.2(a) bis 8.2(f) ist die Tangentialspannung, σ_θ in der Umgebung der Risspitze für verschiedene Mixed-Mode-Beanspruchungen dargestellt. Zusätzlich sind die Rissausbreitungsrichtungen nach Gleichung (8.1) in den Abbildungen eingezeichnet. Man sieht, dass das Maximum der Tangentialspannung sehr gut mit den in ABAQUS berechneten Ausbreitungsrichtungen zusammen fällt.

In den Abbildungen 8.3(a) bis 8.3(f) sind die dazugehörigen Scherspannungen, $\tau_{r\theta}$ dargestellt. Die Rissausbreitungsrichtungen stimmt gut mit den in [83,84] experimentell ermittelten Winkel überein.

In den Abbildungen 8.4(a) bis 8.4(f) ist die Verteilung der Configurational Forces in der Probe für unterschiedliche Mixed-Mode-Belastungen dargestellt. Zusätzlich ist die Rissausbreitungsrichtungen in schwarz eingezeichnet. Direkt am Rissspitzenknoten entsteht eine große Configurational Force. Man sieht, dass der Configurational Force Vektor an der Risspitze bei reiner Mode I-Belastung (Abbildung 8.4(a)) in x-Richtung zeigt. Die Rissausbreitung erfolgt nach Gleichung (8.7) in die negative Richtung des Configurational Force Vektors. Erhöht man den Mode II-Anteil etwas, wächst der Riss nicht mehr gerade sondern in einem Winkel θ zur x-Achse (siehe Abbildung 8.4(b)). Dieser Winkel ist vom Verhältnis der beiden K -Faktoren abhängig. Die Tangentialspannung steigt zunächst mit zunehmendem Mode II-Anteil und erreicht ein Maximum, wenn K_{II} und K_I gleich groß sind. Erhöht man den K_{II} -Anteil weiter, beginnt θ wieder zu sinken und erreicht bei reiner Mode II-Belastung wieder den Wert Null. Der Betrag des Configurational Force Vektors variiert ebenfalls mit dem Mixed-Mode Parameter. Bei reiner Mode-I Belastung beträgt $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{tip}) \Delta A_e = 9.39 \text{ kJ/m}^2$. Mit steigendem Mode-II Anteil nimmt der Betrag von \mathbf{f}_{tip} ab und erreicht bei einem Mixed-Mode Verhältnis von $K_{II}/K_I = 1$ den minimalen Wert von

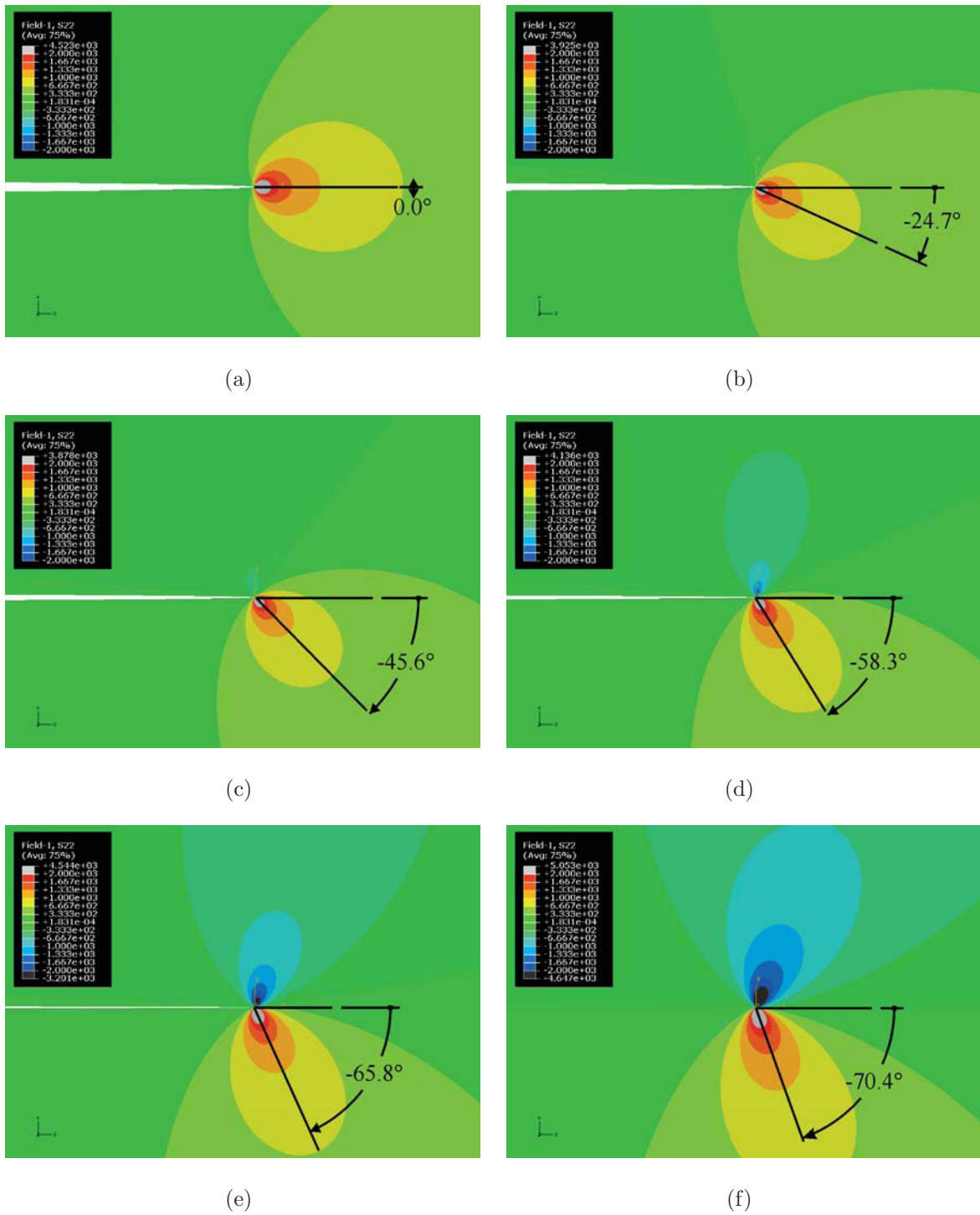


Abbildung 8.2: Tangentialspannung σ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

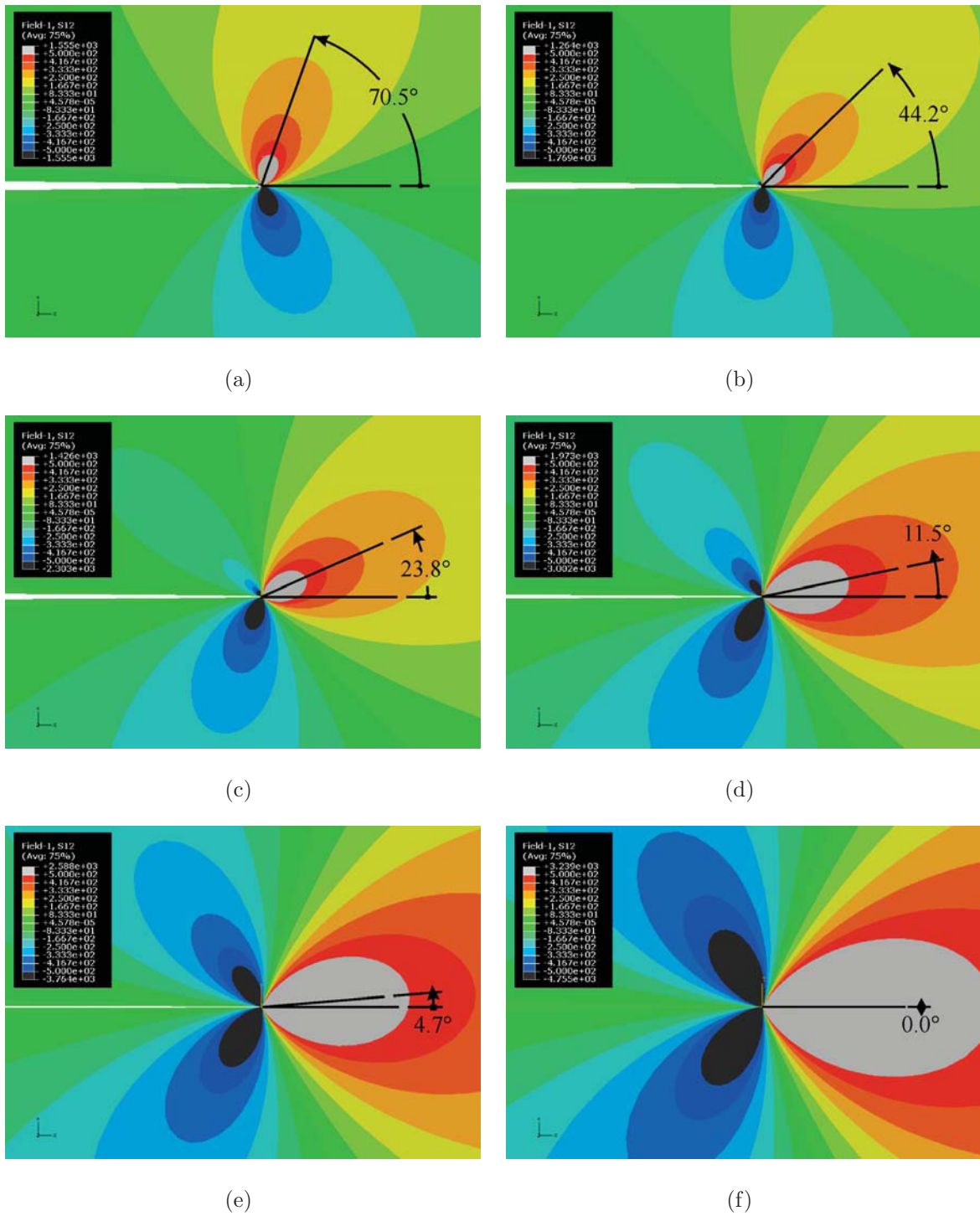


Abbildung 8.3: Scherspannungen τ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

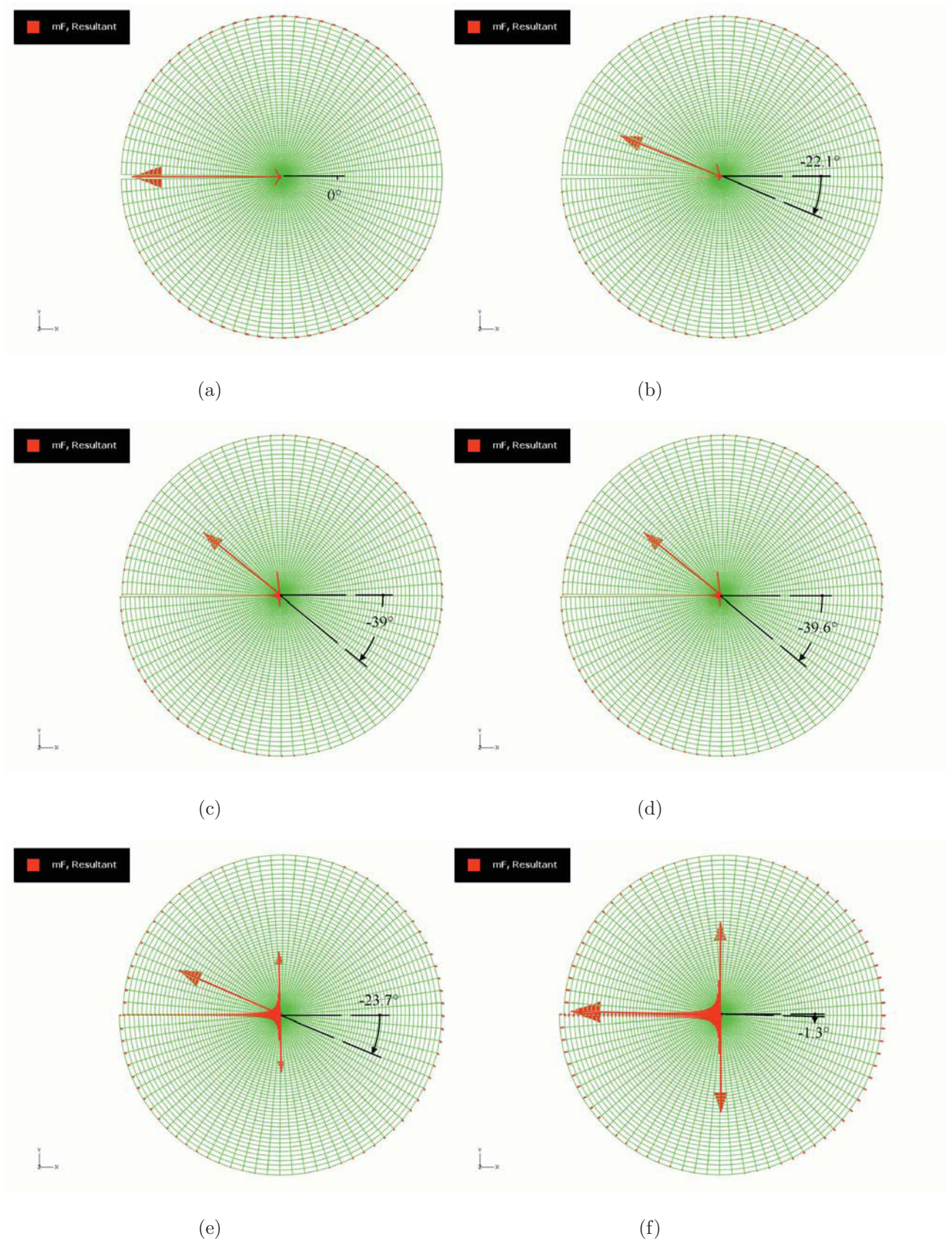


Abbildung 8.4: Verteilung der Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

$(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{\text{tip}}) \Delta A_e = 6.28 \text{ kJ/m}^2$. Danach nimmt der Betrag von \mathbf{f}_{tip} wieder zu und erreicht bei reiner Mode II Belastung den Wert $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{\text{tip}}) \Delta A_e = 9.42 \text{ kJ/m}^2$.

Bei höheren Mode II-Anteilen wirkt nicht nur am Rissspitzenknoten eine große Configurational Force, sondern es entstehen auch Configurational Forces entlang der Rissflanken. In den Abbildungen 8.4(d) bis 8.4(f) ist zu erkennen, dass diese Kräfte mit steigendem Mode II-Anteil immer größer werden und senkrecht auf die Rissflanken stehen. Die Kräfte an der oberen und unteren Rissflanke sind nicht gleich groß. Sie entstehen durch einen Sprung der Materialeigenschaften an den Rissflanken (Material/Luft). Sehr nahe an der Rissspitze treten die größten Kräfte auf. Bei reiner Mode II-Belastung treten zwei Configurational Forces in den Knoten direkt hinter der Rissspitze auf. Diese sind nicht viel kleiner als die Configurational Force die an der Rissspitze wirkt, stehen aber senkrecht zur Rissebene. Die risstreibende Kraft senkrecht auf die Rissflanken ist demnach fast gleich groß wie die risstreibende Kraft parallel zu der Rissebene. Daher kann man nicht mit Sicherheit sagen, welche Kraft für die Rissausbreitung maßgeblich ist.

