Familien relativer Thue-Gleichungen über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

Dissertation[1]

Dipl.-Ing. Catrin Lampl

Betreuer:

O.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Peter Kirschenhofer

unter Mitwirkung von

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Jörg Thuswaldner

Lehrstuhl für Mathematik und Statistik
Department Mathematik und Informationstechnologie
Montanuniversität Leoben

[1]Diese Arbeit wurde teilweise durch das Projekt S8310 des FWF unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Das Lösen von Gleichungen beschäftigt die Menschen schon seit Jahrhunderten. Eine besondere Rolle spielen dabei Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen, solche Gleichungen heißen **diophantische Gleichungen** nach Diophantos von Alexandria (ca. 250 n. Chr.).
Als bekannteste Beispiele aus der Vergangenheit seien an dieser Stelle die Gleichungen $a^2 + b^2 = c^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (“Pythagoräische Tripel” nach Pythagoras von Samos, 6. Jh. v. Chr.) sowie $a^n + b^n = c^n$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \geq 3$ (“Großes Fermatsches Problem” nach Pierre de Fermat, ca. 1637) genannt. Dabei ist die Behandlung des Falles $n = 2$ recht einfach, während für $n \geq 3$ erst 1995 bewiesen werden konnte, dass es keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung gibt. (vgl. A. Wiles [21]).
In der heutigen Zeit finden diophantische Gleichungen eine wichtige Anwendung auf dem Gebiet der Kryptographie, wo es darum geht, “sicher” Daten (z.B. Kontoinformationen beim Online-Banking) auszutauschen. Dazu verwendet man, neben den klassischen Verfahren, die auf dem Faktorisieren großer ganzer Zahlen und dem Satz von Euler-Fermat beruhen, heute hauptsächlich die Punktgruppe von *elliptischen Kurven* über endlichen Körpern $\mathbb{F}_q$. Eine elliptische Kurve lässt sich mithilfe der folgenden Weierstraß-Gleichung darstellen:

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

mit $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{F}_q$. (Die Lösungen dieser Gleichung $(x, y, z) \in \mathbb{F}_q^3$ sind genau die Punkte auf der elliptischen Kurve.) Auf diese elliptischen Kurven können dann die klassischen Methoden (z.B. der Diffie-Hellman-Schlüsseltausch) übertragen werden (siehe [20]).
Eines der berühmten 23 ungelösten Probleme, die 1900 von D. Hilbert auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris gestellt wurden, behandelt die Frage, ob es einen Algorithmus gibt, der jede beliebige diophantische Gleichung löst. Diese Frage wurde von Matijasevic 1970 in [9] negativ beantwortet, so dass man sich nun darauf beschränkt, einzelne Klassen von Gleichungen zu lösen.

A. Thue betrachtete um 1909 die spezielle Klasse von diophantischen Gleichungen von der Form

$$F(x, y) = m$$

wobei F ein irreduzibles, homogenes Polynom mit Grad $n \geq 3$ und $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist. Er konnte beweisen (siehe [19]), dass solche Gleichungen, die seither als **Thue-Gleichungen** bezeichnet werden, höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzen. Dieser Beweis ist jedoch nicht

konstruktiv, das heißt, die Lösungen ergeben sich nicht explizit aus dem Beweis, sodass sich daraus auch kein Lösungsalgorithmus herleiten lässt.
C. L. Siegel konnte 1929 in [17] einen Algorithmus angeben, der entscheiden kann, ob die Gleichung $F(x, y) = 0$ mit beliebigem F endlich oder unendlich viele Lösungen besitzt. Dieser Algorithmus lässt sich allerdings ebensowenig dazu verwenden, konkrete Lösungen zu berechnen.
E. Thomas studierte 1990 in [18] zum ersten Mal eine **parametrisierte Familie von kubischen Thue-Gleichungen mit positiver Diskriminante**. Seither wurden zahlreiche spezielle parametrisierte Familien behandelt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Familien von Thue-Gleichungen über imaginär-quadratischen Zahlkörpern (sogenannten **relativen Thue-Gleichungen**) der folgenden Form.

Für quadratfreies $D \in \mathbb{N}$ sei $k := \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $\mathbb{Z}_k$ der zugehörige Ganzheitsring. Betrachtet wird die Familie von Gleichungen

$$F_t(x, y) := x^3 - (t-1)x^2y - (t+2)xy^2 - y^3 = \ell \tag{1.1}$$

mit $t, \ell \in \mathbb{Z}_k$, $t \notin \mathbb{Z}$ und $|\ell| \leq |2t+1|$. Man ist daran interessiert, alle Paare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{Z}_k$ zu finden, die diese Gleichung erfüllen.

Heuberger, Pethő und Tichy behandelten in [1], [2], [3] und [4] den Fall $|\ell| = 1$ von (1.1).

In Fall $k = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}$ haben Thomas [18] und Mignotte [10] die Gleichungen

$$F_t(x, y) = \pm 1$$

komplett gelöst, wohingegen die diophantischen Ungleichungen

$$|F_t(x, y)| \leq 2t + 1$$

von Mignotte, Pethő und Lemmermeyer in [11] behandelt wurden.

Sei

$$f_t(x) := F_t(x, 1) = x^3 - (t-1)x^2 - (t+2)x - 1$$

und $\alpha = \alpha^{(1)}$ eine Nullstelle von f_t. Da $f_t\left(-1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{f_t(x)}{x^3}$ gilt, sind die anderen Nullstellen von f_t durch

$$\alpha^{(2)} = -1 - \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha^{(3)} = -\frac{1}{\alpha + 1}. \tag{1.2}$$

gegeben.

Sei $\tilde{m} = t^2 + t + 7$, dann ist $\tilde{m}^2$ die Diskriminante von f_t. Weiters sei

$$b := \begin{cases} \frac{1+i\sqrt{D}}{2} & \text{falls } D \equiv 3(4) \\ i\sqrt{D} & \text{falls } D \not\equiv 3(4). \end{cases}$$

Sei $k(\alpha)$ die kubische Erweiterung von k, die von der Nullstelle α des Polynoms $f_t(x)$ erzeugt wird. Diese Erweiterungen stellen im Fall $k = \mathbb{Q}$ die einfachsten kubischen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ dar und werden nach Shanks bezeichnet, der solche Körper in [16] untersuchte.

Sei $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ eine Lösung der Thue-Gleichung (1.1). Mit der Bezeichnungsweise $N_{k(\alpha)/k}(\gamma)$ für die relative Norm von γ über k gilt

$$N_{k(\alpha)/k}(x - \alpha y) = F_t(x, y) = \ell. \tag{1.3}$$

Deshalb ist das Lösen der Thue-Gleichung (1.1) für $|\ell| \leq |2t+1|$ äquivalent dazu, alle Elemente $\gamma = x - \alpha y$ deren Norm betragsmäßig durch $|2t+1|$ beschränkt ist, zu berechnen.

Aus diesem Grund ist die vorliegende Arbeit in zwei große Teile unterteilt. In Teil 1 (Kapitel 2) werden alle Elemente mit kleiner Norm berechnet und anschließend werden diese Elemente in Teil 2 (Kapitel 3 und 4) dazu verwendet, um alle Lösungen der Thue-Gleichung mit $\Re t = -\frac{1}{2}$ zu berechnen.

In Kapitel 2 wird das Ergebnis der Arbeit von Kirschenhofer und Thuswaldner [6], in welcher alle Elemente $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$, deren Norm die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ für $|t| \geq 14$ erfüllt, berechnet werden, auf alle t ausgeweitet (vgl. Satz 2.15 für alle t und Korollar 2.18 für alle t mit $\Re t = -\frac{1}{2}$). Es wird bewiesen, dass die Bedingung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ impliziert, dass γ entweder zu einem Element aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist oder

$$\gamma = \mu\beta\alpha^{b_1}(\alpha+1)^{b_2} \tag{1.4}$$

gilt, mit einer Einheit μ von $\mathbb{Z}_k$, $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ und einem β, welches nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann (siehe Satz 2.15 und Korollar 2.18).