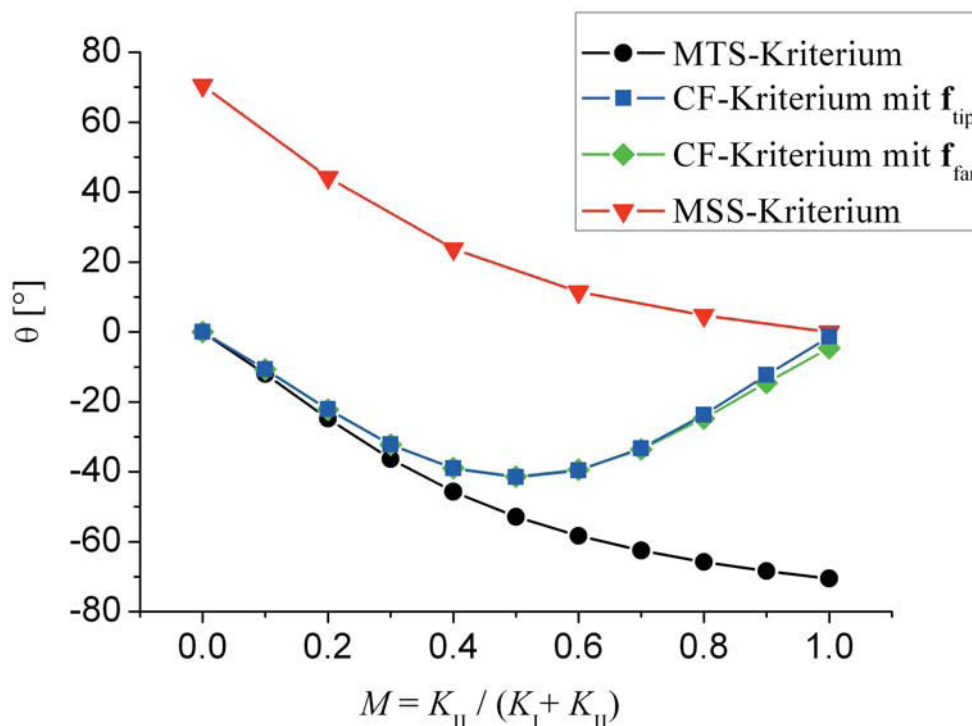


Abbildung 8.5: Rissausbreitungsrichtung als Funktion des Mixed-Mode-Parameters für verschiedene Kriterien in einem elastischen Material

In Abbildung 8.5 ist die Rissausbreitungsrichtung für verschiedene Kriterien als Funktion des Mixed-Mode-Parameters M dargestellt. Das MTS-Kriterium und das MSS-Kriterium

liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse. Nach dem MTS-Kriterium wächst der Riss bei reiner Mode I-Belastung gerade aus und bei reiner Mode II-Belastung in einem Winkel von $\theta = -70.5^\circ$ zur x-Achse. Bei Belastung zwischen reinem Mode I und Mode II liegt die Rissausbreitungsrichtung zwischen 0° und -70.5° je, nachdem wie groß der Mode II-Anteil ist (siehe Abbildung 8.5).

Beim MSS-Kriterium wächst der Riss unter Mode I in einem Winkel von $\theta = 70.5^\circ$ zur x-Achse. Mit steigendem Mode II-Anteil wird der Winkel immer kleiner und erreicht bei reiner Mode II-Belastung 0° .

Betrachtet man sich die Rissausbreitungsrichtung nach dem CF-Kriterium erhält man die blaue und die grüne Kurve in Abbildung 8.5. Dabei ergibt sich die blaue Kurve aus dem Configurational Force Vektor an der Rissspitze. Für die Ermittlung der grünen Kurve wurden alle Configurational Forces in der Probe, mit Ausnahme der Configurational Forces an den Rissflanken, aufsummiert. Die Rissausbreitungsrichtung ergibt sich dann aus Gleichung (8.6).

Nach dem CF-Kriterium wächst der Riss für kleine Mode II-Anteile in die gleiche Richtung wie nach dem MTS-Kriterium. Erst bei $M = 0.4$ beginnt das CF-Kriterium stark vom MTS-Kriterium abzuweichen. Wird der Mode II-Anteil größer, nimmt nach dem CF-Kriterium der Winkel ab. Bei einer reinen Scherbelastung entspricht die Rissausbreitungsrichtung im CF-Kriterium jenem des MSS-Kriteriums und θ ist Null. Auch wenn man alle Configurational Forces, mit Ausnahme der Configurational Forces an den Rissflanken, aufsummiert, und danach die Rissausbreitungsrichtung bestimmt, ändert sich nichts. Die Rissausbreitung erfolgt sowohl bei reiner Mode I-Belastung, als auch bei reiner Mode II-Belastung parallel zur Rissebene.

8.4.2 Risswachstumsrichtung in elastisch-plastischen Materialien

Auch bei der elastisch-plastischen Probe wurden die Verschiebungslösungen des K -Feldes für die Belastung der Probe aufgebracht. Dabei entsteht eine plastische Zone, die sich im Fall einer Mode I-Belastung über die Hälfte der Probe erstreckt. Mit zunehmenden Mode II Anteil, wird auch die plastische Zone etwas größer, berührt jedoch nie den Rand der Probe.

Die Tangentialspannung σ_θ und Scherspannungen $\tau_{r\theta}$ für ein elastisch-plastisches Material sind in den Abbildungen 8.6 und 8.7 dargestellt. Auch hier sind die Rissausbreitungsrichtung nach dem MTS- und MSS-Kriterium eingezeichnet.

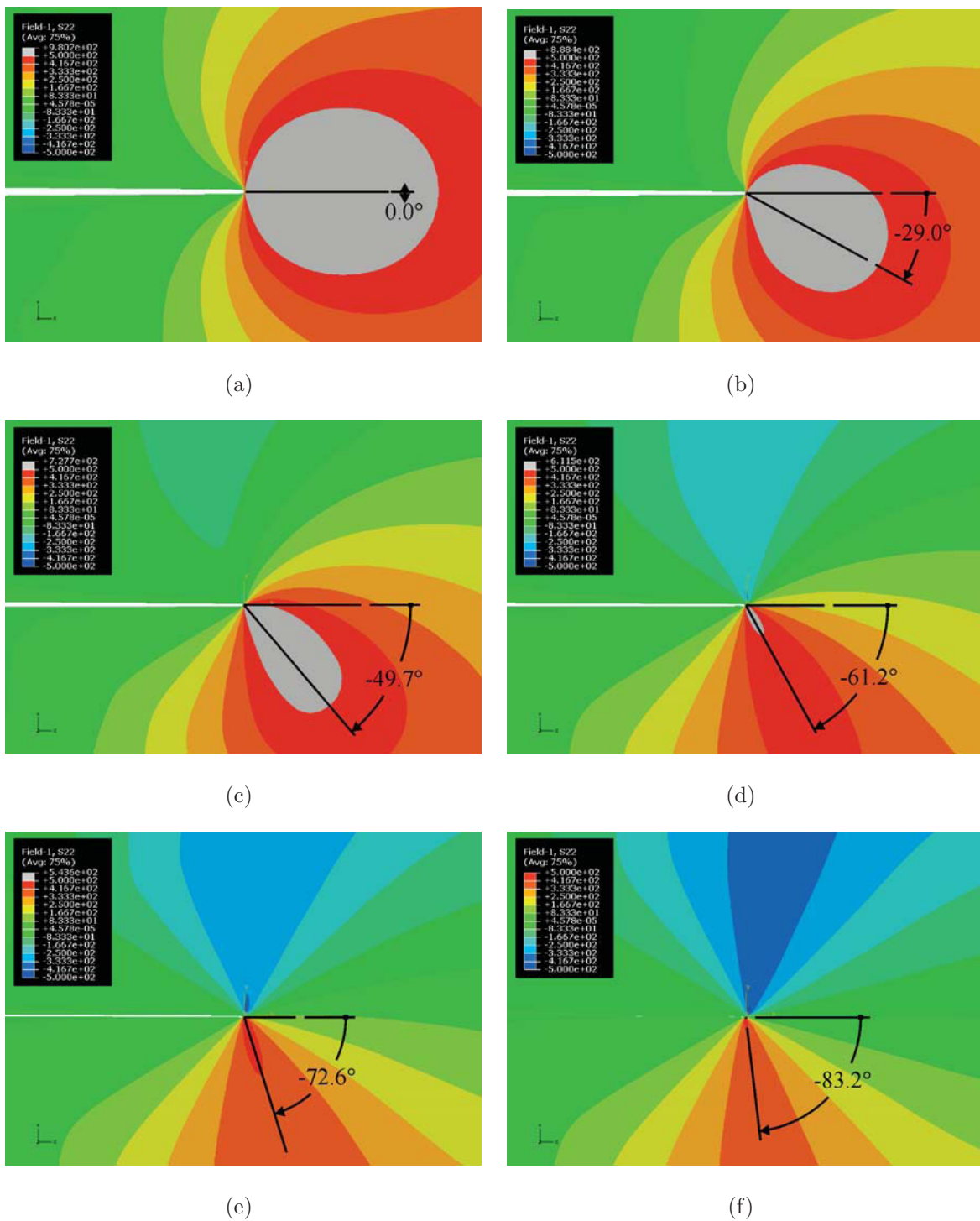


Abbildung 8.6: Tangentialspannung σ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastisch-plastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

In Abbildung 8.8 ist die Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces und in Abbildung 8.9 die Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces dargestellt. In beiden Fällen entsteht direkt an der Risspitze eine große Kraft, die in die negative Rissausbreitungsrichtung zeigt. In einem elastisch-plastischen Material entstehen

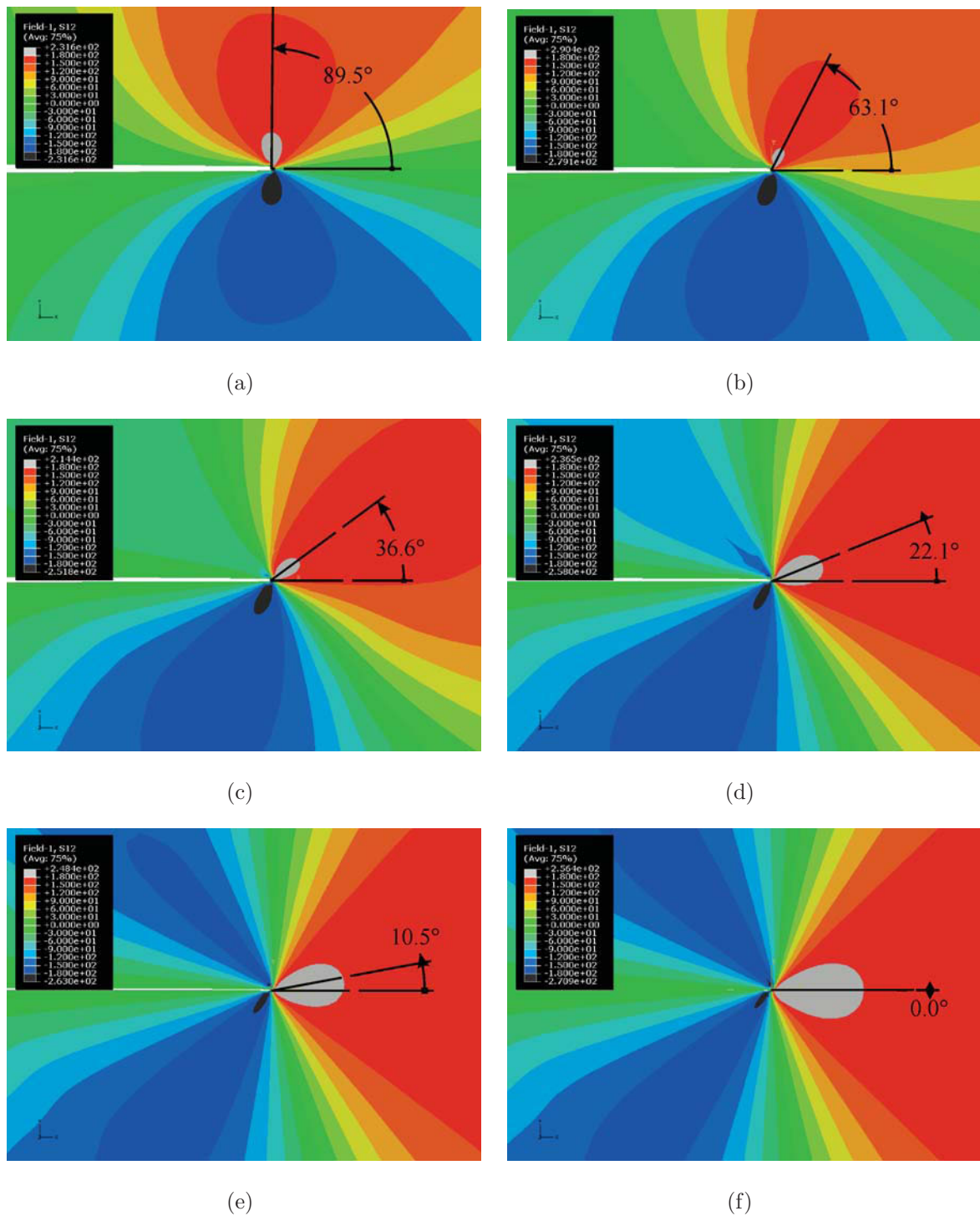


Abbildung 8.7: Scherspannungen τ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastisch-plastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

zusätzlich zur großen Configurational Force an der Risspitze noch kleine Configurational Forces in der gesamten plastischen Zone. Dadurch wird das J -Integral bei einer Mixed Mode-Belastung stark wegabhängig. Betrachtet man nur die Configurational Force an der Risspitze, sieht man, dass die risstreibende Kraft bei reiner Mode I-Belastung in x-

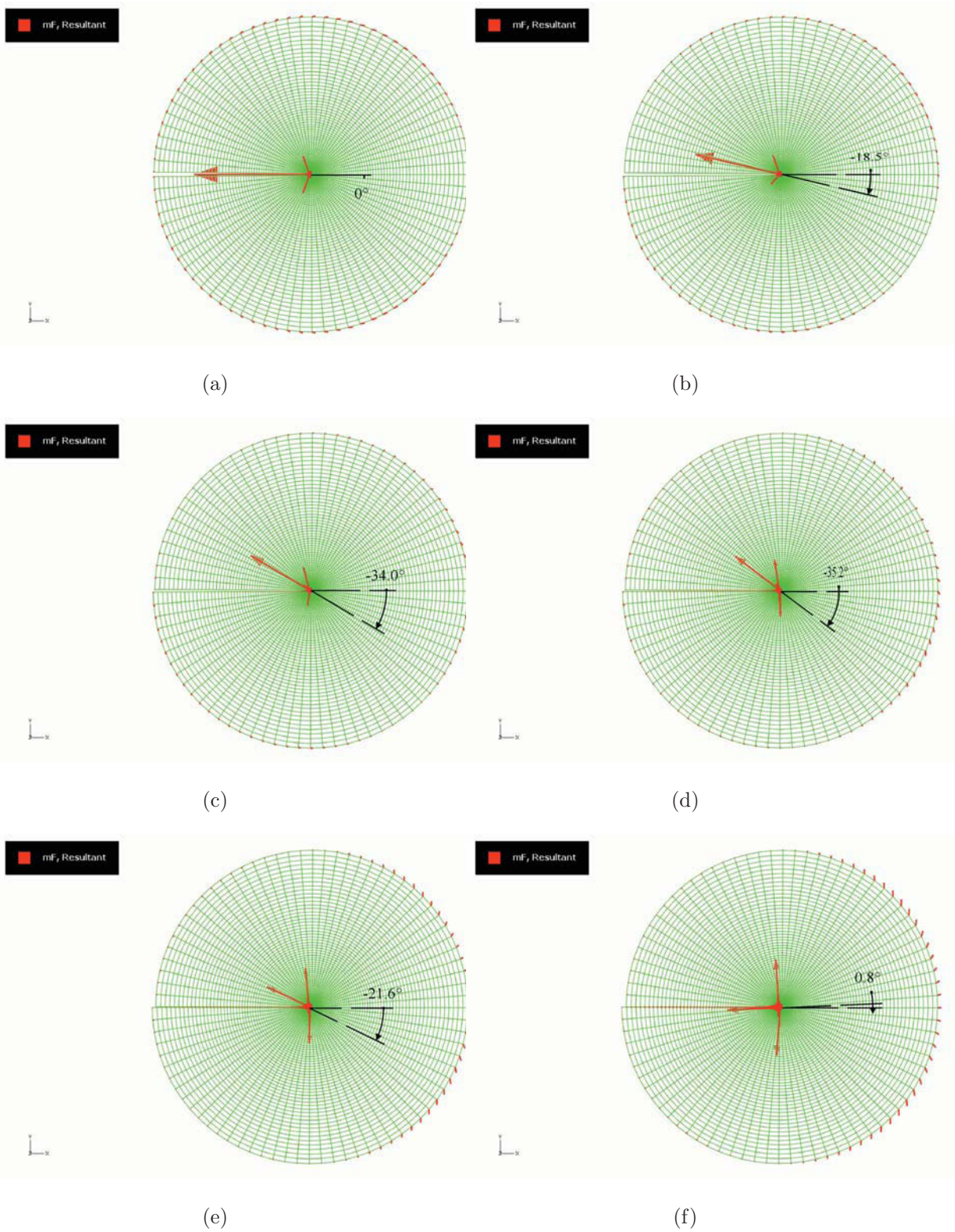


Abbildung 8.8: Verteilung der nichtlinear-elastische Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

Richtung wirkt. Mit zunehmendem Mode II-Anteil steigt der Rissablenkungswinkel und erreicht bei $M = 0.6$ ein Maximum. Danach sinkt θ wieder auf Null ab.

In Abbildung 8.10 ist die Rissausbreitungsrichtung als Funktion von M und für unter-

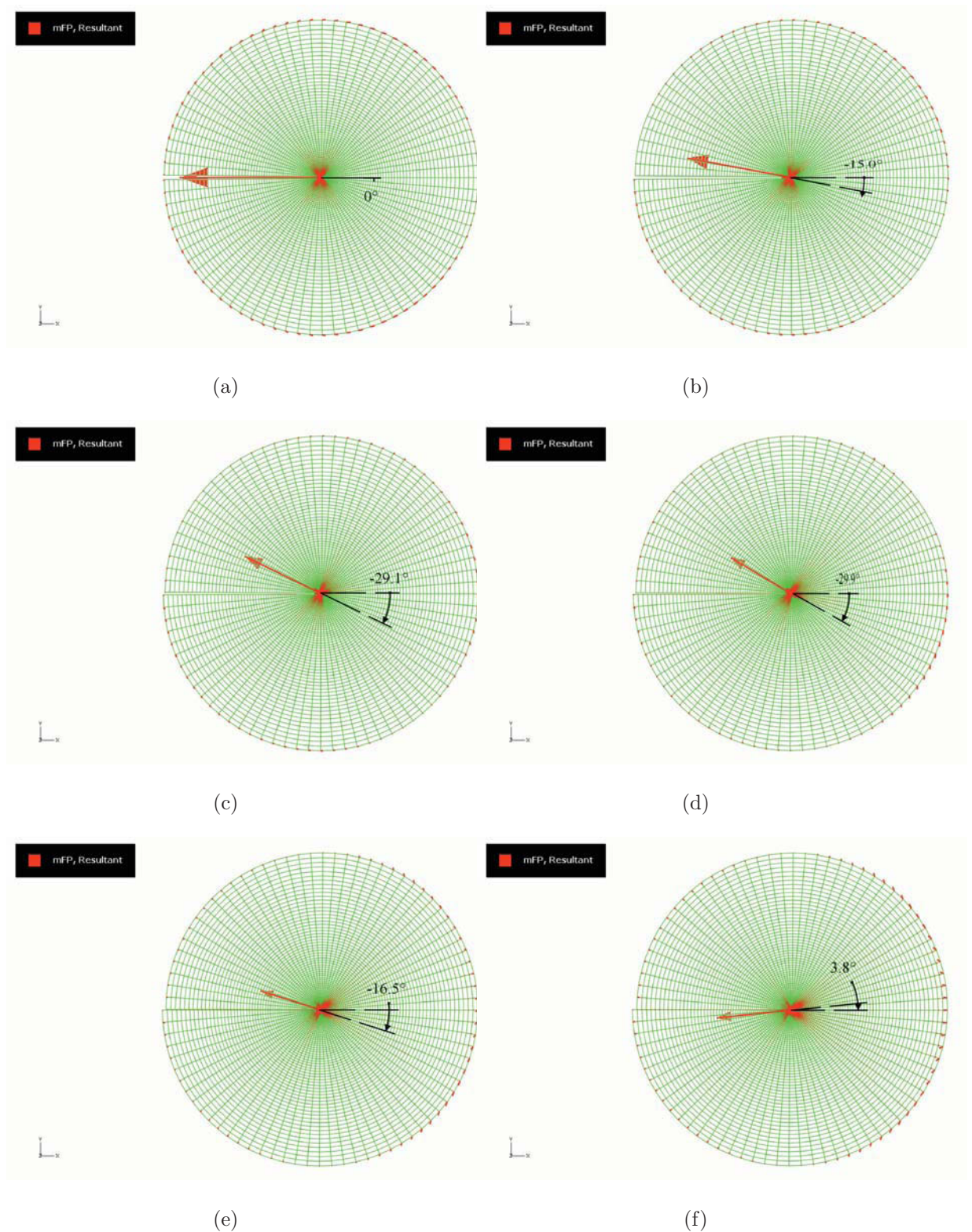


Abbildung 8.9: Verteilung der elastische-plastischen Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$

schiedliche Kriterien dargestellt. Bei CF-Kriterium wurde die Rissausbreitungsrichtung einmal direkt aus dem Configurational Force Vektor (\mathbf{f}_{tip}) an der Risspitze bestimmt und einmal durch die Summierung aller Configurational Forces in der Probe. Bei der Summie-

rung wurden die Configurational Forces an den Rissflanken nicht berücksichtigt. Vergleicht man Abbildung 8.5 mit Abbildung 8.10, sieht man, dass sich die Winkel sowohl beim MTS-Kriterium als auch bei MSS-Kriterium zu höheren Werten verschieben. Der Verlauf der Kurven ist jedoch für das elastisch-plastische Material ähnlich wie für das linear-elastische Material. Betrachtet man sich die Rissausbreitungsrichtung nach dem CF-Kriterium, sieht man, dass es einen quantitativen Unterschied zwischen der Rissausbreitungsrichtung, ermittelt aus den nichtlinear-elastischen Configurational Forces, und der Rissausbreitungsrichtung, ermittelt aus den elastisch-plastischen Configurational Forces, gibt. Qualitativ ändert sich jedoch nicht viel. Die Rissausbreitung erfolgt nach dem CF-Kriterium sowohl für Mode I-Belastung als auch für Mode II-Belastung in Richtung der Rissebene. Auch wenn man die Rissausbreitung über f_{far}^{ep} bzw. f_{far}^{nel} berechnet, ändert sich qualitativ nichts.

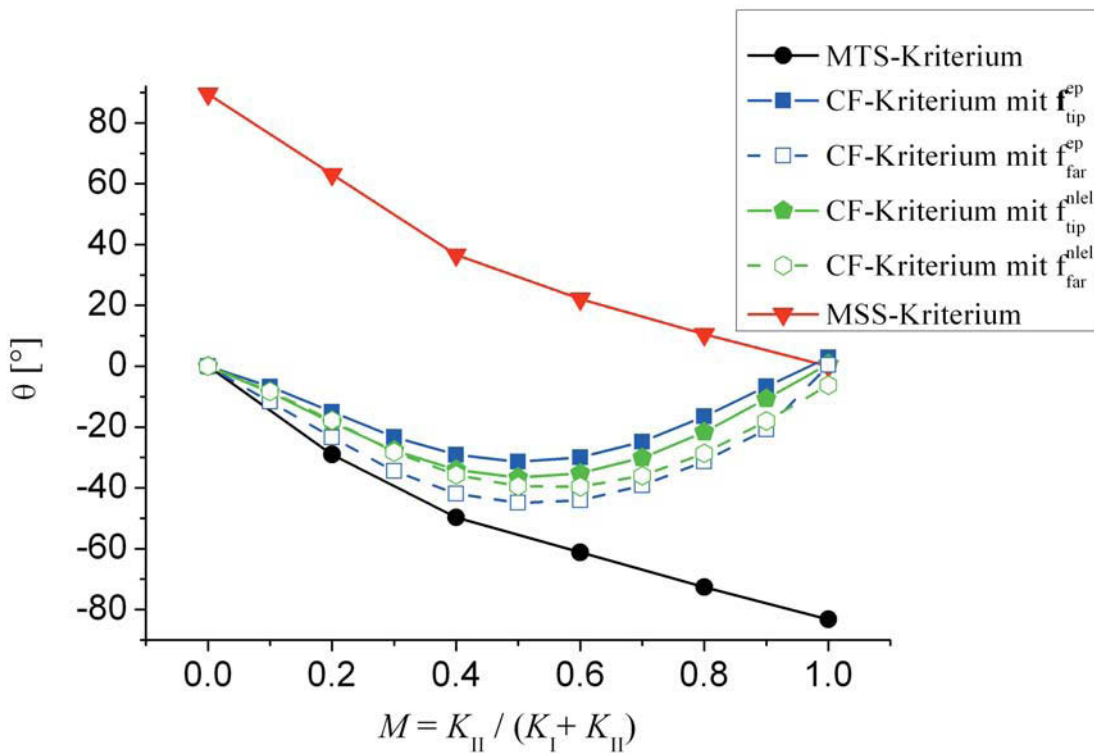


Abbildung 8.10: Rissausbreitungsrichtung als Funktion des Mixed-Mode Parameters für verschiedene Kriterien in einem elastisch-plastischen Material

8.5 Diskussion der Ergebnisse

Das MTS-Kriterium und das MSS-Kriterium liefern sowohl in elastischen als auch in elastisch-plastischen Materialien sehr unterschiedliche Werte für die Rissausbreitungsrichtung. Das CF-Kriterium stimmt in elastischen Materialien mit dem MTS-Kriterium solange überein, solange der Mode II-Anteil gering ist. Für elastisch-plastische Materialien weicht das CF-Kriterium fast über den gesamten Bereich vom MTS-Kriterium und MSS-Kriterium ab, und zwar unabhängig ob man die Rissausbreitungsrichtung über die nichtlinear-elastischen oder über die elastisch-plastischen Configurational Forces bestimmt.

Die Frage ist jetzt: welches Kriterium ist richtig?

Die Frage ist per se nicht beantwortbar, denn die Rissausbreitungsrichtung hängt von vielen Parametern ab, wie z.B. vom Materialtyp, von Mechanismus des Bruchvorganges usw. [22]. In einigen Arbeiten [77,85] wird z.B. darauf hingewiesen, dass ein gerades Risswachstum ($\theta = 0^\circ$) unter reiner Mode II-Belastung in Widerspruch zu experimentellen Resultaten steht. Dies stimmt jedoch nicht, denn Materialien können auf unterschiedliche Arten versagen. In spröden Materialien werden die Versagensmechanismen hauptsächlich durch die Hauptnormalspannungen gesteuert (Spaltbruch in Metallen). In duktilen Materialien tritt das Versagen häufig durch die größte Schubspannung ein. In [83,84,86] wurde gezeigt, dass die Art des Versagens (spröd oder duktil) einen sehr großen Einfluss auf die Rissausbreitungsrichtung besitzt und dass es ein Verhältnis zwischen Mode I- und Mode II-Belastung gibt, bei dem sich die Versagensmechanismen ändern.

In [87] wird darauf hingewiesen, dass es sehr schwierig ist, ein Risswachstumsexperiment unter reiner Mode II-Belastung zu realisieren. Durch die Oberflächenrauigkeit der Rissflanken kommt es bereits nach kurzer Rissverlängerung zum Kontakt zwischen den Rissflanken. Sobald sich die Rissflanken berühren, ist eine reine Mode II-Belastung nicht mehr gegeben. Durch diese Behinderung wird der Riss sehr stark abgelenkt, wodurch das weitere Risswachstum nur mehr unter einer Mode I-Belastung erfolgt. Der Riss wächst demnach auch unter reiner Mode II-Belastung gerade aus. Die kritische Rissverlängerung, bei der der Riss „abkinkt“, skaliert mit dem Quadrat von ΔK . Dadurch wird die kritische Risslänge bei der ein Riss „abkinkt“ bei kleinen ΔK -Werte sehr klein und liegt nahe am Schwellwert für das jeweilige Material. In [88] wurden Risswachstumsexperimente unter Mode II-Belastung durchgeführt, bei denen der Riss anfänglich geradeaus gewachsen ist. Vom Standpunkt der Thermodynamik aus, muss das Kriterium der maximalen Dissipa-

tion richtig sein. Dadurch ergibt sich die Rissausbreitungsrichtung der Abbildungen 8.4 und 8.9, allerdings unter der Voraussetzung $v_{\text{tip}} = \text{konstant}$. Ob diese Bedingung erfüllt ist, kann nur experimentell überprüft werden.