In Kapitel 3 wird eine obere Schranke für

$$\Lambda_j = \log\left|\frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j+2)}}\right| - \log\left|\frac{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+1)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+2)}}\right|$$

berechnet, wobei $j \in \{1,2,3\}$ so festgelegt ist, dass

$$|\gamma^{(j)}| = \min_{l\in\{1,2,3\}} |\gamma^{(l)}| = \min_{l\in\{1,2,3\}} |x - \alpha^{(l)}y|$$

gilt. Dann werden alle Elemente, die in Kapitel 2 als Elemente mit Norm $\leq |2t+1|$ identifiziert wurden, in diese obere Schranke eingesetzt und mithilfe einer unteren Schranke für $|\Lambda_j|$ gezeigt, dass es, wenn $\Lambda_j \neq 0$ gilt, keine Lösungen $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ der Thue-Gleichung (1.1) mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} \bullet\ |y| \geq 4 \text{ (für } |t| \geq 6) \text{ bzw. } |y| \geq 7 \text{ (für } |t| < 6), \\ \bullet\ x \notin \{0, -y, ty\} \text{ und} \\ \bullet\ \gamma = x - \alpha y \text{ ist nicht zu einer Zahl aus } \mathbb{Z}_k \text{ assoziiert} \end{cases}$$

gibt.

In Kapitel 4 werden all jene $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ untersucht, die die obigen Eigenschaften nicht erfüllen. In diesen Fällen ergeben sich dann Lösungen der Thue-Gleichung (1.1). Weiters wird der Spezialfall $\Lambda_j = 0$ behandelt. Dazu betrachtet man

$$\gamma = \gamma_m = x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2$$

mit $x_i(m) \in \mathbb{Z}_k$ und $m \in \mathbb{Z}$. γ_m liefert genau dann eine Lösung (x,y) der Thue-Gleichung (1.1), wenn $x_3(m) = 0$ gilt. Mithilfe einer Rekursion für $x_3(m)$ lassen sich Lösungen $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ der Thue-Gleichung (1.1) finden. Alle Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) für $\Re t = -\frac{1}{2}$ werden in Satz 4.4 aufgelistet.

Anhang A enthält sämtliche `Mathematica`®-Programme, die zur Berechnung aller Elemente mit kleiner Norm sowie zum Lösen der Thue-Gleichung benötigt wurden.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurden in [7] veröffentlicht bzw. beim 16. Internationalen Kongress der ÖMG (Klagenfurt, 2005) sowie bei CANT (Conference on Combinatorics, Automata and Number Theory) (Liège, Belgien, 2006) vorgestellt.

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei Prof. Kirschenhofer für die umsichtige Betreuung meiner Dissertation bedanken. Mein besonderer Dank gilt Jörg Thuswaldner für seine große Hilfe, sowie Oliver Pfeiffer, mit dem ich mich zu jeder Tages- und Nachtzeit über Mathematik unterhalten kann.

Catrin Lampl

Leoben, März 2007

Kapitel 2

Elemente mit kleiner Norm in $\mathbb{Z}_k(\alpha)$

2.1 Einleitung

Das Lösen der Thue-Gleichung (1.1) ist äquivalent zum Berechnen aller Elemente mit einer Norm kleiner oder gleich $|2t+1|$, wie bereits im vorigen Kapitel gezeigt wurde. Daher wird nun hier das Resultat aus [6] ausgeweitet, um alle Elemente mit kleiner Norm zu berechnen. Mithilfe dieser Elemente lässt sich dann die Menge aller möglichen rechten Seiten ℓ der Thue-Gleichung (1.1) einschränken.

In [6] wurde für $|t| \geq 14$ gezeigt, dass die Bedingung

$$|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$$

impliziert, dass γ entweder zu einer ganzen Zahl in $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist oder dass

$$\gamma = \mu' \beta \alpha^{b_1'} (\alpha^{(2)})^{b_2'} \tag{2.1}$$

gilt, wobei μ' eine Einheit in $\mathbb{Z}_k$ bezeichnet, $b_1', b_2' \in \mathbb{Z}$ sind und β nur endlich viele Werte annehmen kann, die in [6, Satz 1.1] aufgelistet sind.

Wegen (1.2) lässt sich dann γ auch in der Form

$$\gamma = \mu \beta \alpha^{b_1} (\alpha + 1)^{b_2} \tag{2.2}$$

schreiben.

In diesem Kapitel wird eine Modifizierung und Verschärfung der Methoden von [6] entwickelt, um ein dem dortigen Satz 1.1 entsprechendes Resultat für alle t gewinnen zu können.

Zuerst werden einige Beziehungen zwischen den Nullstellen $\alpha, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ und dem Parameter t zusammengestellt. Anschließend wird gezeigt, dass man sich bei der Berechnung aller Elemente γ, die die Normungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ erfüllen, auf Elemente mit kleinen Konjugierten beschränken kann. Diese Elemente werden dann berechnet und in Abschnitt 2.5 zusammengefasst.

In jedem Abschnitt wird zuerst der Fall $|t| \geq 6$ und anschließend der Fall $|t| < 6$ behandelt. Diese Aufteilung ergibt sich dadurch, dass gewisse Methoden, die für betragsmäßig große t funktionieren, für kleine t nicht geeignet sind.

2.2 Aussagen über α in Bezug auf t

Hier werden einige Beziehungen zwischen den Nullstellen $\alpha, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ des Polynoms $f_t(x) = x^3-(t-1)x^2-(t+2)x-1$ und dem Parameter t von f_t aufgelistet. Diese Beziehungen werden bei der Berechnung der Elemente mit kleiner Norm zur Anwendung kommen. Dabei benötigt man die folgende Notation.

Definition 2.1 *Für zwei Funktionen g und h und eine positive Zahl x_0 schreiben wir $g(x) = L_{x_0}(h(|x|))$, falls $|g(x)| \leq h(|x|)$ für alle x mit $|x| > x_0$ gilt.*

Diese Notation wird bei der nun folgenden Berechnung der Entwicklungen von $\alpha, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ nach Potenzen von t verwendet.

Lemma 2.2 *(vgl. [6, Lemma 3.1]) Sei $t \in \mathbb{C}$. Dann existiert eine Nullstelle α von f_t, sodass für $|t| \geq 6$ folgende Entwicklungen nach Potenzen von t gelten.*

$$\begin{aligned} \alpha &= t + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t^3} + L_6\left(\frac{4.6}{|t|^{7/2}}\right), \\ \alpha^{(2)} &= -1 - \frac{1}{\alpha} = -1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^3} + L_6\left(\frac{1.5}{|t|^{7/2}}\right), \\ \alpha^{(3)} &= -\frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + L_6\left(\frac{2}{|t|^{7/2}}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Beweis Diese Abschätzungen können durch den Satz von Rouché auf die gleiche Art wie in [1, Lemma 4] gezeigt werden. □

Man kann nun mithilfe der Entwicklungen aus Lemma 2.2 die folgenden Lemmata beweisen. Dabei betrachtet man auch den Spezialfall $\Re t = -\frac{1}{2}$.

Lemma 2.3 *(vgl. [1, Lemma 8]) Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ und $|t| \geq 6$ gilt*

$$\bar{\alpha} = -1 - \alpha \Longleftrightarrow \Re\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Lemma 2.4 *(vgl. [1, Abschnitt 7]) Ist $\Re t = -\frac{1}{2}$, so gilt $|\alpha + 1| = |\alpha|$.*

Lemma 2.5 *(vgl. [6, Lemma 3.2]) Für $|t| \geq 6$ gilt*

$$|\alpha| > \max(1, |\alpha^{(2)}|, |\alpha^{(3)}|)$$

und

$$\Re t \leq -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \Re\alpha \leq -\frac{1}{2}.$$

Bemerkung 2.6 *Ist $|t| < 6$, so gelten die Entwicklungen für $\alpha, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ aus (2.3) nicht mehr. In diesem Fall betrachtet man daher alle t extra und berechnet jeweils die exakten zugehörigen Nullstellen. Die Nullstelle mit dem größten Betrag wird dann als α bezeichnet, $\alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ hängen über (1.2) mit α zusammen. Im Spezialfall $\Re t = -\frac{1}{2}$ ermittelt man ebenfalls die exakten Nullstellen. Hier gibt es genau eine Nullstelle α mit $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$. Diese Nullstelle wird dann mit α bezeichnet.*

2.3 Einschränkung auf Elemente mit kleinen Konjugierten

Will man alle $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$ ermitteln, die die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ erfüllen, so müssen unendlich viele Werte betrachtet werden. Man kann nun zeigen, dass es Elemente $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\gamma = \beta\alpha^{a_1}(\alpha^{(2)})^{a_2}$ gilt und für β und seine Konjugierten gewisse Schranken gültig sind. Dies hat den Vorteil, dass man sich bei der Berechnung der Elemente, welche die Normungleichung erfüllen, auf jene endlich vielen Elemente mit kleinen Konjugierten beschränken kann.