Kapitel 9

Die risstreibende Kraft in inhomogenen Materialien

9.1 Allgemeines

In zahlreichen theoretischen und experimentellen Arbeiten wurde nachgewiesen, dass eine Variation der Materialeigenschaften in Rissausbreitungsrichtung die risstreibende Kraft sehr stark beeinflussen kann. Die effektive, risstreibende Kraft an der Rissspitze ist nicht mehr gleich groß wie die treibende Kraft, welche in die Probe gesteckt wird [53]. Je nach Materialpaarung kommt es zu einer Absenkung (Übergang weich/hart) oder zu einer Erhöhung (Übergang hart/weich) der risstreibenden Kraft im Vergleich zu einem homogenen Material.

Über die Anwendung der Bruchmechanik in inhomogenen Materialien existiert bereits eine umfangreiche Literatur. Eine gute Zusammenfassung findet man in Simha et al. und Kolednik et al. [49, 53], weshalb hier auf weitere Literaturangaben verzichtet wird.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Anwendung des Configurational Force Concepts in inhomogenen Materialien. In Simha et al. [49, 50] wurde dieses Konzept verwendet, um den Einfluss von Materialinhomogenitäten auf die risstreibende Kraft zu beschreiben. Die effektive risstreibende Kraft, J_{tip} , ergibt sich nach Gleichung (4.23) aus der Summe von J_{far} und einem Material Inhomogeneity Term C_{inh} . Um die Brucheigenschaften von mehrphasigen Materialien oder Kompositwerkstoffen zu verstehen, ist es wichtig zu erkunden, wie sich die Materialinhomogenitäten auf den Material Inhomogeneity Term und damit auf die risstreibende Kraft auswirken.

In den Arbeiten von Simha et al. [49, 50], Predan et al. [51] und Kolednik et al. [53, 89]

wurden Fallstudien mit unterschiedlichen Materialpaarungen durchgeführt, um den Material Inhomogeneity Term zu bestimmen. In allen diesen Arbeiten wurde die risstreibende Kraft und der Material Inhomogeneity Term in elastisch-plastischen Materialien über die Deformationstheorie der Plastizität berechnet.

In dieser Arbeit wird ein Beispiel aus der Fallstudie von Kolednik et al. [89] herangezogen, um die risstreibende Kraft und den Material Inhomogeneity Term über die inkrementellen Plastizitätstheorie zu ermitteln. Diese Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen aus [89] verglichen. Dabei soll die Frage geklärt werden, ob sich die risstreibende Kraft ändert, wenn die Configurational Forces über die inkrementelle Plastizitätstheorie berechnet werden.

9.2 Modelldaten

Für die Ermittlung der risstreibenden Kraft in einem inhomogenen Material wurde eine C(T)-Probe mit den in Abbildung 9.1 dargestellten Abmessungen verwendet. Die Probenbreite beträgt $W = 50$ mm, die halbe Probenhöhe ist $h = 30$ mm, und die Risslänge $a = 29$ mm. Aufgrund der Symmetrie bezüglich der x_1 -Achse genügt es, nur die Hälfte der Probe zu modellieren.

Die Probe besteht aus zwei homogenen Materialien, die durch ein „scharfes“ Interface voneinander getrennt sind. Es wird angenommen, dass die Bindung der Materialien am Interface ideal ist und dass es zu keiner Ablösung kommen kann. Das Interface erstreckt sich normal zur Rissebene und hat einen Abstand L zur Rissspitze. Um den Effekt des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface zu untersuchen, wurde dieser Abstand zwischen $-2.5 \leq L \leq 2.5$ mm variiert. Dadurch liegt die Rissspitze für $L > 0$ links vom Interface in Material 1 und für $L < 0$ rechts vom Interface in Material 2.

Als Materialien wurden zwei elastisch ideal-plastische Materialien verwendet mit einem gemeinsamen E -Modul $E = 210$ GPa und einer Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$. Die Streckgrenze der Materialien beträgt $\sigma_Y = 300$ MPa und $\sigma_Y = 900$ MPa respektive. Es wurde der Effekt einer Materialpaarung weich/hart ($\sigma_{Y1} = 300$ MPa und $\sigma_{Y2} = 900$ MPa) und hart/weich ($\sigma_{Y1} = 900$ MPa und $\sigma_{Y2} = 300$ MPa) untersucht.

Zur Berechnung der Spannungs- und Dehnungsdaten wurde wieder ABAQUS [38] verwendet. Alle Modelle wurden mithilfe des inkrementellen Plastizitätsmodells berechnet und erfolgten unter der Annahme kleiner Verformungen und eines ebenen Dehnungszustandes.

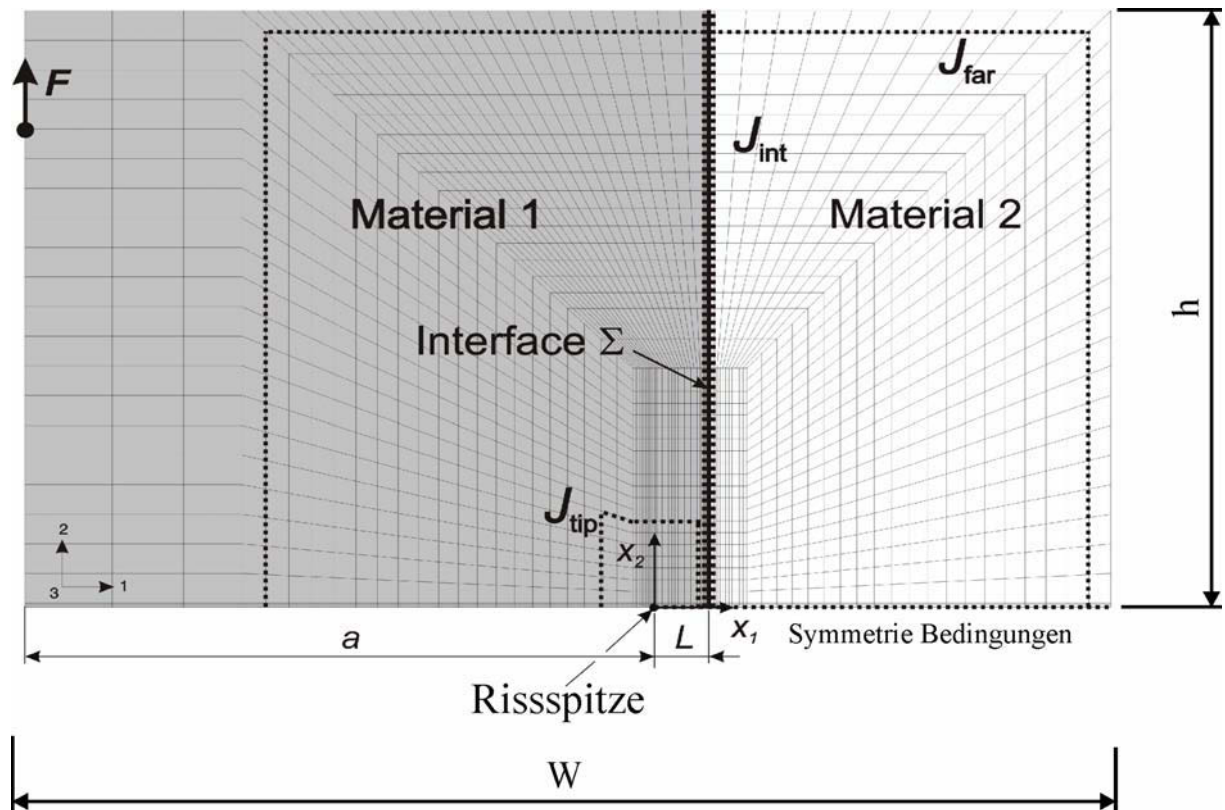


Abbildung 9.1: Abmessungen der C(T)-Probe und FE-Netz für ein inhomogenes Material

Die Belastung der Probe erfolgte über die Verschiebung eines Knoten am linken Rand der Probe (siehe Abbildung 9.1) um $F = 1.2$ mm. Um eine optimale Krafteinleitung zu gewährleisten, wurde die Probe in diesem Bereich nur mit elastischen Materialeigenschaften modelliert.

Um ausreichend genaue Ergebnisse für J_{tip} und C_{inh} zu erhalten, muss die Probe in der Umgebung der Rissspitze und des Interfaces sehr fein vernetzt werden. Daher wurde das Modell in unterschiedliche Bereiche zerlegt und mit unterschiedlichen Elementgrößen vernetzt. In der Umgebung der Rissspitze beträgt die Netzgröße 0.013 mm und entlang des Interfaces 0.05 mm.

Für alle Berechnungen wurden quadratische isoparametrische Elemente verwendet.

Um die J -Integrale für verschiedene Bereiche zu ermitteln, wurden unterschiedliche Integrationspfade definiert. Eine rechteckige Kontur in der Nähe der Probenoberfläche für die Berechnung von J_{far} und eine Kontur um das Interface für die Berechnung von C_{inh} (Abbildung 9.1) wurden verwendet. Die risstreibende Kraft kann auf zwei Arten ermittelt werden:

- Erstens, direkt aus der Configurational Forces an der Rissspitze, \mathbf{f}_{tip} ; diese Methode

liefert jedoch bei hohen Belastungen oder kleinen Abständen zwischen Riss Spitze und Interface keine guten Ergebnisse.

- Zweites kann J_{tip} aus der Summe von J_{far} , dem Material Inhomogeneity Term C_{inh} und dem Plasticity Influence Term C_{p} ermittelt werden.

Für die Berechnung der Configurational Forces, des Material Inhomogeneity Term und des Plasticity Influence Terms wurde wieder das in Abschnitt 4.4 beschriebene Post-Processing-Programm verwendet. Anders als in der Arbeit von Kolednik et al. [89] wurde in dieser Arbeit die inkrementelle Plastizitätstheorie zur Berechnung der Configurational Forces im Material und entlang des Interfaces verwendet.

9.3 Ergebnisse

In Abbildung 9.2 ist der Material Inhomogeneity Term C_{inh} als Funktion von $J_{\text{far}}^{\text{nlel}}$ für verschiedene Abstände zwischen der Riss Spitze und dem Interface dargestellt. Die Werte für die Diagramme wurde aus der Arbeit von Kolednik et al. [89] entnommen. In dieser Arbeit wurde C_{inh} mittels Gleichung (4.22) berechnet. Existiert nur ein scharfes Interface und liegt ansonsten ein homogenes Material vor, reduziert sich Gleichung (4.22) in der Deformationstheorie der Plastizität auf

$$C_{\text{inh}} = - \int_{\Sigma} ([[\phi]] - \langle \mathbf{S} \rangle \cdot [\mathbf{F}]) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) dl. \quad (9.1)$$

Dabei ist ϕ die gesamte Formänderungsenergie dichte, und das Material wird als nichtlinear-elastisch betrachtet. Die risstreibende Kraft ergibt sich nach Gleichung (4.23) zu

$$J_{\text{tip}}^{\text{nlel}} = J_{\text{far}}^{\text{nlel}} + C_{\text{inh}}^{\text{nlel}}. \quad (9.2)$$

Setzt man für ϕ nur den elastischen Anteil der Formänderungsenergie dichte ein, erhält man den Material Inhomogeneity Term für ein elastisch-plastisches Material. Durch den Gradient in der plastischen Verformung ist das Material überall dort, wo es verformt wird, nicht mehr homogen. Dadurch entsteht in einem elastisch-plastischen Material ein zusätzlicher Term, welcher aus der Inhomogenität der plastischen Verformung herrührt, der Plasticity Influence Term C_{p} . Die risstreibende Kraft ergibt sich dann zu

$$J_{\text{tip}}^{\text{ep}} = J_{\text{far}}^{\text{ep}} + C_{\text{inh}}^{\text{ep}} + C_{\text{p}}. \quad (9.3)$$

Weiters wird C_{inh} als $C_{\text{inh}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ bezeichnet, wenn in Gleichung (9.1) die gesamte Formänderungsenergiegedichte verwendet wird und als $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$, wenn nur der elastische Anteil der Formänderungsenergiegedichte herangezogen wird.

Bei der numerischen Berechnung von C_p werden wieder alle Bulk Configurational Forces summiert. Die Configurational Force an der Risssspitze und die Configurational Forces entlang des Interfaces werden dabei nicht berücksichtigt. Dadurch ergibt sich der Plasticity Influence Term C_p aus

$$C_p = \sum_{\mathcal{B} - \mathcal{B}_{R_2} - \Sigma} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}_e^K) \Delta A_e. \quad (9.4)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{B} den gesamten Körper, \mathcal{B}_{R_2} den Bereich der Risssspitze und Σ das Interface. Der Risssspitzenbereich besteht bei diesen Rechnungen aus einem 4 mal 4 Elemente großen Bereich.

In Abbildung 9.2 ist $C_{\text{inh}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ als Funktion von $J_{\text{far}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ für verschiedene Abstände des Interfaces zu Risssspitze aufgetragen. In Abbildung 9.3(a) wurde $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$ für eine Materialpaarung weich/hart und in Abbildung 9.3(b) für eine Materialpaarung hart/weich ermittelt. Vergleicht man die Kurven aus Abbildung 9.2(a) mit den Kurven aus Abbildung 9.3(a), sieht man, dass die $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$ -Kurven im Falle einer Materialpaarung weich/hart einen ähnlichen Verlauf besitzen wie die $C_{\text{inh}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ -Kurven, aber viel höhere Beträge annehmen. Der Grund dafür ist, dass der Material Inhomogeneity Term über eine Summierung der Con-

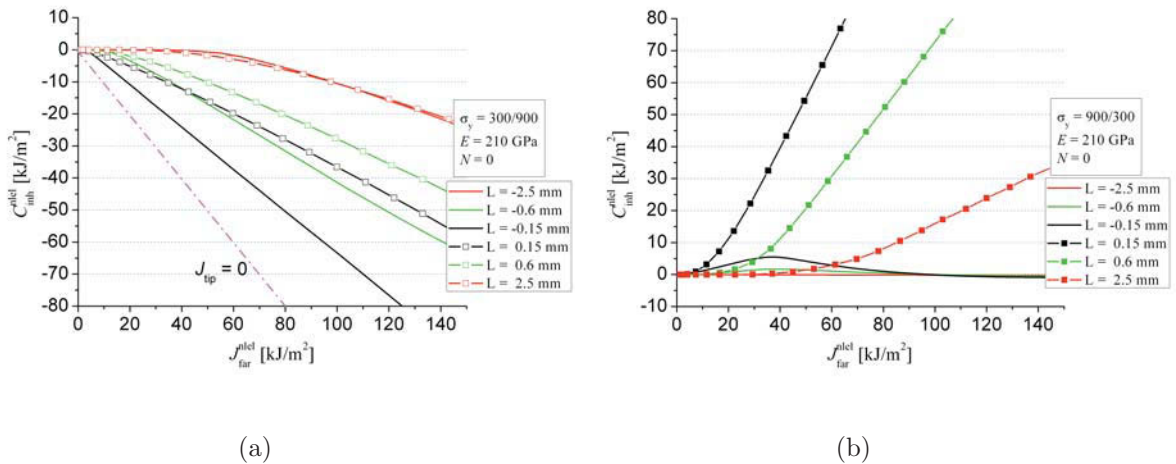


Abbildung 9.2: Material Inhomogeneity Term $C_{\text{inh}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ als Funktion von $J_{\text{far}}^{\text{nl}}^{\text{el}}$ für unterschiedliche Abstände der Risssspitze zum Interface und für die Deformationstheorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$, [89]

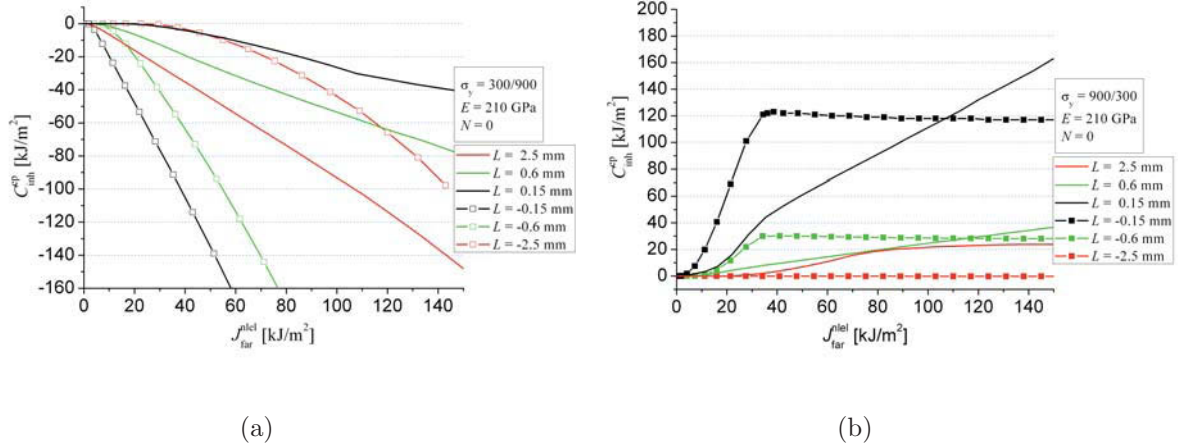


Abbildung 9.3: Material Inhomogeneity Term C_{inh}^{ep} als Funktion von J_{far}^{nl} für unterschiedliche Abstände der Rissspitze zum Interface und für die inkrementelle Theorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$

figurational Forces, die entlang der Knoten des Interfaces auftreten, berechnet wird. In diesen Knoten entstehen jedoch nicht nur Configurational Forces aufgrund der Materialinhomogenität, sondern auch Configurational Forces aufgrund der plastischen Verformung. Diese elastisch-plastischen Configurational Forces erhöhen den Material Inhomogeneity Term. Innerhalb einer Berechnung ist es nicht möglich, diese Kräfte (\mathbf{f}_Σ und \mathbf{f}^{ep}) voneinander zu trennen.

Betrachtet man zunächst den Fall $L < 0$ sieht man, dass C_{inh}^{ep} solange Null ist, solange die plastische Zone das Interface nicht berührt. Sobald die plastische Zone das Interface berührt, wird der Material Inhomogeneity Term bei einer Materialpaarung weich/hart negativ und fällt mit zunehmender Belastung stark ab. Dies tritt bei $L = -0.15$ mm natürlich früher ein als bei $L = -2.5$ mm. Betrachtet man dazu den Plasticity Influence Term in Abbildung 9.4(a), sieht man, dass dieser zunächst ebenfalls den Wert Null annimmt, bei zunehmender Belastung jedoch stark ansteigt.

Bei einer Materialpaarung hart/weich tritt der umgekehrte Vorgang ein; der Material Inhomogeneity Term ist positiv und nimmt bei steigender Belastung zu. Der Plasticity Influence Term ist negativ, sinkt für $L = -0.15$ mm und 0.6 mm bis $J_{far}^{nl} = 35$ kJ/m² ab und steigt danach leicht an (Abbildung 9.3(b) und 9.4(b)). Aus Abbildung 9.3(b) sieht man, dass C_{inh}^{ep} bei $L = -0.15$ mm und -0.3 mm nach einem starken Anstieg bei $J_{far}^{nl} = 35$ kJ/m² einen Sättigungswert erreicht. Dies geschieht, sobald die plastische Zone das gesamte zweite Material durchdringt. Für $L = -2.5$ mm bleibt C_{inh}^{ep} über die gesamte

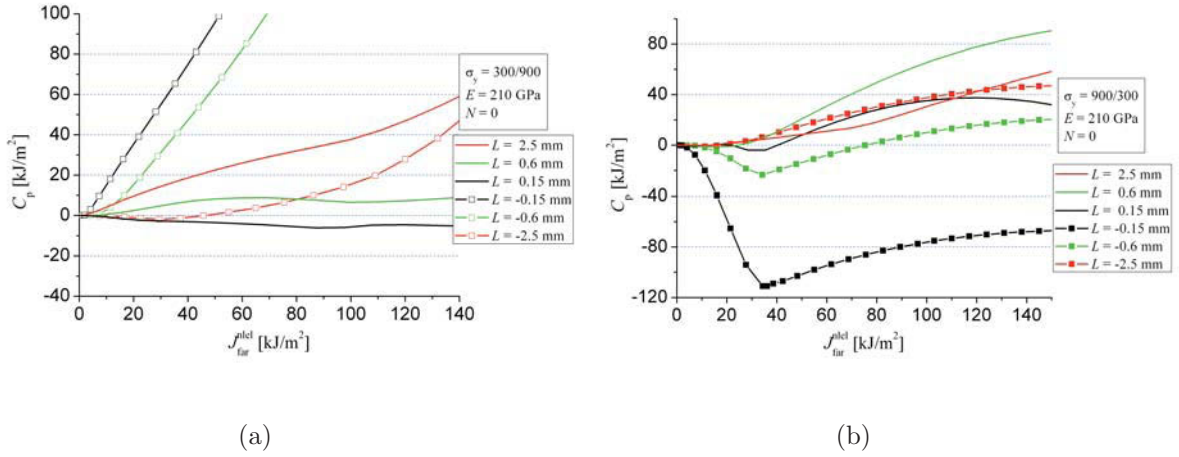


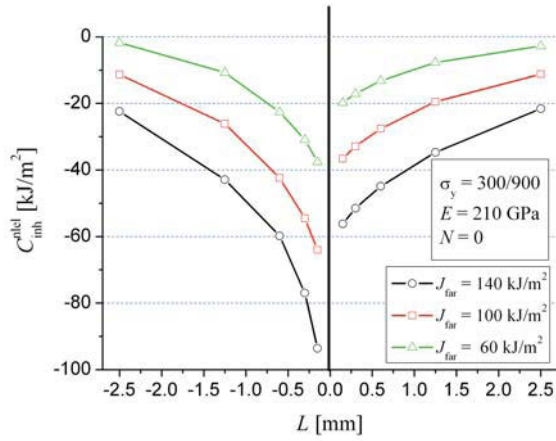
Abbildung 9.4: Plasticity Influence Term C_p als Funktion von $J_{\text{far}}^{\text{nl}}$ für unterschiedliche Abstände der Risspitze zum Interface und für die inkrementelle Theorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$

Belastung Null, da die plastische Zone das Interface nicht berührt.

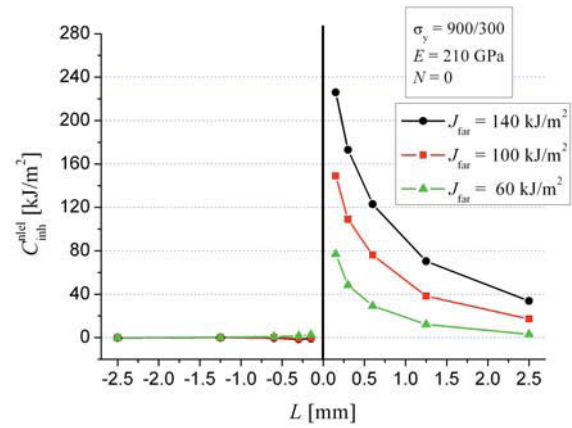
Für $L > 0$ verhalten sich die $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$ -Kurven bei einer Materialpaarung weich/hart (Abbildung 9.3(a)) ähnlich wie für $L < 0$. Zunächst ist der Material Inhomogeneity Term sehr klein, sinkt aber mit steigender Belastung stark ab. Bei einer Materialpaarung hart/weich steigt der $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$ -Wert nicht so stark an wie bei $L < 0$ und erreicht auch keinen Sättigungswert. In Abbildung 9.6 ist der Material Inhomogeneity Term als Funktion von L für unterschiedliche J_{far} -Werte und eine Materialpaarung weich/hart (Abbildung 9.6(a)) und hart/weich (Abbildung 9.6(b)) dargestellt. Zum Vergleich sind wiederum die Ergebnisse aus der Arbeit von Kolednik et al. [89] in Abbildung 9.5 dargestellt.

Stellt man die Ergebnisse gegenüber, sieht man, dass die Verläufe der Kurven wieder ähnlich sind. Im Fall einer Materialpaarung weich/hart nimmt der Material Inhomogeneity Term mit sinkendem Abstand zwischen Interface und Risspitze ab. Am Interface hat $C_{\text{inh}}^{\text{ep}}$ einen Sprung und strebt mit steigendem Abstand zwischen dem Interface und der Risspitze wieder auf Null zurück. Der nichtlinear-elastische Material Inhomogeneity Term verhält sich genauso, nur sind alle Werte um ein Vielfaches kleiner. Betrachtet man den Plasticity Influence Term als Funktion von L in Abbildung 9.7(a), sieht man, dass dieser mit kleiner werdendem Abstand zwischen Risspitze und Interface nur leicht ansteigt. Direkt am Interface besitzt auch C_p einen Sprung und strebt ebenfalls mit zunehmendem Abstand zwischen Risspitze und Interface auf Null.

Für eine Materialpaarung hart/weich sind die Kurven aus Abbildung 9.6(b) und 9.5(b)



(a)

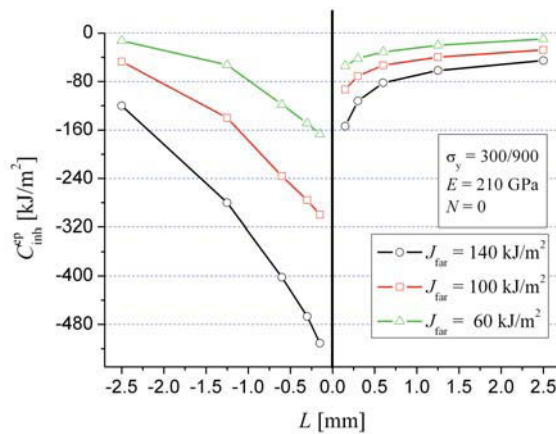


(b)

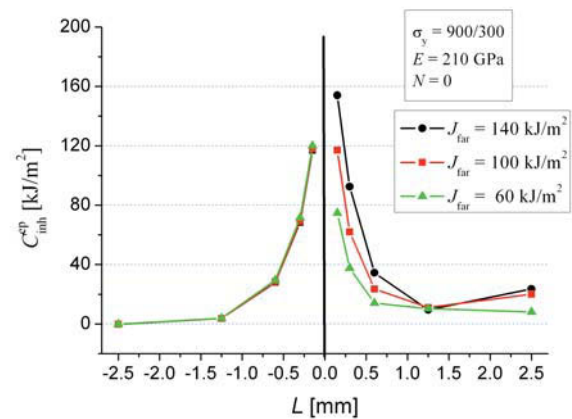
Abbildung 9.5: Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf den Material Inhomogeneity Term, berechnet mit Deformationstheorie für eine Materialpaarung a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$, [89].

ebenfalls ähnlich. Solange die Rissspitze im harten Material liegt, sind die Werte von C_{inh}^{ep} annähernd gleich groß wie die Werte von C_{inh}^{nl} . Befindet sich die Rissspitze im weicheren Material, liegen die C_{inh}^{ep} -Werte wieder über den C_{inh}^{nl} -Werten. Auch hier kann der Unterschied durch die plastische Verformung des Interfaces erklärt werden.

Die C_p -Werte sind im harten Material positiv und steigen bei kleiner werdendem L



(a)



(b)

Abbildung 9.6: Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf den Material Inhomogeneity Term berechnet mit inkrementeller Theorie für eine Materialpaarung a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$.

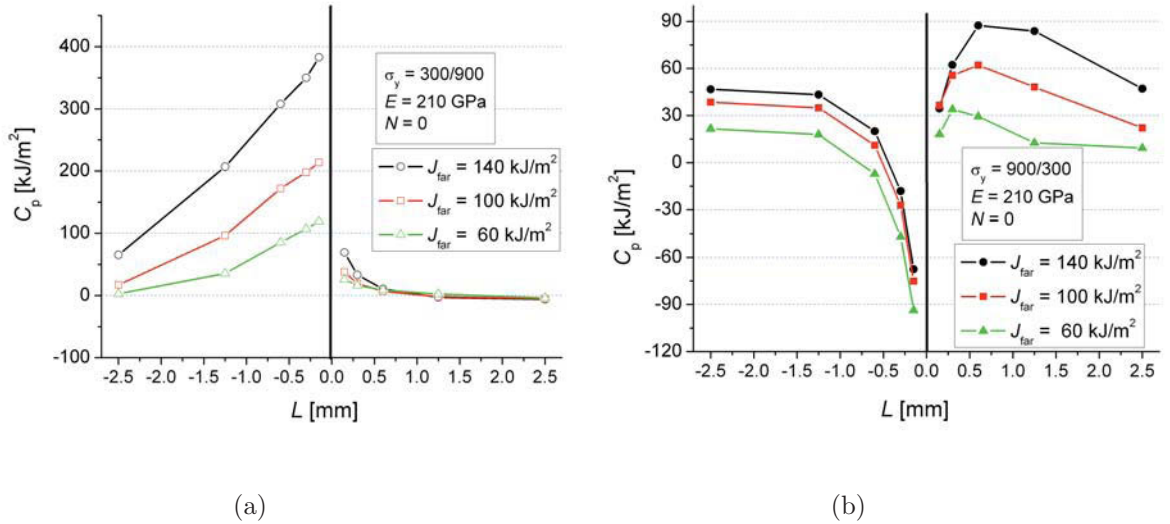


Abbildung 9.7: Einfluss des Abstandes zwischen Risspitze und Interface auf den Plasticity Influence Term C_p , berechnet mit inkrementeller Theorie für a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$.

zunächst an, fallen zwischen $L = 0.6$ mm und $L = 0.15$ mm jedoch wieder ab. Am Interface springt C_p zu hohen negativen Werten und steigt mit zunehmendem Abstand zwischen dem Interface und der Risspitze wieder an. Für $L < -0.6$ mm wird der Plasticity Influence Term wieder positiv.