Um diese Vorgangsweise durchführen zu können, wird ein ähnliches Resultat wie in [11, Lemma 3] für imaginär-quadratische Zahlkörper benötigt.

Lemma 2.7 *(vgl. [6, Lemma 4.1]) Sei $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha] \setminus \{0\}$ und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ positive Konstanten. Ist $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und $|t| \geq 6$, so existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$, sodass*

$$\gamma = \beta\alpha^{a_1}(\alpha^{(2)})^{a_2}$$

mit

$$c_i \leq |\beta^{(i)}| \leq C(\alpha)c_i, \quad i \in \{1,2\}, \qquad \frac{|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|}{C(\alpha)^2 c_1 c_2} \leq |\beta^{(3)}| \leq \frac{|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|}{c_1 c_2},$$

wobei

$$C(\alpha) := \left|\frac{\alpha}{\alpha^{(2)}}\right| = \left|\alpha - 1 - \alpha^{(3)}\right|.$$

Setzt man

$$c_1 = c_2 = \left(\frac{|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|}{C(\alpha)}\right)^{1/3},$$

so erhält man mit Lemma 2.7 folgendes Resultat.

Korollar 2.8 *(vgl. [6, Korollar 4.3]) Sei $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha] \setminus \{0\}$. Ist $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und $|t| \geq 6$ ist, so existiert ein $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$ assoziiert zu γ, dessen Konjugierten die Ungleichungen*

$$|\beta^{(i)}| \leq |N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|^{1/3} C(\alpha)^{2/3}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

erfüllen.

Für den Spezialfall $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man daraus die folgenden Ergebnisse.

Korollar 2.9 *Sei $\Re t = -\frac{1}{2}, |t| \geq 6$ und $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha] \setminus \{0\}$ und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ positive Konstanten. Dann existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$, sodass*

$$\gamma = \beta\alpha^{a_1}(\alpha^{(2)})^{a_2}$$

mit

$$c_i \leq |\beta^{(i)}| \leq |\alpha|c_i, \quad i \in \{1,2\}, \qquad \frac{|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|}{|\alpha|^2 c_1 c_2} \leq |\beta^{(3)}| \leq \frac{|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|}{c_1 c_2}.$$

Korollar 2.10 *Sei $\Re t = -\frac{1}{2}, |t| \geq 6$ und $\gamma \in \mathbb{Z}_k[\alpha] \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$ assoziiert zu γ, sodass*

$$|\beta^{(i)}| \leq |N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|^{1/3}|\alpha|^{2/3}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

gilt.

Beweis Diese beiden Ergebnisse folgen aus Lemma 2.7 sowie Korollar 2.8. Ist $\Re t = -\frac{1}{2}$, so gilt $|\alpha| = |\alpha + 1|$, woraus man $|\alpha^{(2)}| = 1$ erhält. Daraus ergibt sich $C(\alpha) = |\alpha|$. □

2.4 Darstellung bezüglich der Ganzheitsbasis $\{1, \alpha, \alpha^{(2)}\}$

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass man sich bei der Berechnung von Elementen, die die Normungleichung erfüllen, auf jene Werte β und deren Konjugierte beschränken kann, für die die Einschränkungen aus Korollar 2.8 gelten. Diese Zahlen β können nun folgendermaßen dargestellt werden.

Da $\{1, \alpha, \alpha^{(2)}\}$ eine Basis von $\mathbb{Z}_k[\alpha]$ ist, lässt sich $\beta \in \mathbb{Z}_k[\alpha]$ in der Form

$$\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)} \tag{2.4}$$

mit $u, v, w \in \mathbb{Z}_k$ schreiben (vgl. [6, Gleichung (3)]).
Im Fall $v = w = 0$, d.h. $\beta = u$, ist γ zu einem Element aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert.
Darum wird im Folgenden $(v, w) \neq (0, 0)$ angenommen.

Wird β wie in (2.4) dargestellt, so lassen sich die Einschränkungen an $\beta^{(i)}, i \in \{1, 2, 3\}$ in Schranken für u, v und w umrechnen.

Man verwendet dazu die folgenden Gleichungen (vgl. [8, p. 55])

$$\tilde{m}u = -T(\beta(\alpha\alpha^{(2)} - (\alpha^{(3)})^2)), \quad \tilde{m}v = -T(\beta(\alpha^{(3)} - \alpha)), \quad \tilde{m}w = T(\beta(\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}))$$

wobei $T(\cdot) = T_{k(\alpha)/k}(\cdot)$ die Spur eines Elementes bezeichnet. Diese Gleichungen ergeben sich mithilfe von $T(\alpha) = t - 1$, $T(\alpha\alpha^{(2)}) = -(t + 2)$, $T(\alpha^2) = t^2 + 5$, $T(\alpha^2\alpha^{(2)}) = -t^2 - t - 4$ sowie $T(\alpha(\alpha^{(2)})^2) = 3$. Unter Anwendung von Korollar 2.8 erhält man die Schranken (vgl. [6, Gleichung (4)])

$$|\tilde{m}v|, |\tilde{m}w| \leq |N_{k(\alpha)/k}(\gamma)|^{1/3}C(\alpha)^{2/3}(|\alpha - \alpha^{(2)}| + |\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}| + |\alpha^{(3)} - \alpha|). \tag{2.5}$$

Für

$$\Delta := |\alpha - \alpha^{(2)}| + |\alpha - \alpha^{(3)}| + |\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|$$

wie in [6, Abschnitt 5] definiert und $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t + 1|$ gilt dann

$$|v|, |w| \leq 2^{1/3}|t|^{1/3}C(\alpha)^{2/3}\frac{\Delta}{|\tilde{m}|} \tag{2.6}$$

(vgl. [6, Gleichung (7)]). Für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ liefern Lemma 2.2 und die Dreiecksungleichung das folgende Lemma.

Lemma 2.11 *Sei $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und v, w wie in (2.4) definiert. Für $|t| \geq 6$ kann man β immer so wählen, dass die Schranken*

$$|v|, |w| < 4.16955 \tag{2.7}$$

gelten.

Nun möchte man eine Schranke für $|u|$ berechnen. Aus (2.3) erhält man

$$\alpha = t + L_6(0.383694), \quad \alpha^{(2)} = -1 + L_6(0.178761), \quad \alpha^{(3)} = L_6(0.202854). \tag{2.8}$$

Sei

$$g_{v,w}(r) = (r + v\alpha + w\alpha^{(2)})(r + v\alpha^{(2)} + w\alpha^{(3)})(r + v\alpha^{(3)} + w\alpha)$$

wie in [6, Abschnitt 5] definiert. Die Nullstellen von $g_{v,w}(r)$ sind

$$r_1 = -v\alpha - w\alpha^{(2)}, \quad r_2 = -v\alpha^{(2)} - w\alpha^{(3)}, \quad r_3 = -v\alpha^{(3)} - w\alpha \tag{2.9}$$

(vgl. [6, Gleichung (8)]). Man beachte, dass $g_{v,w}(u) = N_{k(\alpha)/k}(\beta)$ gilt. Andererseits kann $|g_{v,w}(r)|$ als Produkt der Abstände von r zu den Punkten r_1, r_2, r_3 interpretiert werden.

Man verwendet das folgende Resultat.

Lemma 2.12 *(vgl. [6, Lemma 5.2]) Sei $R \in \mathbb{R}$ und seien $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien $d_i = |z - z_i|$ und $d := \max_{i,j} |z_i - z_j|$. Gilt $d_i \geq R$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$, dann folgt*

$$d_1 d_2 d_3 \geq R^2(d - R).$$

Wendet man Lemma 2.12 mit $z = r$ und $z_i = r_i, i \in \{1, 2, 3\}$ an und wählt R so, dass $R^2(d - R) > |2t + 1|$ gilt, so folgt $|g_{v,w}(r)| = |r - r_1||r - r_2||r - r_3| > |2t + 1|$, falls $|r - r_i| \geq R$ für alle i gilt. Deshalb müssen nur jene Werte u, die die Ungleichung $|u - r_i| < R$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ erfüllen, untersucht werden.

Im Gegensatz zu [6, Kapitel 5], muss man die beiden Fälle $|v| = \max(|v|, |w|) > 0$ und $|w| = \max(|v|, |w|) > 0$ abhängig von $M := \max(|v|, |w|)$ unterscheiden, um ein R finden zu können, für das

$$R^2(d - R) > |2t| \geq |2t + 1| \tag{2.10}$$

gilt.

- $|w| \geq |v|$:
  1. $M = 1$: Es müssen zwei Fälle unterschieden werden.
     (a) $|v| = 0$ und $|w| = 1$: Es gilt

     $$d \geq |r_3 - r_2| \geq |w|(|t| - L_6(0.586548)) = |t| - L_6(0.586548).$$

     Setzt man $R = \sqrt{3.35}$, so ist die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.

(b) $|v| = 1$ und $|w| = 1$: Hier werden die Fälle $w = v, w = -v$ (für alle D), $w = iv, w = -iv$ (für $D = 1$) sowie $w = bv, w = -bv, w = (1-b)v, w = -(1-b)v$ (für $D = 3$) betrachtet.
$\underline{w = v}$: Unter Verwendung von

$$d \geq |r_1 - r_2| \geq |v|(|t| - L_6(0.586548)) = |t| - L_6(0.586548)$$

und $R = \sqrt{3.35}$ ist die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.
$\underline{w = -v}$: Die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ ist für

$$d \geq |r_1 - r_3| \geq |v|(2|t| - L_6(2.149)) = 2|t| - L_6(2.149)$$

und $R = \sqrt{1.39}$ richtig.
$\underline{w = iv \text{ für } D = 1}$: Verwendet man

$$d \geq |r_1 - r_3| \geq |v|(\sqrt{2}|t| - L_6(2.149)) = \sqrt{2}|t| - L_6(2.149)$$

und $R = \sqrt{2.53}$, so ist die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.
$\underline{w = -iv \text{ für } D = 1}$: Dieser Fall ist analog zum Fall $w = iv$.
$\underline{w = bv \text{ für } D = 3}$: Hier genügt es nicht, die abgekürzten Entwicklungen von α in (2.8) zu benützen, um ein R, welches (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt, zu erhalten, sondern man muss die asymptotischen Entwicklungen (2.3) verwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} d &\geq |r_2 - r_3| \\ &= |b\alpha - \alpha^{(2)} + (1-b)\alpha^{(3)}| \\ &= \left| bt + \frac{2b}{t} - \frac{b}{t^2} - \frac{3b}{t^3} + L_6\left(\frac{4.6}{|t|^{7/2}}\right) + 1 + \frac{1}{t} - \frac{2}{t^3} + \right. \\ &\quad \left. + L_6\left(\frac{1.5}{|t|^{7/2}}\right) - \frac{1-b}{t} + \frac{1-b}{t^2} + \frac{1-b}{t^3} + L_6\left(\frac{2}{|t|^{7/2}}\right) \right| \\ &= |t| - L_6(1.58464). \end{aligned}$$

Setzt man $R = \sqrt{6.3}$, so ist (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.
$\underline{w = -bv \text{ für } D = 3}$: Dieser Fall ist zum Fall $w = bv$ analog.
$\underline{w = \pm(1-b)v \text{ für } D = 3}$: Diese Fälle können wie der Fall $w = bv$ behandelt werden. Hier erfüllt $R = \sqrt{6.3}$ ebenfalls die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$.

2. $M \neq 1$: Es gilt

$$d \geq |r_3 - r_2| \geq |w|(|t| - L_6(1.968163)).$$

Hier ist $M = \sqrt{2}$ der schlechteste Fall, der auftreten kann. $R = \sqrt{\frac{4.29}{M}}$ erfüllt die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$.

- $|v| > |w|$:

1. $M = 1$, d.h. $|w| = 0$ und $|v| = 1$: Man erhält

$$d \geq |r_1 - r_2| = |v|(|t| - L_6(1.56246)) = |t| - L_6(1.56246).$$

Setzt man $R = \sqrt{6.1}$, so ist (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.

2. $M \neq 1$. Hier ist $M = \sqrt{2}$ der schlechteste Fall, der auftreten kann. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden.
   (a) $|w| = 0$ und $|v| = \sqrt{2}$: Man erhält
   $$d \geq |r_1 - r_2| = |v|(|t| - L_6(1.56246)) = \sqrt{2}(|t| - L_6(1.56246)).$$
   Durch $R = \sqrt{\frac{3.64}{M}}$ ist (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.
   (b) $|w| = 1$ und $|v| = \sqrt{2}$: Es gilt
   $$\begin{aligned} d &\geq |r_1 - r_2| \\ &\geq |v||t| - (|w| + |v|L_6(0.383694) + |w|L_6(0.178761) + \\ &\quad + |v| + |v|L_6(0.178761) + |w|L_6(0.202854)) \\ &= \sqrt{2}|t| - L_6(3.59126). \end{aligned}$$
   Setzt man $R = \sqrt{\frac{3.13}{M}}$ so ist die Ungleichung (2.10) für $|t| \geq 6$ und $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ erfüllt.

Die Wahl von $R := \sqrt{6.3}$ ist für alle obigen Fälle geeignet. Daraus ergibt sich das folgende Lemma.

Lemma 2.13 *Seien u, v, w wie in* (2.4) *und r_1, r_2, r_3 wie in* (2.9) *definiert. Ist der Minimalabstand von u zu einem der Punkte r_1, r_2, r_3 größer als $R = \sqrt{6.3}$, so gilt*
$$|N_{k(\alpha)/k}(u + v\alpha + w\alpha^{(2)}| > |2t + 1|.$$

Deshalb genügt es, jene Fälle, in denen u innerhalb eines der Kreise mit $R = \sqrt{6.3}$ um r_1, r_2 oder r_3 liegt, zu betrachten.

Um nun alle möglichen u zu erhalten, werden r_1, r_2 und r_3 durch Punkte des Gitters $\mathbb{Z}_k$ approximiert. Insbesonders setzt man
$$p_1 := -vt + w, \quad p_2 := -v, \quad p_3 := -wt \tag{2.11}$$
(vgl. [6, Gleichung (14)]). Aus (2.8) und (2.9) folgt, dass
$$|r_i - p_i| \leq ML_6(0.38369) \qquad (1 \leq i \leq 3).$$
Setzt man
$$\hat{R} := R + 0.38369M < 4.11,$$
so genügt es, für den Beweis von Satz 2.15 alle Punkte u die einen kleineren Abstand als $\hat{R}$ von mindestens einem der Punkte p_i haben, zu untersuchen.

Diese Schranken für u, v, w werden nun in ein `Mathematica`®-Programm eingesetzt, welches alle Elemente kleiner Norm berechnet. Dieses Programm ist im Wesentlichen das Programm, welches in [6] verwendet und dort in Abschnitt 6 ausführlich beschrieben wird. Daher folgt an dieser Stelle nur eine kurze Zusammenfassung der Programmidee. Im Programm wird jede Diskriminante ($D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 67, 71$)

extra betrachtet. Man überprüft, ob für jede Zahl $\beta = u+v\alpha+w\alpha^{(2)}$, für die u, v und w innerhalb der berechneten Schranken liegen, die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\beta)| \leq |2t+1|$ mit $t = c_1+c_2b$ und den Bedingungen $\Re t \leq -\frac{1}{2}$, $\Im t > 0$ und $|t| \geq 6$ erfüllt ist oder ob eine Entscheidung auf wahr oder falsch nicht möglich ist. Jede Zahl, deren Norm die Ungleichung erfüllt oder für die das Programm nicht entscheiden kann, ob die Bedingung $|N_{k(\alpha)/k}(\beta)| \leq |2t+1|$ erfüllt ist oder nicht, wird in eine Liste geschrieben. Danach versucht das Programm in dieser Liste assoziierte Elemente zu finden, indem für jedes Element drei Normalformen erzeugt werden und jeweils zwei dieser Tripel miteinander verglichen werden. Kann ein Tripel durch ein anderes Tripel durch Multiplikation mit einer Einheit in $\mathbb{Z}_k$ erzeugt werden, so wird eines der beiden Tripel fallen gelassen. In den Fällen, wo das Programm nicht entscheiden konnte, ob die Norm-Bedingung erfüllt ist oder nicht, wird eine Liste von möglichen t-Werten erzeugt und dann werden jene Werte herausgefiltert, die $|t| \geq 6$ sowie die Norm-Ungleichung erfüllen. Dadurch erhält man für alle t mit $\Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $|t| \geq 6$ eine Liste aller Elemente kleiner Norm. Dieses Programm ist ausführlich in Anhang A.2 beschrieben.