In den Abbildungen 9.8 und 9.9 sind die J_{tip} -Werte als Funktion von L für unterschiedliche J_{far} -Werte aufgetragen. Dabei wurden die J_{tip}^{ep} -Werte über die Gleichung (9.3) und die J_{tip}^{lel} -Werte über die Gleichung (9.2) ermittelt.

Bei einer Materialpaarung weich/hart (Abbildung 9.8) nehmen die J_{tip} -Werte mit abnehmendem Abstand zwischen der Risspitze und dem Interface ab. Am Interface besitzt J_{tip} einen Sprung und mit zunehmenden Abstand steigt J_{tip} wieder an. Dabei liegen die J_{tip} -Werte immer unter den J_{far} -Werten. Der Material Inhomogeneity Term bewirkt bei einer Materialpaarung weich/hart einen Shielding Effekt, wenn der Riss vom weichen ins harte Material wächst. Dies wurde bereits in einigen Arbeiten [49–54] festgestellt. Vergleicht man die Abbildungen 9.8(a) und 9.8(b), sieht man, dass die J_{tip} -Werte sehr ähnlich sind. Es macht bei der Ermittlung von J_{tip} beinahe keinen Unterschied, ob die Configurational Forces im Material und am Interface mittels inkrementeller Plastizitätstheorie oder mittels Deformationstheorie berechnet werden, denn die Summe aus dem elastisch-plastischen Material Inhomogeneity Term und dem Plasticity Influence Term ergibt beinahe den nichtlinear-elastischen Material Inhomogeneity Term. In Abbildung 9.9 sind die

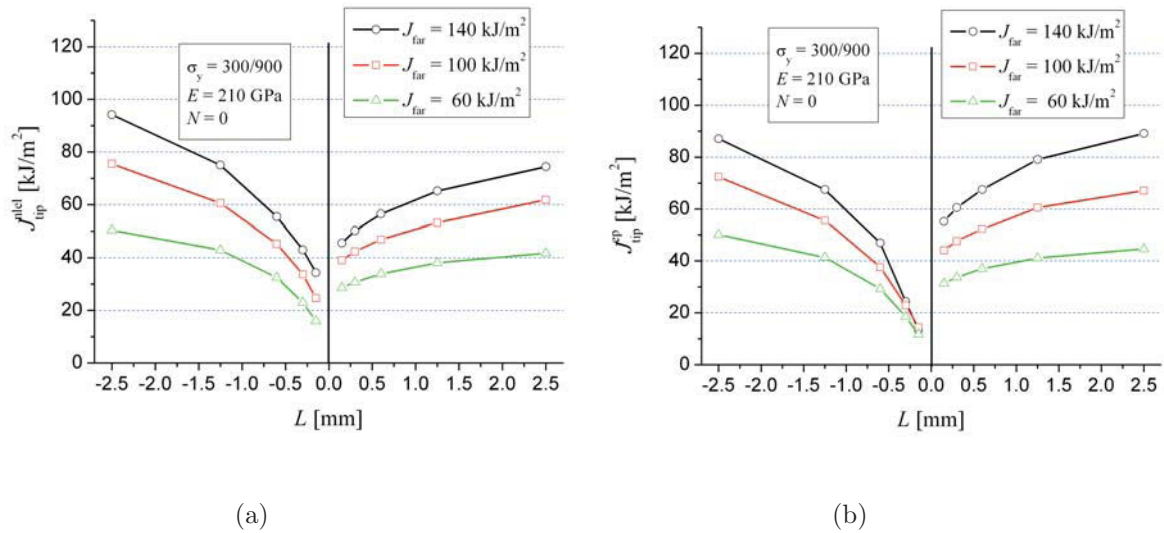


Abbildung 9.8: Einfluss des Abstandes zwischen Risssspitze und Interface auf die riss-treibende Kraft J_{tip} ; Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$; a) Deformations-theorie b) inkrementelle Theorie

J_{tip} -Werte für eine Materialpaarung hart/weich als Funktion von L für drei J_{far} -Werte aufgetragen. Die J_{tip} -Werte steigen mit abnehmendem Abstand zwischen Risssspitze und Interface stark an. Am Interface gibt es wieder einen Sprung, und danach bleiben die J_{tip} -Werte nahezu konstant. Eine Materialpaarung fest/hart bewirkt also, dass die risstreibende Kraft erhöht wird, der Material Inhomogeneity Term bewirkt einen Anti-shielding

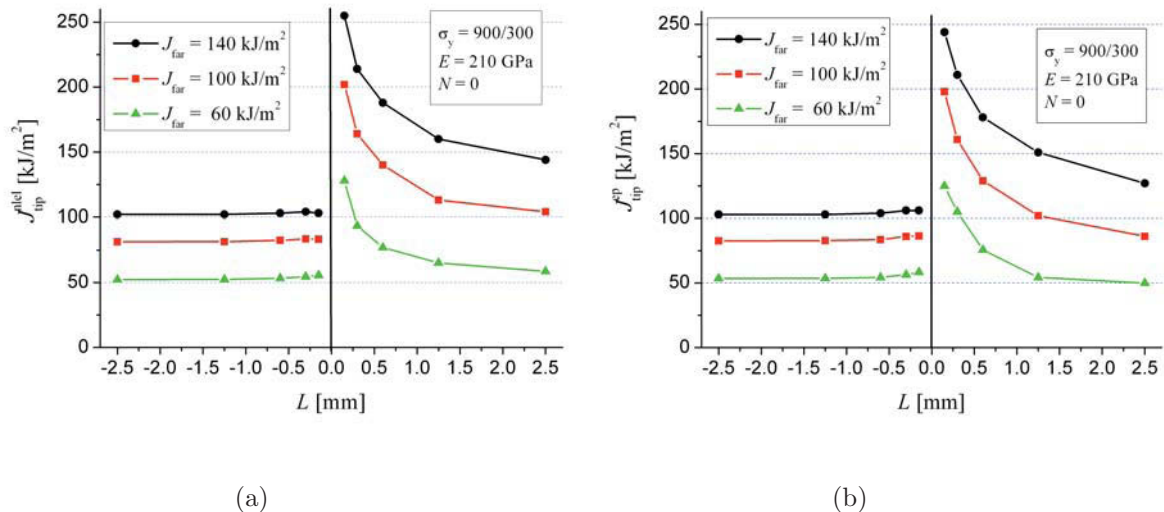


Abbildung 9.9: Einfluss des Abstandes zwischen Risssspitze und Interface auf die riss-treibende Kraft J_{tip} ; Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$; a) Deformations-theorie b) inkrementelle Theorie

Effekt [49–54]. Hier zeigt ein Vergleich der Abbildungen 9.9(a) und 9.9(b), dass es für die Größe der risstreibenden Kraft keinen Unterschied macht, ob man mittels inkrementeller Plastizitätstheorie oder mittels Deformationstheorie rechnet.

9.4 Diskussion der Ergebnisse

In vorhergehenden Arbeiten [49–54] wurde bereits gezeigt, dass die effektive risstreibende Kraft an der Rissspitze nicht mehr gleich groß ist, wie die treibende Kraft, welche in die Probe gesteckt wird. Bei einer Materialpaarung weich/hart entsteht durch einen Material Inhomogeneity Term ein Shielding Effekt, und J_{tip} ist kleiner als J_{far} . Handelt es sich hingegen um eine Materialpaarung hart/weich, bewirkt der Material Inhomogeneity Term einen Anti-shielding Effekt, und J_{tip} ist größer als J_{far} .

An diesen Ergebnissen ändert sich nichts, wenn die Configurational Forces mittels der inkrementellen Plastizitätstheorie bestimmt wird. Der Material Inhomogeneity Term ändert sich in der inkrementellen Plastizitätstheorie durch den Einfluss der plastischen Verformung. Der Unterschied zwischen dem elastisch-plastischen Material Inhomogeneity Term und dem nichtlinear-elastischen Material Inhomogeneity Term wird durch den Plasticity Influence Term beinahe aufgehoben.

Solange es keine Entlastungen im Material gibt, ist der $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ -Wert mit dem $J_{\text{tip}}^{\text{nlel}}$ -Wert in einem homogenen Material beinahe identisch. Der Plasticity Influence Term hat nur einen Einfluss auf $J_{\text{far}}^{\text{ep}}$. Dies trifft weitgehend auch bei einem inhomogenen Material zu. Der Anstieg bzw. Abfall von $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ in einem inhomogenen Material wird nur durch den Material Inhomogeneity Term verursacht.

Kapitel 10

Zusammenfassung der Ergebnisse

Bereits seit den Anfängen der elastisch-plastischen Bruchmechanik wird ein Parameter gesucht, der das Verhalten von Rissen in Bauteilen unter Einwirkung von Kräften beschreibt. Weiters ist es natürlich auch wichtig, dass dieser Parameter allgemein anwendbar ist. Mit dem J -Integral führte Rice [4] 1968 einen solchen Parameter ein. Das J -Integral wird heute standardmäßig verwendet um die risstreibende Kraft in Werkstoffen zu beschreiben, seine Anwendung ist jedoch mit starken Einschränkungen verbunden. Eine der wichtigsten Einschränkungen ist, dass das J -Integral nur für nichtlinear-elastische Materialien definiert ist und damit bei elastisch-plastischen Materialien nur angewendet werden darf, wenn das Materialverhalten über die Deformationstheorie der Plastizität beschrieben wird. Dies ist jedoch nur solange richtig, solange es zu keinen Entlastungen (z.B durch Risswachstum) kommt. Aber selbst dann beschreibt das J -Integral nicht mehr die risstreibende Kraft, sondern nur mehr die Intensität des Rissspitzenfeldes.

In der Arbeit von Simha et al. [17] wurde dieses Problem aufgegriffen, und die risstreibende Kraft, unter Verwendung des Configurational Force Concepts in elastisch-plastischen Materialien mit inkrementeller Plastizitätstheorie hergeleitet. Dabei wurde ein neues J -Integral, J^{ep} , gefunden, welches die risstreibende Kraft in elastisch-plastischen Materialien beschreibt. Dieses J -Integral beschreibt die risstreibende Kraft auch dann, wenn es zu Entlastungen im Material kommt, wie etwa bei Risswachstum oder bei zyklischer Belastung. Über die Eigenschaften von J^{ep} ist jedoch noch nicht viel bekannt.

In der vorliegenden Arbeit wurden einige Eigenschaften von J^{ep} betrachtet und die wesentlichen Unterschiede zum herkömmlichen J -Integral aufgezeigt. Dafür wurden numerische Studien an unterschiedlichen Proben mit verschiedenen Belastungsbedingungen durchgeführt. Zunächst wurde ein stationärer Riss in einem homogenen elastisch-plastischen

Material anhand einer C(T)-Probe untersucht. Die Verteilung der Configurational Forces in der C(T)-Probe wurde unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustandes und unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes für unterschiedlich hohe Belastungen betrachtet. Aus den Configurational Forces wurden J -Integrale für verschiedene Integrationsbereiche ermittelt. Dabei wurde zwischen der Deformationstheorie und der inkrementellen Theorie unterschieden.

Um die Größe der risstreibenden Kraft zu bestimmen, wurde mit großem numerischen Aufwand die Wegabhängigkeit von J^{ep} im Bereich nahe der Rissspitze bestimmt.

Als nächster Schritt wurde das Wachsen eines Risses simuliert, um die risstreibende Kraft für einen wachsenden Riss zu bestimmen. Auch in diesen Modellen wurden sowohl die Höhe der Belastung als auch die Elementgröße um die Rissspitze variiert.

Weitere wichtige Punkte der vorliegenden Arbeit waren die Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode-Belastung und die Berechnung der risstreibenden Kraft in einem inhomogenen elastisch-plastischen Material. Die wichtigsten Ergebnisse aus diesen Untersuchungen sind:

- Bei der Annäherung des Integrationspfades an die Rissspitze, sinkt die risstreibende Kraft, sowohl bei einem stationären Riss, als auch bei einem wachsenden Riss. Die Extrapolation auf die Rissspitze ergibt $J_{\text{tip}}^{\text{ep}} \cong 0$. Die numerischen Fehler bei der Berechnung von $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$ lassen jedoch keine eindeutige Aussage zu.
- Die Reduktion der risstreibenden Kraft sehr nahe an der Rissspitze beginnt bei einem wachsenden Riss sehr viel früher als bei einem stationären Riss.
- Hält man den Integrationsbereich konstant und lässt nur die Elementgröße an der Rissspitze gegen Null gehen, nehmen sowohl $J_{\text{tip}}^{\text{nel}}$ als auch $J_{\text{tip}}^{\text{ep}}$, im Falle eines stationären Risses, einen endlichen Wert an. Daraus kann man schließen, dass die risstreibende Kraft für eine stationären Riss in einem elastisch-plastischen Material größer als Null ist.
- Beim wachsenden Riss strebt $J_{\Gamma A}^{\text{ep}}$ gegen einen endlichen Wert, wenn der Integrationsbereich konstant bleibt und die Elementgröße gegen den Wert Null strebt. Die Größe dieses Wertes hängt davon ab, welcher Anteil von der aktuellen plastischen Zone vom Integrationspfad eingeschlossen wird. Schließt der Integrationspfad die gesamte aktuelle plastische Zone ein, entspricht $J_{\Gamma A}^{\text{ep}}$ für eine Elementgröße $m \rightarrow 0$ genau dem Risswiderstand.

- Die Configurational Forces innerhalb der plastischen Zone erklären auch die Wegabhängigkeit des J -Integrals in einem elastisch-plastischen Material bei Verwendung der inkrementeller Plastizitätstheorie. Wählt man einen symmetrischen Pfad, der durch die plastische Zone um die Risspitze verläuft und dessen Mittelpunkt nicht die Risspitze ist, heben sich die vom Integrationspfad eingeschlossenen Configurational Forces nicht mehr gegenseitig auf und das J -Integral wird wegabhängig.
- Berechnet man die Rissausbreitungsrichtung θ mittels Configurational Forces Concept in einem elastischen Material unter Mixed-Mode-Belastung, stimmt θ sehr gut mit der Rissausbreitungsrichtung, ermittelt mit dem Kriterium der max. Tangentialspannung, überein, solange der Mode II Anteil kleiner als der Mode I Anteil ist. Bei großem Mode II Anteil gibt es erhebliche Abweichungen. In einem elastisch-plastischen Material erhält man bereits bei einem kleinen Mode II Anteil große Abweichungen.
- Für die Vorhersage der Rissausbreitungsrichtung spielt es keine Rolle, ob die Configurational Forces in einem elastisch-plastischen Material mittels inkrementeller Plastizität oder Deformationsplastizität berechnet werden. In beiden Fällen sind die prognostizierten Rissausbreitungsrichtungen sehr ähnlich.
- Bei inhomogenen Materialien entsteht durch die Materialinhomogenität ein Material Inhomogeneity Term. Dieser ändert sich in der inkrementellen Plastizitätstheorie durch den Einfluss der plastischen Verformung. Zusätzlich zum Material Inhomogeneity Term tritt ein Plasticity Influence Term auf. Die Summe aus dem elastisch-plastischen Material Inhomogeneity Term und dem Plasticity Influence Term ergibt beinahe den nichtlinear-elastischen Material Inhomogeneity Term
- Bei stationären Rissen unter proportionaler Belastung ist der Unterschied zwischen J^p und J^{nel} sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Abschließend wird festgestellt, dass das elastisch-plastische J -Integral sehr gut geeignet ist, um den Einfluss der plastischen Verformung auf die risstreibende Kraft zu beschreiben. Anders als das herkömmliche J -Integral von Rice [4] beschreibt es die risstreibende Kraft in einem elastisch-plastischen Material auch dann, wenn es zu Entlastungen kommt, wie zum Beispiel beim Risswachstum. Das elastisch-plastische J -Integral stellt damit eine Verallgemeinerung des J -Integrals da.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Unterschiedliche Konfigurationen eines Körpers [25]	7
2.2	Materielle Linienelemente im Ausgangs- und Momentanzustand [25]	8
2.3	Schnittkräfte und Spannungsvektoren [25]	11
2.4	Fließbedingung nach von Mises und Tresca [22]	14
3.1	Definition der drei Rissöffnungsarten [28]	19
3.2	Spannungen in der Nähe der Rissspitze für ein elastisches Material [28]	20
3.3	Spannungsverteilung vor der Rissspitze für linear-elastisches (Kurve a) und elastisch-plastisches (Kurve b) Materialverhalten [28]	24
3.4	Risswiderstandskurve (R-Kurve) [28]	25
3.5	Kontur um eine Rissspitze [28]	28
3.6	Abhängigkeit der Spannungen vom Winkel θ , für $n = 3$ und $n = 13$; a) ESZ und b) EDZ [28]	29
3.7	Integrationspfad um die Rissspitze und Wichtungsfunktion q [29]	31
3.8	Virtuelle Rissverlängerung [37]	32
4.1	a) Ein 2D Körper \mathcal{B} mit einem Riss und einem Interface in der Referenzkon- figuration; b) Freikörperbild des Gebietes \mathcal{D} mit den klassischen Kräften; c) Freikörperbild des Gebietes \mathcal{D} mit den Configurational Forces [50]	37
4.2	Configurational Forces in den Elementknoten für a) ein lineares isoparame- trisches Element b) vier lineare isoparametrische Elemente	45
4.3	Ermittlung des J -Integrals über einen Bereich Γ_r mittels dem CFC	46
6.1	Abmessungen der verwendeten C(T)-Probe	52
6.2	Abmessungen des vereinfachten 2D-Modells der C(T)-Probe	53
6.3	Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurve eines S235	54
6.4	Plastische Zone um die Rissspitze für a) $v_{LL} = 0.1$ mm, b) $v_{LL} = 0.25$ mm und c) $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ.	55

6.5	Verschiedene Integrationspfade zur Bestimmung des J -Integrals	56
6.6	Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, Deformationsplastizität und EDZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite	57
6.7	a) Configurational Forces in der Umgebung der Rissspitze, b) Verteilung der Configurational Forces in den Elementen um die Rissspitze für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, Deformationsplastizität und EDZ	58
6.8	Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, inkrementelle Plastizität und EDZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite	59
6.9	Plastische Zone bei $v_{LL} = 0.25$ mm für a) EDZ und b) ESZ	60
6.10	Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, Deformationsplastizität und ESZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite	61
6.11	Configurational Forces an der Rissspitze und in der plastischen Zone für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm, inkrementelle Plastizität und ESZ. a) Detailaufnahme der Rissspitze, b) Configurational Forces im Rissspitzenbereich (ohne CF an der Rissspitze) und an der Probenrückseite	62
6.12	J^{vce} und J^{nlel} über v_{LL} für mehrere Integrationspfade; bei $m = 0.15$ mm und EDZ.	63
6.13	J^{vce} und J^{nlel} über v_{LL} für mehrere Integrationspfade; bei $m = 0.15$ mm und ESZ.	64
6.14	Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{LL} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	65
6.15	a) J^{nlel} und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ	65
6.16	Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	67

6.17 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ	67
6.18 Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ und EDZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	68
6.19 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ	69
6.20 Vergleich verschiedener J -Integrale bei zunehmender Belastung	70
6.21 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und EDZ	71
6.22 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Positionen des Integrationspfades Γ_{10} und EDZ	72
6.23 Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	73
6.24 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ	74
6.25 Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	75
6.26 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ	75
6.27 Configurational Forces in der plastischen Zone um die Rissspitze (ohne CF an der Rissspitze) für $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ und ESZ; für a) Deformationsplastizität und b) inkrementelle Plastizitätstheorie	76
6.28 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ	76
6.29 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Integrationspfade und ESZ	77
6.30 a) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und b) J^{ep} als Funktion von v_{LL} für unterschiedliche Positionen des Integrationspfades Γ_{10} und ESZ	78
6.31 J -Integrale für verschiedene Pfade bei $m = 1.5625$ μm und EDZ; a-b) J^{vce} , c-d) $J^{\text{nl}}_{\text{el}}$ und e-f) J^{ep}	80

6.32	J -Werte bei abnehmender Distanz zur Riss Spitze für a-b) J^{vce} , c-d) J^{nlel} und e-f) J^{ep} ; bei $v_{LL} = 0.5$ und EDZ	82
6.33	J -Werte bei abnehmender Elementgröße und gleich bleibender Distanz zur Riss Spitze; a) geometrisch linear b) geometrisch nichtlinear; für $v_{LL} = 0.5$ und EDZ	84
7.1	Plastische Vergleichsdehnung bei $v_{LL} = 0.25$ mm und EDZ; a) kurz vor dem Risswachstum, b) nach Rissverlängerung $\Delta a = 2.7$ mm	88
7.2	Steady State Risswachstum mit gesamter und aktueller plastischer Zone [28]	89
7.3	Verschiedene Integrationsbereiche zur Bestimmung des J -Integrals für $v_{LL} =$ 0.25 mm und EDZ; a) kurz vor dem Risswachstum, b) nach Rissverlängerung $\Delta a = 2.7$ mm	90
7.4	2D Risswachstumsmodell mit den Kontaktflächen und den gebundenen Knoten	91
7.5	Möglichkeiten für eine Risswachstumssimulation a) Kriterium der kriti- schen Spannung b) Kriterium des kritischen COD-Wertes c) Kriterium der Rissverlängerung pro Zeitinkrement, [38].	92
7.6	Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, EDZ bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm	94
7.7	Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, EDZ bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm	94
7.8	Materialpunkte zur Bestimmung der Configurational Forces in der plasti- schen Zone; für EDZ $v_{LL} = 0.25$ mm, $\Delta a = 2.7$ mm und $m = 0.15$ mm	96
7.9	Entwicklung der Configurational Forces und der Formänderungsenergie- dichte in den Punkten P_I und P_{II} ; a) Configurational Forces in x-Richtung, b) Configurational Forces in y-Richtung, c) Betrag der Configurational Force-Vektoren, d) Formänderungsenergie-dichte; $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ	97
7.10	Verteilung der nichtlinear-elastischen Configurational Forces in der plasti- schen Zone für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, ESZ und bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm	99
7.11	Verteilung der elastisch-plastischen Configurational Forces in der plasti- schen Zone für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm, ESZ und bei a) $\Delta a = 0$ und b) $\Delta a = 2.7$ mm	100

7.12	J_{tip} und J_{far} für a) $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, b) $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und c) $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und für EDZ	101
7.13	J_{tip} , J_{far} und $J_{\Gamma 14}$ für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	102
7.14	Elastisch-plastische Configurational Forces in der Umgebung der Rissspitze und der Pfad $\Gamma 14$ für eine Rissverlängerung von a) $\Delta a = 0$, b) $\Delta a = 0.9$ mm, c) $\Delta a = 1.95$ mm und d) $\Delta a = 2.1$ mm; für $m = 0.15$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und EDZ.	103
7.15	nichtlinear-elastische Configurational Forces in der Umgebung der Rissspitze und der Pfad $\Gamma 14$ für eine Rissverlängerung von a) $\Delta a = 0$, b) $\Delta a = 0.9$ mm, c) $\Delta a = 1.95$ mm und d) $\Delta a = 2.1$ mm; für $m = 0.15$ mm, $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm und den EDZ.	105
7.16	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	106
7.17	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	107
7.18	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	107
7.19	J -Integrale für ortsfeste Konturen und für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	109
7.20	J -Integrale um die AusgangsRissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.1$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	110
7.21	J -Integrale um die AusgangsRissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	110
7.22	J -Integrale um die AusgangsRissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{\text{LL}} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und EDZ.	111
7.23	Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma i \rightarrow 0$ bei $v_{\text{LL}} = 0.25$ mm, EDZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie . . .	113

7.24	Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma i = \text{konst.}$ bei $v_{LL} = 0.25$ mm, EDZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie	114
7.25	Netzabhängigkeit des J -Integrals und des Risswiderstands; für $v_{LL} = 0.25$ mm, EDZ und $\Delta a = 2.7$ mm	115
7.26	J_{tip} und J_{far} für a) $v_{LL} = 0.1$ mm, b) $v_{LL} = 0.25$ mm und c) $v_{LL} = 0.5$ mm; $m = 0.15$ mm und ESZ	117
7.27	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.1$ mm; $m = 0.15$ mm und ESZ.	118
7.28	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.	119
7.29	Verlauf der J -Integrale für verschiedene, mit der Rissspitze mitwandernde Konturen für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.5$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.	119
7.30	J -Integrale für ortsfeste Konturen und für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.	120
7.31	J -Integrale um die AusgangsRissspitze für verschiedene Konturen. Für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie; für $v_{LL} = 0.25$ mm, $m = 0.15$ mm und ESZ.	120
7.32	Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma i \rightarrow 0$ für $v_{LL} = 0.25$ mm, ESZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie	122
7.33	Netzabhängigkeit des J -Integrals für $\Gamma i = \text{konstant}$ für $v_{LL} = 0.25$ mm, ESZ und $\Delta a = 2.7$ mm für a) Deformationstheorie und b) inkrementelle Theorie	122
7.34	J^{ep} als Funktion des Abstandes zur Rissspitze für a) einen stationären Riss und b) einen wachsenden Riss.	124
7.35	J -Integrale des wachsenden Risses bei konstanten Integrationspfad und ab- nehmender Elementgröße; a) J^{nel} und b) J^{ep} ; für $v_{LL} = 0.25$ und EDZ	124
7.36	Mechanismus des Risswachstums in duktilen Werkstoffen [28]	125
8.1	Modell zur Bestimmung der Rissausbreitungsrichtung unter Mixed-Mode- Belastung	131

8.2	Tangentialspannung σ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	133
8.3	Scherspannungen τ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	134
8.4	Verteilung der Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	135
8.5	Rissausbreitungsrichtung als Funktion des Mixed-Mode-Parameters für verschiedene Kriterien in einem elastischen Material	136
8.6	Tangentialspannung σ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastisch-plastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	138
8.7	Scherspannungen τ_θ und Rissausbreitungsrichtung θ nach Gleichung (8.1) in einer elastisch-plastischen Probe für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	139
8.8	Verteilung der nichtlinear-elastische Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	140
8.9	Verteilung der elastische-plastischen Configurational Forces für a) $M = 0$ b) $M = 0.2$ c) $M = 0.4$ d) $M = 0.6$ e) $M = 0.8$ f) $M = 1$	141
8.10	Rissausbreitungsrichtung als Funktion des Mixed-Mode Parameters für verschiedene Kriterien in einem elastisch-plastischen Material	142
9.1	Abmessungen der C(T)-Probe und FE-Netz für ein inhomogenes Material .	147
9.2	Material Inhomogeneity Term C_{inh}^{nlel} als Funktion von J_{far}^{nlel} für unterschiedliche Abstände der Rissspitze zum Interface und für die Deformationstheorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$, [89] .	149
9.3	Material Inhomogeneity Term C_{inh}^{ep} als Funktion von J_{far}^{nlel} für unterschiedliche Abstände der Rissspitze zum Interface und für die inkrementelle Theorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$.	150
9.4	Plasticity Influence Term C_p als Funktion von J_{far}^{nlel} für unterschiedliche Abstände der Rissspitze zum Interface und für die inkrementelle Theorie; a) Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$, b) Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$. . .	151

9.5	Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf den Material Inhomogeneity Term, berechnet mit Deformationstheorie für eine Materialpaarung a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$, [89].	152
9.6	Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf den Material Inhomogeneity Term berechnet mit inkrementeller Theorie für eine Materialpaarung a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$	152
9.7	Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf den Plasticity Influence Term C_p , berechnet mit inkrementeller Theorie für a) $\sigma_Y = 300/900$ und b) $\sigma_Y = 900/300$	153
9.8	Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf die risstreibende Kraft J_{tip} ; Materialpaarung $\sigma_Y = 300/900$; a) Deformationstheorie b) inkrementelle Theorie	154
9.9	Einfluss des Abstandes zwischen Rissspitze und Interface auf die risstreibende Kraft J_{tip} ; Materialpaarung $\sigma_Y = 900/300$; a) Deformationstheorie b) inkrementelle Theorie	154

Tabellenverzeichnis

6.1	<i>J</i> -Werte für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm; EDZ	70
6.2	<i>J</i> -Werte für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm; ESZ	76
7.1	<i>J</i> -Werte vor und nach $\Delta a = 2.7$ mm Risswachstum für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm und EDZ	112
7.2	<i>J</i> -Werte vor und nach $\Delta a = 2.7$ mm Risswachstum für $v_{LL} = 0.1$ mm, $v_{LL} = 0.25$ mm und $v_{LL} = 0.5$ mm und ESZ	121