Der Unterschied zum Programm, welches in [6] verwendet wird, besteht darin, dass hier alle t betrachet werden, für die $|t| \geq 6$ gilt (in [6]: $|t| \geq 13$). Dadurch, dass nun auch kleinere t betrachtet werden, muss man zusätzliche Diskriminanten untersuchen (in [6]: $D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 15, 19, 23, 31$).

Nun betrachtet man alle t mit $|t| < 6$. Wie schon in Bemerkung 2.6 erwähnt, wird in diesem Fall jeder t-Wert einzeln behandelt. Dabei können jeweils die exakten Nullstellen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ von f_t ermittelt werden. Das Lemma 2.7 bleibt, bis auf einige Spezialfälle, die gesondert betrachtet werden, auch für $|t| < 6$ gültig, da man in diesen Fällen die Bezeichnung für die Nullstellen $\alpha^{(i)}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ so wählen kann, dass Lemma 2.5 gilt, wodurch der Beweis für Lemma 2.7 (vgl. [6, Lemma 4.1]) gleich bleibt. Dadurch ist es möglich, die Ungleichung (2.6) zu verwenden, um Schranken für $|v|, |w|$ zu berechnen. Es gibt nun jedoch Spezialfälle, wo das Lemma 2.7 nicht mehr gültig ist. Diese Spezialfälle sind $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{19}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}\}$. Diese t sind betragsmäßig klein, für sie gilt die Ungleichung $|\alpha| > \max(1, |\alpha^{(2)}|, |\alpha^{(3)}|)$ aus Lemma 2.5 nicht mehr, wenn man α so wählt, dass $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$ gilt. Hier gilt $|\alpha| < \min(1, |\alpha^{(2)}|, |\alpha^{(3)}|)$, wodurch man zeigen kann, dass $C'(\alpha) \neq C(\alpha)$ gilt, wenn man $C(\alpha)$ und $C'(\alpha)$ wie im Beweis von Lemma 2.7 definiert. In allen Problemfällen kann man jedoch die Ungleichung $C'(\alpha) < 4C(\alpha)$ zeigen, sodass hier ein Lemma analog zu Lemma 2.7 mit $4C(\alpha)$ anstelle von $C(\alpha)$ gilt. Daraus ergeben sich dann für $|v|$ und $|w|$ die Schranken

$$|v|, |w| \leq 2^{1/3}|t|^{1/3}(4C(\alpha))^{2/3}\frac{\Delta}{|\tilde{m}|} \tag{2.12}$$

anstelle von (2.6). Im Gegensatz zum Fall $|t| \geq 6$, wo drei Kreise mit Radius R um r_1, r_2 und r_3 (vgl. Lemma 2.13) betrachtet werden, um eine Schranke für $|u|$ zu erhalten, liegen r_1, r_2, r_3 nun innerhalb eines Kreises mit Radius $R = \sqrt[3]{|2t+1|}$. Dies ist dadurch möglich, dass bei kleinem t die Werte $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ sehr nahe beieinander liegen. Diese Schranken werden in einem zweiten `Mathematica`®-Programm verwendet, welches für alle t und $\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)}$, wobei u, v, w innerhalb der berechneten Schranken liegen, überprüft, ob die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\beta)| \leq |2t+1|$ erfüllt ist und ob zwei Elemente β zueinander assoziiert sind. Im Gegensatz zum Fall $|t| \geq 6$ testet das Programm nun außerdem, ob es verschiedene Normalformen gibt, die betragsmäßig gleich große Normen besitzen, aber nicht zueinander assoziiert sind. Dazu werden jeweils alle Elemente mit gleicher Norm betrachtet. Man bildet dann die Quotienten q_1, q_2 bzw. q_3 eines Elementes mit den Konjugierten eines anderen Elementes und berechnet $s_j = |q_j - \mu\alpha^{j_1}(\alpha+1)^{j_2}|$ ($j \in \{1,2,3\}$), wobei μ eine Einheit in $\mathbb{Z}_k$ ist (vgl. (2.2)). Gilt $s_j = 0$, so sind die beiden Elemente zueinander assoziiert und eines der beiden Elemente kann verworfen werden. Dieser zusätzliche Test muss für $|t| \geq 6$ nicht durchgeführt werden, da man dort nur β hat, die linear in α und daher leicht zu betrachten sind. Man bekommt hier nur in einigen wenigen Einzelfällen Normalformen, die nicht zueinander assoziiert sind, obwohl ihre Normen betragsmäßig gleich groß sind (vgl. Bemerkung 2.17 bzw. [6, Bemerkung 1.3]). Man erhält somit eine Liste aller Elemente mit kleiner Norm für alle t mit $\Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $|t| < 6$. Eine genauere Beschreibung des Programmes erfolgt in Anhang A.3.

Bemerkung 2.14 *Das oben beschriebene* `Mathematica`® *-Programm liefert Elemente, deren Norm die Normungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\beta)| \leq |2t+1|$ erfüllt. Ersetzt man α durch die beiden Konjugierten $\alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ und wendet die Darstellung* (1.2) *an, so ergeben sich zusätzlich zwei Elemente, die ebenfalls die Normungleichung erfüllen.*
Beispiel: `Mathematica`® *liefert $\alpha - 1$. Dann erhält man die beiden zusätzlichen Werte:*

$$\alpha^{(2)} - 1 = -\frac{\alpha+1}{\alpha} - 1 = -\frac{2\alpha+1}{\alpha}, \alpha^{(3)} - 1 = -\frac{1}{\alpha+1} - 1 = -\frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

Die Nenner werden durch die Potenzen von α bzw. $\alpha+1$ in $\gamma = \mu\beta\alpha^{b_1}(\alpha+1)^{b_2}$ aufgenommen, wodurch man in diesem Fall das einfachere Tripel $\{\alpha-1, 2\alpha+1, \alpha+2\}$ erhält.

2.5 Alle Elemente mit kleiner Norm

Die im vorigen Abschnitt berechneten Elemente γ, welche die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ erfüllen, lassen sich im folgenden Satz zusammenfassen. Dabei wird der Fall $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ ausgeschlossen, da man in diesem Fall nur eine dreifache Nullstelle $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ bekommt.

Satz 2.15 *Für alle t mit $\Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ impliziert die Bedingung*

$$|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|,$$

dass γ entweder zu einer ganzen Zahl in $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist oder folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\gamma = \mu\beta\alpha^{b_1}(\alpha+1)^{b_2}, \tag{2.13}$$

mit einer Einheit μ von $\mathbb{Z}_k$, $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ und einer Zahl β, die entweder ein Element des Tripels $\{\alpha-1, -(2\alpha+1), \alpha+2\}$ mit $N_{k(\alpha)/k}(\beta) = 2t+1$ oder ein Element der Liste $\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$ ist.

(In der Liste bezeichnet
M_1 die Menge aller Werte $t = c_1 + c_2 i\sqrt{2}$ mit $21 + c_1(2+c_1) + 2(-11+c_2)c_2 \leq 0$
und
M_2 die Menge aller Werte $t = c_1 + c_2(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$ mit $2(6+5c_2) > c_1 + c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ so gewählt werden, dass $\Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ gilt.)