Literaturverzeichnis

- [1] Griffith, A.A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 221 (1921), 163–198
- [2] Irwin, G.R., Fracture Dynamics. *Fracture of Metals, ASME* (1948), 147–166
- [3] Wells, A.A., Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *Br. Weld. J.* 10 (1963), 563–570
- [4] Rice, J., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME J. Appl. Mech.* 35 (1968), 379–386
- [5] Turner, C.E., A re-assessment of the ductile tearing resistance, Part I and II. In: Firrao, D. (Edr.): *Fracture Behavior and Design of Materials and Structures, Proceedings of the ECF8, vol. II. EMAS, UK*, 1990
- [6] Turner, C.E., Kolednik, O., A micro and macro approach to energy dissipation rate model of stable ductile crack growth. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 17 (1990), 1089–1107
- [7] Kolednik, O., Stüwe, H.P., The stereophotogrammetric determination of the critical crack tip opening displacement. *Eng. Fract. Mech.* 21 (1985), 145–155
- [8] Kolednik, O., Shan, G.X., Fischer, F.D., The energy dissipation rate - a new tool to interpret geometry and size effects. *ASTM STP* 1296 (1997), 126–151
- [9] Kishimoto, K., Aoki, S., Sakata, M., Dynamic stress intensity factors using \hat{J} -integral and finite element method. *Eng. Fract. Mech.* 13 (1980), 387–394
- [10] Aoki, S., Kishimoto, K., Sakata, M., Energy flux into the process region in elastic-plastic fracture problems. *Eng. Fract. Mech.* 20 (1984), 827–836

- [11] Atluri, S.N., Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982), 341–364
- [12] Atluri, S.N., Nishioka, T., Nakagaki, M., Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 20 (1984), 209–244
- [13] Moran, B., Shih, C.F., Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Eng. Fract. Mech.* 27 (1987), 615–642
- [14] Carpenter, W.D., Read, D.T., Dodds, R.H., Comparison of several path independent integrals including plasticity effects. *Int. J. Fracture* 31 (1986), 303–323
- [15] Nishioka, W.T., Fujimoto, T., Atluri, S.N., On the path independent T^* integral in nonlinear and dynamic fracture mechanics. *Nucl. Eng. Design* 111 (1989), 109–121
- [16] Miyazaki, N., Nakagaki, M., Two-dimensional finite element analysis of stably growing cracks in inhomogeneous materials. *Int. J. Pres. Ves. Piping* 63 (1995), 249–260
- [17] Simha, N.K., Fischer, F.D., Shan, G.X., Chen, C.R., Kolednik, O., J-integral and Crack Driving Force in Elastic-Plastic Materials. *J. Mech. Phys. Solids* 56 (2008), 2876–2895
- [18] Eshelby, J.D., The Force on an Elastic Singularity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 244 (1951), 87–112
- [19] Eshelby, J.D., Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics. In: Kanninen, M., Adler, W., Rosenfield, A., Jaffee, R. (Eds.): *Inelastic Behavior of Solids*. New York : McGraw-Hill, 1970, 77–115
- [20] Parisch, H., *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden : Teubner, 2008
- [21] Becker, E., Bürger, W., *Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1975
- [22] Gross, D., Seelig, T., *Bruchmechanik*. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2007
- [23] Altenbach, J., Altenbach, H., *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1994

- [24] Fung, Y.C., Tong, P., *Classical and Computational Solid Mechanics*. Singapore : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001
- [25] Ulbricht, Volker, *Skript Kontinuumsmechanik*. Technische Universität Dresden, 2010. – http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/fakultaet_maschinenwesen/ifkm/nlfkm/lehre/kontinuumsmechanik
- [26] Hertzberg, R.W., *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. New York : Willy, 2003
- [27] Blumenauer, H., Pusch, G., *Technische Bruchmechanik*. Leipzig, Stuttgart : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [28] Anderson, T.L., *Fracture Mechanics*. Boca Raton : CRC Press, 2005
- [29] Kuna, M., *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [30] Parks, D.M., A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fracture* 10 (1974), 487–502
- [31] Parks, D.M., The virtual crack extension method for non-linear material behavior. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 12 (1977), 353–364
- [32] Stampfl, J., Scherer, S., Berchthaler, M., Gruber, M., Kolednik, O., Determination of the fracture toughness by automatic image processing. *Int. J. Fracture* 78 (1996), 35–44
- [33] Stampfl, J., Scherer, S., Gruber, M., Kolednik, O., Reconstruction of surface topographies by scanning electron microscopy for application in fracture research. *Appl. Phys.* A63 (1996), 341–346
- [34] Cherepanov, G., Rasprostranenie trechin v sploshnoi srede (About crack advance in the continuum). *PMM* 31 (1967), 478–488
- [35] Hutchinson, J.W., Singular Behavior at the End of Tensile Crack Tip in a Hardening Material. *J. Mech. Phys. Solids* 16 (1968), 13–31
- [36] Rice, J., Rosengren, G.F., Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material. *J. Mech. Phys. Solids* 16 (1968), 1–12

- [37] Brocks, W., Cornec, A., Scheider, I., Computational Aspects of Nonlinear Fracture Mechanics. In: Milne, I., Ritchie, R.O., Karihaloo, B. (Eds.): *Comprehensive Structural Integrity - Numerical and Computational Methodes* Bd. 3. Oxford : Elsevier, 2003, 127–209
- [38] Simulia, *Abaqus Documentation*. Dassault Systemes Simulia Austria GmbH, 2010. – http://www.simulia.com/products/abaqus_fea.html
- [39] DeLorenzi, H.G., On the energy release rate and the J-integral for 3D crack configurations. *Int. J. Fracture* 19 (1982), 183–193
- [40] Rice, J.R., The mechanics of quasi-static crack growth. In: Kelly, R.E. (Edr.): *Proceedings of the 8th U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME*, 1979, 191–216
- [41] Maugin, G.A., *The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors*. London : World Scientific Publishing, 1999
- [42] Gurtin, M.E., *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*. New York : Springer, 2000
- [43] Kienzler, R., Herrmann, G., *Konzepte der Bruchmechanik: integrale Bruchkriterien*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1993
- [44] Maugin, G.A., Trimarco, C., Pseudo-momentum and material forces in nonlinear elasticity: Variational formulation and application to brittle fracture. *Acta Mech.* 94 (1992), 1–28
- [45] Maugin, G.A., *Material Inhomogeneities in Elasticity*. London : Chapman and Hall, 1993
- [46] Maugin, G.A., Material forces: Concepts and applications. *ASME Appl. Mech. Rev.* 48 (1995), 213–245
- [47] Gurtin, M.E., The nature of configurational forces. *Arch. Rational Mech. Anal.* 131 (1995), 67–100
- [48] Gurtin, M.E., Podio-Guidugli, P., Configurational forces and the basic laws for crack propagation. *J. Mech. Phys. Solids* 44 (1996), 905–927

- [49] Simha, N.K., Fischer, F.D., Kolednik, O., Chen, C.R., Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic-plastic materials. *J. Mech. Phys. Solids* 51 (2003), 209–240
- [50] Simha, N.K., Fischer, F.D., Kolednik, O., Predan, J., Shan, G.X., Crack tip shielding or anti-shielding due to smooth and discontinuous material inhomogeneities. *Int. J. Fracture* 135 (2005), 73–93
- [51] Predan, J., Gubelj, N., Kolednik, O., On the local variation of the crack driving force in a mismatched weld. *Eng. Fract. Mech.* 74 (2007), 1739–1757
- [52] Fischer, F.D., Predan, J., Kolednik, O., Simha, N.K., Application of material forces to fracture of inhomogeneous materials: illustrative examples. *Arch. Appl. Mech.* 77 (2007), 95–112
- [53] Kolednik, O., Predan, J., Shan, G.X., Simha, N.K., Fischer, F.D., On the fracture behavior of inhomogeneous materials - A case study for elastically inhomogeneous bimetals. *Int. J. Solids Struct.* 42 (2005), 605–620
- [54] Kolednik, O., Predan, J., Gubelj, N., Fischer, F.D., Modeling fatigue crack growth in a bimaterial specimen with the configurational forces concept. *Mater. Sci. Eng. A* 519 (2009), 172–183
- [55] Kolednik, O., Predan, J., Schöngründner, R., Fischer, F.D., The configurational forces concept - a new tool for the design of damage resistant materials. In: El-boujdaini, M. (Edr.): *Proceedings of the 12th International Conference on Fracture (ICF12) Paper T06.030. NRCAN-CANMET*, 2010, 1–10
- [56] Maugin, G.A., Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture. *Int. J. Plasticity* 10 (1994), 393–408
- [57] Shan, G.X., Post-Processing program for calculating the configurational force with ABAQUS. *Internal Report Institute of Mechanics* (2005), 1–10
- [58] Mueller, R., Maugin, G.A., On material forces and finite element discretizations. *Comp. Mech.* 33 (2002), 421–434
- [59] Mueller, R., Kolling, S., Gross, D., On configurational force in the context of the finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 53 (2004), 1557–1574

- [60] Mueller, R., Gross, D., Maugin, G.A., Use of material forces in adaptive finite element methods. *Comp. Mech.* 29 (2004), 52–60
- [61] Denzer, R., Barth, F.J., Steinmann, P., Studies in elastic fracture mechanics based on the material force method. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 58 (2003), 1817–1835
- [62] McMeeking, R.M., Path Dependence of the J-Integral and the Role of J as a Parameter Characterizing the Near-Tip Field. In: ASTM (Edr.): *Proceedings of Flaw Growth and Fracture (10th Conf.) ASTM STP 631*, 1977, 28–41
- [63] McMeeking, R.M., Parks, D.M., On Criteria for J -Dominance of Crack-Tip Field In Large-Scale Yielding. In: ASTM (Edr.): *Proceedings of Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668*, 1979, 175–194
- [64] Standard Test Method For Measurement of Fracture Toughness. *ASTM E1820-96*
- [65] Rice, J., Tracey, D.M., On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids* 17 (1969), 201–217
- [66] Schöngrundner, R., Kolednik, O., Fischer, F.D., The configurational force concept in elastic-plastic fracture mechanics - instructive examples. *Key Engng. Mater.* 417-418 (2010), 297–300
- [67] Kolednik, O., On the physical meaning of the $J - \delta a$ -curves. *Eng. Fract. Mech.* 38 (1991), 403–412
- [68] Brust, F., Nishioka, W.T., Atluri, S.N., Nakagaki, M., Further studies on elastic-plastic stable fracture utilizing the T^* integral. *Eng. Fract. Mech.* 22 (1985), 1079–1103
- [69] Chen, J.H., Wang, G.Z., Study on cleavage fracture criteria of the quasi-brittle and micro-inhomogeneous materials. *Int. J. Fracture* 108 (2001), 143–164
- [70] Erdogan, F., Sih, G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *AMSE J. Bas. Engng* 85 (1963), 519–525
- [71] Sih, G.C., Some basic problems in fracture mechanics and new concepts. *Eng. Fract. Mech.* 5 (1973), 365–377
- [72] Nuismer, R.J., An energy release rate criterion for „Mixed Mode“ fracture. *Int. J. Fracture* 11 (1975), 245–251

- [73] Ma, F., Deng, X., Sutton, M.A., Newmann, J.C.Jr., A CTOD-Based Mixed-Mode fracture criterion. In: Miller, K.J., McDowell, D.L. (Eds.): *Mixed Mode Crack Behavior*. Philadelphia : ASTM STP 1359, 1999, 86–110
- [74] Sutton, M.A., Zhao, W., Deng, X., Dawicke, D.S., Newmann, J.C.Jr., Numerical Investigations Into the Viability of CTOD as a Fracture Parameter for Mixed-Mode I/II Tearing of Thin Aluminum Sheets. In: *Proceedings of the FAA-NASA Symposium on Continued Airworthiness of Aircraft Structures*, 1996, 461–472
- [75] Sutton, M.A., Deng, X., Ma, F., Newmann, J.C.Jr., James, M., Development and application of a crack tip opening displacement-based „Mixed Mode“ fracture criterion. *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000), 3591–3618
- [76] Hellen, T.K., Blackburn, W.S., The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading. *Int. J. Fracture* 11 (1975), 605–617
- [77] Richard, H.A., *Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung sowie reiner Schubbelastung von Rissen.*, Universität Kaiserslautern, Habilitationsschrift, 1984
- [78] Barsoum, I.S., „Mixed Mode“ Ductile Fracture: a literature review. 2003. – http://www.hallf.kth.se/~imad/imad_lit_study.pdf
- [79] Quian, J., Fatemi, A., „Mixed Mode“ fatigue crack growth: a literature survey. *Eng. Fract. Mech.* 55 (1996), 969–990
- [80] Bold, P.E., Brown, M.W., R.J, Allen, A review of fatigue crack growth in steels under „Mixed Mode“ I and II loading. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 15 (1996), 965–977
- [81] Onsager, L., Reciprocal relations in irreversible processes. *Phys. Rev.* 37 (1931), 405–426
- [82] Svoboda, J., Turek, I., Fischer, F.D., Application of the thermodynamic extremal principle to modeling of thermodynamic processes in material sciences. *Philos. Mag.* 85 (1931), 3699–3707
- [83] Maccagno, T.M., Knott, J.F., The low temperature brittle fracture behaviour of steel in „Mixed Mode“ I and II. *Eng. Fract. Mech.* 38 (1991), 111–128

- [84] Maccagno, T.M., Knott, J.F., The „Mixed Mode“ I/II fracture behaviour of lightly tempered HY130 steel at room temperature. *Eng. Fract. Mech.* 41 (1992), 805–820
- [85] Schütte, H., Curved crack propagation based on configurational forces. *Comput. Mat. Sc.* 46 (2009), 642–646
- [86] Chao, Y.J., Shu, L., On the failure of cracks under mixed-mode loads. *Int. J. Fracture* 87 (1997), 201–223
- [87] Kolednik, O., Predan, J., Fischer, F.D., Cracks in inhomogeneous materials: Comprehensive assessment using the configurational forces concept. *Eng. Fract. Mech.* 77 (2010), 2698–2711
- [88] Doquet, V., Bertolino, G., A material and environment-dependent criterion for the prediction of fatigue crack paths in metallic structures. *Eng. Fract. Mech.* 75 (2008), 3399–3412
- [89] Kolednik, O., Predan, J., Shan, G.X., Simha, N.K., Fischer, F.D., Crack-tip shielding and anti-shielding by a bimaterial interface. In: *Proceedings of the 15th European Conference on Fracture, Advanced Fracture Mechanics for Life and Safety Assessments.*, 2004, 1–8