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
Diskriminante	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	β
$D=1$ *und* $\lvert t\rvert \geq 6$ *und* $t \in \{-3+5i, -5+3i,$ $-4+4i, -5+2i,$ $-5+i, -4+3i,$ $-4+2i, -4+i\}$	$\frac{1+i}{2}(2t+1)-$ $-\frac{5}{2}(1-i)$	$\{-(\alpha+b), (1-b)\alpha+1, b\alpha-1+b\}$
$D=1$ *und* $\lvert t\rvert \geq 4$ *und* $t \in \{-2+3i, -3+2i,$ $-2+2i, -3+i\}$	$\frac{1+i}{2}(2t+1)+$ $+\frac{5}{2}(1-i)$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D=1$ *und* $t \in \{-3+4i, -2+4i,$ $-1+4i, -3+3i,$ $-1+3i, -2+2i\}$	$\frac{1-3i}{2}(2t+1)-$ $-\frac{9+7i}{2}$	$\{\alpha+2-b, (1-b)\alpha-1, -((2-b)\alpha+1-b)\}$
$D=1$ *und* $t \in \{-1+5i, -2+4i,$ $-1+4i, -2+3i\}$	$-(2+i)\cdot$ $\cdot(2t+1)-$ $-7+11i$	$\{\alpha+1-2b, -(2b\alpha+1), (2b-1)\alpha+2b\}$
$D=1$ *und* $t=-1+5i$ $\lvert t\rvert=\sqrt{26}$	$1+10i$ $3-8i$ $9-4i$	$\{-(\alpha-2b), (1+2b)\alpha+1, -(2b\alpha+1+2b)\}$ $\{\alpha+1-4b, -(4b\alpha+1), (4b-1)\alpha+4b\}$ $\{-(\alpha^2+(4-5b)\alpha-1-b),$ $(4-4b)\alpha^2+(2-5b)\alpha-1,$ $(1+b)\alpha^2+(6-3b)\alpha+4-4b\}$
$D=1$ *und* $t=-2+4i$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{5}$	$6-6i$ $6-i$ $4-5i$	$\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$ $\{\alpha+2-3b, (1-3b)\alpha-1, -((2-3b)\alpha+1-3b)\}$ $\{\alpha^2+(2-3b)\alpha-b, -((1-2b)\alpha^2-3b\alpha-1),$ $-(b\alpha^2+(2-b)\alpha+1-2b)\}$
$D=1$ *und* $t=-3+3i$ $\lvert t\rvert=3\sqrt{2}$	$5+6i$	$\{\alpha+3-2b, (2-2b)\alpha-1, -((3-2b)\alpha+2-2b)\}$
$D=1$ *und* $t=-1+4i$ $\lvert t\rvert=\sqrt{17}$	$1-8i$ $2-6i$ $3-4i$ $2-3i$ $1-6i$ $1+4i$ $5-6i$	$\{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b, (b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+3\alpha+2-b)\}$ *oder* $\{-(\alpha^2+4\alpha-b), (3+b)\alpha^2+2\alpha-1,$ $b\alpha^2+(4+2b)\alpha+3+b\}$ $\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$ $\{\alpha^2+(1-3b)\alpha+1, (1+3b)\alpha^2+(1+3b)\alpha+1,$ $\alpha^2+(1+3b)\alpha+1+3b\}$ $\{\alpha+1-3b, -(3b\alpha+1), -((1-3b)\alpha-3b)\}$ $\{\alpha-2b, -((1+2b)\alpha+1), 2b\alpha+1+2b\}$ $\{-(\alpha^2+(1-3b)\alpha-b), -(2b\alpha^2+(1+3b)\alpha+1),$ $b\alpha^2+(1-b)\alpha-2b\}$ $\{\alpha^2+2\alpha-b, -((1+b)\alpha^2-1),$ $-(b\alpha^2+(2+2b)\alpha+1+b)\}$

		$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$
$D=1$ *und*	$6-2i$	$\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$
$t=-2+3i$	$-3-4i$	$\{\alpha^2+(3-2b)\alpha+2, 2b\alpha^2-(1-2b)\alpha+1,$
$\lvert t\rvert=\sqrt{13}$		$2\alpha^2+(1+2b)\alpha+2b\}$
	$3+2i$	$\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1, -((2-2b)\alpha+1-2b)\}$
	3	$\{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b, (b-1)\alpha^2+2b\alpha+1,$
		$-(b\alpha^2+2\alpha+1-b)\}$
$D=1$ *und*	$1-6i$	$\{-((1+2b)\alpha^2+(3+b)\alpha+1), (1-b)\alpha^2+(1-3b)\alpha-1-2b,$
$t=-1+3i$		$-(\alpha^2-(1+b)\alpha-1+b)\},$
$\lvert t\rvert=\sqrt{10}$		$\{-(\alpha^2-b\alpha-1+b), -(2b\alpha^2+(2+b)\alpha+1),$
		$(1-b)\alpha^2+(2-3b)\alpha-2b\},$
		$\{-(\alpha^2+(2+b)\alpha+1-b), 2b\alpha^2+b\alpha-1, -((1-b)\alpha^2-3b\alpha-2b)\},$
		$\{-(\alpha^2+(2-5b)\alpha-2-b), (3-4b)\alpha^2-5b\alpha-1,$
		$(2+b)\alpha^2+(6-3b)\alpha+3-4b\},$
		$\{-(\alpha^2+(3+b)\alpha+2), b\alpha^2+(1+b)\alpha-1, -(2\alpha^2+(1-b)\alpha-b)\}$
		oder $\{-(\alpha^2+(6+2b)\alpha+5), 2b\alpha^2+(4+2b)\alpha-1,$
		$-(5\alpha^2+(4-2b)\alpha-2b)\}$
	$2-2i$	$\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$
		oder $\{-((2-2b)\alpha-1-b), (3-b)\alpha+2-2b, -((1+b)\alpha+3-b)\}$
	$2-5i$	$\{3\alpha+2-b, -((1+b)\alpha+3), -((2-b)\alpha-1-b)\},$
		$\{-(\alpha^2-(1+2b)\alpha-1+b), -((1+3b)\alpha^2+(3+2b)\alpha+1),$
		$(1-b)\alpha^2+(1-4b)\alpha-1-3b\},$
		$\{-(\alpha^2+3\alpha-b), (2+b)\alpha^2+\alpha-1, b\alpha^2+(3+2b)\alpha+2+b\},$
		$\{-(\alpha^2+3\alpha+7-b), -((5-b)\alpha^2-\alpha+1),$
		$-((7-b)\alpha^2+(11-2b)\alpha+5-b)\},$
		$\{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b, (b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1, -(b\alpha^2+3\alpha+2-b)\},$
		$\{2\alpha^2+(2-5b)\alpha-2-2b, -((2-3b)\alpha^2-(2+5b)\alpha-2),$
		$-((2+2b)\alpha^2+(6-b)\alpha+2-3b)\}$
		oder $\{-(2\alpha^2+(3-4b)\alpha-2-b), (3-3b)\alpha^2-(1+4b)\alpha-2,$
		$(2+b)\alpha^2+(7-2b)\alpha+3-3b\}$
	$4+i$	$\{\alpha+2-b, (1-b)\alpha-1, -((2-b)\alpha+1-b)\},$
		$\{-((4+5b)\alpha+2-2b), (2+7b)\alpha+4+5b, (2-2b)\alpha-2-7b\},$
		$\{\alpha^2+b, (1+b)\alpha^2+2\alpha+1, b\alpha^2+2b\alpha+1+b\},$
		$\{\alpha^2+(1-2b)\alpha-1+b, -((1-3b)\alpha^2-(1+2b)\alpha-1),$
		$-((1-b)\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-3b)\},$
		$\{\alpha^2+(1-2b)\alpha+1, (1+2b)\alpha^2+(1+2b)\alpha+1,$
		$\alpha^2+(1+2b)\alpha+1+2b\},$
		$\{-(2\alpha^2+(2-4b)\alpha-2-b), (2-3b)\alpha^2-(2+4b)\alpha-2,$
		$(2+b)\alpha^2+(6-2b)\alpha+2-3b\}$
		oder $\{-(2\alpha^2+(4-5b)\alpha-2-2b), (4-3b)\alpha^2-5b\alpha-2,$
		$(2+2b)\alpha^2+(8-b)\alpha+4-3b\}$
	$3-2i$	$\{-(\alpha-2b), (1+2b)\alpha+1, -(2b\alpha+1+2b)\},$
		$\{\alpha^2-(2+b)\alpha+b, (3+2b)\alpha^2+(4+b)\alpha+1,$
		$b\alpha^2+(2+3b)\alpha+3+2b\}$
		oder $\{-(3\alpha^2+(3-7b)\alpha-3-b), (3-6b)\alpha^2-(3+7b)\alpha-3,$
		$(3+b)\alpha^2+(9-5b)\alpha+3-6b\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=1$ *und* $t=-2+2i$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{2}$	$3-4i$	$\{\alpha^2+2\alpha-1-b,-((2+b)\alpha^2-1),$ $-((1+b)\alpha^2+(4+2b)\alpha+2+b)\}$
$D=1$ *und* $t=-1+2i$ $\lvert t\rvert=\sqrt{5}$	$-1+4i$	$\{3\alpha+2-b,-((1+b)\alpha+3),-((2-b)\alpha-1-b)\},$ $\{\alpha^2+b,(1+b)\alpha^2+2\alpha+1,b\alpha^2+2b\alpha+1+b\}$ *oder* $\{\alpha^2-(1+b)\alpha+b,(2+2b)\alpha^2+(3+b)\alpha+1,$ $b\alpha^2+(1+3b)\alpha+2+2b\}$
	$2+3i$	$\{-(\alpha-1-b),(2+b)\alpha+1,-((1+b)\alpha+2+b)\}$ *oder* $\{-(2\alpha^2+(4-3b)\alpha-b),(2-2b)\alpha^2-3b\alpha-2,$ $b\alpha^2+(4-b)\alpha+2-2b\}$
	$2+2i$	$\{2\alpha+1-b,-((1+b)\alpha+2),-((1-b)\alpha-1-b)\}$
$D=2$ *und* $t\in M_1$	$\frac{2+\sqrt{2}i}{2}(2t+1)+$ $+\frac{1}{2}(8-7\sqrt{2}i)$	$\{-(\alpha+1-b),b\alpha+1,(1-b)\alpha-b\}$
$D=2$ *und* $t\in\{-1+4i\sqrt{2},$ $-4+3i\sqrt{2},$ $-3+3i\sqrt{2},$ $-2+3i\sqrt{2},$ $-1+3i\sqrt{2},$ $-4+2i\sqrt{2}$ $-3+2i\sqrt{2},$ $-2+2i\sqrt{2},$ $-1+2i\sqrt{2}\}$	$\frac{2-\sqrt{2}i}{2}(2t+1)-$ $-\frac{1}{2}(8+7\sqrt{2}i)$	$\{-(\alpha-b),(1+b)\alpha+1,-(b\alpha+1+b)\}$
$D=2$ *und* $t=-2+3i\sqrt{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{22}$	$3-6i\sqrt{2}$	$\{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b,(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+2\alpha+1-b)\}$
$D=2$ *und* $t=-1+3i\sqrt{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{19}$	$3-4i\sqrt{2}$ $5+3i\sqrt{2}$	$\{\alpha+1-2b,-(2b\alpha+1),(2b-1)\alpha+2b\}$ $\{-(5\alpha-b),(5+b)\alpha+5,-(b\alpha+5+b)\}$
$D=2$ *und* $t=-2+2i\sqrt{2}$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{3}$	$3+2i\sqrt{2}$	$\{\alpha+2-b,(1-b)\alpha-1,-((2-b)\alpha+1-b)\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=2$ *und* $t=-1+2i\sqrt{2}$ $\lvert t\rvert=3$	$1-4i\sqrt{2}$	$\{-(\alpha^2+(4+b)\alpha+3), b\alpha^2+(2+b)\alpha-1,$ $-(3\alpha^2+(2-b)\alpha-b)\},$ $\{b\alpha^2+(3+3b)\alpha+4+b,$ $(1-b)\alpha^2-(3+b)\alpha+b,$ $(4+b)\alpha^2+(5-b)\alpha+1-b\}$ *oder* $\{b\alpha^2+(2+4b)\alpha+3+2b,$ $(1-b)\alpha^2-(2+2b)\alpha+b,$ $(3+2b)\alpha^2+4\alpha+1-b\}$
	$4+2i\sqrt{2}$	$\{2\alpha+2-b, -(b\alpha+2), -((2-b)\alpha-b)\}$ *oder* $\{-((2-b)\alpha^2+(2-3b)\alpha-2-b),$ $(2-b)\alpha^2-(2+b)\alpha-2+b,$ $(2+b)\alpha^2+(6-b)\alpha+2-b\}$
	$1-i\sqrt{2}$	$\{4\alpha+3-b, -((1+b)\alpha+4),$ $-((3-b)\alpha-1-b)\}$
	$5-i\sqrt{2}$	$\{3\alpha+2-b, -((1+b)\alpha+3),$ $-((2-b)\alpha-1-b)\}$
	$3-i\sqrt{2}$	$\{\alpha+2-b, (1-b)\alpha-1, -((2-b)\alpha+1-b)\},$ $\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2),$ $-((1-b)\alpha-1-b)\},$ $\{\alpha^2+2\alpha-b, -((1+b)\alpha^2-1),$ $-(b\alpha^2+(2+2b)\alpha+1+b)\}$ *oder* $\{\alpha^2+(1-b)\alpha+1, (1+b)\alpha^2+(1+b)\alpha+1,$ $\alpha^2+(1+b)\alpha+1+b\}$
	$2i\sqrt{2}$	$\{-(2\alpha-b), (2+b)\alpha+2, -(b\alpha+2+b)\}$
	$1+2i\sqrt{2}$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$ *oder* $\{-(\alpha^2+(2-b)\alpha+1), -(b\alpha^2+b\alpha+1),$ $-(\alpha^2+b\alpha+b)\}$
	$5+i\sqrt{2}$	$\{-((1-b)\alpha^2-3b\alpha-2-b),$ $(1-b)\alpha^2-(2+b)\alpha-1+b,$ $(2+b)\alpha^2+(4-b)\alpha+1-b\}$
$D=3$ *und* $t\notin M_2$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)-\frac{7}{2}$	$\{\alpha+1+b, b\alpha-1, -((1+b)\alpha+b)\}$
$D=3$ *und* $t\neq-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)+\frac{7}{2}$	$\{\alpha-b, -((1+b)\alpha+1), b\alpha+1+b\}$
	$\frac{2t+1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D=3$ *und* $\lvert t\rvert>2$	$\frac{2t+1}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha+b), (1-b)\alpha+1, b\alpha-1+b\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=3$ *und* $t \in \{-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2},$ $-2+3i\sqrt{3},$ $-1+3i\sqrt{3},$ $-\frac{5}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{3}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2},$ $-2+2i\sqrt{3},$ $-1+2i\sqrt{3}\}$	$-\frac{3-i\sqrt{3}}{2}(2t+1)+$ $+\frac{11+9i\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}(2t+1)-$ $-\frac{11-9i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2t+1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha+1-2b), 2b\alpha+1, -((2b-1)\alpha+2b)\}$ $\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1, -((2-2b)\alpha+1-2b)\}$ $\{(\alpha+1-b)^2, (b\alpha+1)^2, ((1-b)\alpha-b)^2\}$
$D=3$ *und* $t=-1+3i\sqrt{3}$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{7}$	$\frac{19}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha^2+(4-4b)\alpha-b),$ $-((3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1),$ $b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{5}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$ $\lvert t\rvert=5$	$4-5i\sqrt{3}$	$\{2\alpha^2+(4-b)\alpha-b, -(2\alpha^2-b\alpha-2),$ $-(b\alpha^2+(4+b)\alpha+2)\}$
$D=3$ *und* $t=-3+2i\sqrt{3}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{21}$	$\frac{17}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha+5-3b, (4-3b)\alpha-1, -((5-3b)\alpha+4-3b)\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{3}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{21}$	$1-4i\sqrt{3}$ $7-3i\sqrt{3}$ $8-i\sqrt{3}$ $2+3i\sqrt{3}$ $5+4i\sqrt{3}$	$\{\alpha+4-4b, (3-4b)\alpha-1, -((4-4b)\alpha+3-4b)\}$ $\{\alpha+3-3b, (2-3b)\alpha-1, -((3-3b)\alpha+2-3b)\}$ $\{\alpha+3-4b, (2-4b)\alpha-1, -((3-4b)\alpha+2-4b)\}$ $\{-(\alpha^2+(4-3b)\alpha-b), (3-2b)\alpha^2+(2-3b)\alpha-1,$ $b\alpha^2+(4-b)\alpha+3-2b\}$ $\{-(\alpha^2+(4-4b)\alpha+1), (2-4b)\alpha^2+(2-4b)\alpha-1,$ $-(\alpha^2-(2-4b)\alpha-2+4b)\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{19}$	-4 $4\sqrt{3}i$ $4-3\sqrt{3}i$ $4+3\sqrt{3}i$ -5 8	$\{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b, (2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1,$ $-((2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b)\}$ $\{\alpha+2-3b, (1-3b)\alpha-1, -((2-3b)\alpha+1-3b)\}$ $\{\alpha+2-4b, (1-4b)\alpha-1, -((2-4b)\alpha+1-4b)\}$ $\{-(\alpha+3-4b), -((2-4b)\alpha-1), (3-4b)\alpha+2-4b\}$ $\{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b, (3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b)\}$ $\{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b, (5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1,$ $-((b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b)\}$
$D=3$ *und* $t=-2+2i\sqrt{3}$ $\lvert t\rvert=4$	$6+i\sqrt{3}$ $\frac{11}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{7}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{5}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha+3-2b, (2-2b)\alpha-1, -((3-2b)\alpha+2-2b)\}$ $\{\alpha+3-3b, (2-3b)\alpha-1, -((3-3b)\alpha+2-3b)\}$ $\{\alpha+4-3b, (3-3b)\alpha-1, -((4-3b)\alpha+3-3b)\}$ $\{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b, (b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+3\alpha+2-b)\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=3$ *und* $t=-1+2i\sqrt{3}$ $\vert t\vert=\sqrt{13}$	$1-4i\sqrt{3}$	$\{\alpha^2+(2-2b)\alpha+1, 2b\alpha^2+2b\alpha+1, \alpha^2+2b\alpha+2b\}$
	$-\frac{1}{2}-\frac{7i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha^2+(2-b)\alpha+1, b\alpha^2+b\alpha+1, \alpha^2+b\alpha+b\}$
	$\frac{9}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{(1-2b)\alpha-1-b, -((2-b)\alpha+1-2b), (1+b)\alpha+2-b\}$
	$\frac{9}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{(1-2b)\alpha^2-(3+3b)\alpha-1-b, 3\alpha^2+(5-b)\alpha+1-2b,$ $-((1+b)\alpha^2-(1+b)\alpha-3)\}$
	$5-2i\sqrt{3}$	$\{\alpha+3-2b, (2-2b)\alpha-1, -((3-2b)\alpha+2-2b)\}$
	$5+2i\sqrt{3}$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
	$\frac{7}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha+2-3b, (1-3b)\alpha-1, -((2-3b)\alpha+1-3b)\}$
	$\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha+3-3b), -((2-3b)\alpha-1), (3-3b)\alpha+2-3b\}$
	$-\frac{13}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha^2+(1+b)\alpha+1, (1-b)\alpha^2+(1-b)\alpha+1,$ $\alpha^2+(1-b)\alpha+1-b\}$ *oder* $\{\alpha^2+(3-2b)\alpha+4-b, (2+b)\alpha^2-(1-2b)\alpha+1,$ $(4-b)\alpha^2+5\alpha+2+b\}$
	$\frac{11}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha^2+(1+b)\alpha+1-b, (1-2b)\alpha^2+(1-b)\alpha+1,$ $(1-b)\alpha^2+(1-3b)\alpha+1-2b\}$
	$\frac{11}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha^2+(3+3b)\alpha+2-2b, -(5b\alpha^2+(1+3b)\alpha-1),$ $(2-2b)\alpha^2+(1-7b)\alpha-5b\}$
	$\frac{5}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha^2+(4-5b)\alpha-1-b, -((4-4b)\alpha^2+(2-5b)\alpha-1),$ $-((1+b)\alpha^2+(6-3b)\alpha+4-4b)\}$
	$\frac{11}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$	$\{(\alpha-b)^2, ((1+b)\alpha+1)^2, (b\alpha+1+b)^2\}$ *oder* $\{-((1+b)\alpha^2+(7-3b)\alpha+6-5b),$ $b\alpha^2+(5-5b)\alpha-1-b,$ $-((6-5b)\alpha^2+(5-7b)\alpha-b)\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{5}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\vert t\vert=\sqrt{13}$	$2+3i\sqrt{3}$	$\{\alpha+3-2b, (2-2b)\alpha-1, -((3-2b)\alpha+2-2b)\}$
	$5+2i\sqrt{3}$	$\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1, -((2-2b)\alpha+1-2b)\}$
	$4+i\sqrt{3}$	$\{\alpha+4-2b, (3-2b)\alpha-1, -((4-2b)\alpha+3-2b)\}$
	4	$\{(\alpha+1-b)^2, (b\alpha+1)^2, ((1-b)\alpha-b)^2\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\vert t\vert=3$	$2-3i\sqrt{3}$	$\{\alpha^2+(3-b)\alpha+2, b\alpha^2-(1-b)\alpha+1, 2\alpha^2+(1+b)\alpha+b\}$ *oder* $\{2\alpha^2+(3-2b)\alpha+1-b, b\alpha^2+(1+2b)\alpha+2,$ $(1-b)\alpha^2-\alpha+b\}$
	$1-3i\sqrt{3}$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$ *oder* $\{\alpha^2+(3-b)\alpha+2+b, 2b\alpha^2-(1-b)\alpha+1,$ $(2+b)\alpha^2+(1+3b)\alpha+2b\}$
	$2+i\sqrt{3}$	$\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1, -((2-2b)\alpha+1-2b)\}$
	$3i\sqrt{3}$	$\{(1-2b)\alpha-1-b, -((2-b)\alpha+1-2b),$ $(1+b)\alpha+2-b\}$ *oder* $\{(4-2b)\alpha-1-b, -((5-b)\alpha+4-2b),$ $(1+b)\alpha+5-b\}$
	$4-i\sqrt{3}$	$\{\alpha+1-2b, -(2b\alpha+1), (2b-1)\alpha+2b\},$ $\{\alpha^2+(2-b)\alpha+1, b\alpha^2+b\alpha+1, \alpha^2+b\alpha+b\}$ *oder* $\{\alpha^2+(3-b)\alpha+1, -((1-b)\alpha^2+(1-b)\alpha-1),$ $\alpha^2-(1-b)\alpha-1+b\}$
	$-2+2i\sqrt{3}$	$\{(\alpha-b)^2, ((1+b)\alpha+1)^2, (b\alpha+1+b)^2\}$

$\mathcal{L}(t, \alpha, \beta)$		
$D = 3$ *und* $t = -2 + i\sqrt{3}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{7}$	$\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha + 3 - b, (2-b)\alpha - 1, -((3-b)\alpha + 2 - b)\}$ $\{(\alpha + 1 - b)^2, (b\alpha + 1)^2, ((1-b)\alpha - b)^2\}$
$D = 3$ *und* $t = -1 + i\sqrt{3}$ $\lvert t\rvert = 2$	$\frac{7}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{5}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{\alpha + 3 - b, (2-b)\alpha - 1, -((3-b)\alpha + 2 - b)\}$ $\{\alpha^2 + (2-b)\alpha + 1, b\alpha^2 + b\alpha + 1, \alpha^2 + b\alpha + b\}$
$D = 3$ *und* $t = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{3}$	$1 + i\sqrt{3}$	$\{-(\alpha+3-b), -((2-b)\alpha-1), (3-b)\alpha+2-b\}$
$D = 5$ *und* $t = -1 + 2i\sqrt{5}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{21}$	$1 - 4i\sqrt{5}$ $4 - 3i\sqrt{5}$	$\{\alpha - 1, -(2\alpha + 1), \alpha + 2\}$ *oder* $\{\alpha - b, -((1+b)\alpha + 1), b\alpha + 1 + b\}$ $\{\alpha + 1 - b, -(b\alpha + 1), -((1-b)\alpha - b)\}$
$D = 5$ *und* $t = -1 + i\sqrt{5}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{6}$	$t^2 + t + 7$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D = 6$ *und* $t = -1 + i\sqrt{6}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{7}$	$1 - 2i\sqrt{6}$ $1 - i\sqrt{6}$	$\{\alpha - 1, -(2\alpha + 1), \alpha + 2\}$ *oder* $\{\alpha^2 + 2\alpha + 2, \alpha^2 + 1, 2\alpha^2 + 2\alpha + 1\}$ $\{\alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1\}$
$D = 7$ *und* $t \in \{-1 + 3i\sqrt{7},$ $-\frac{7}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2},$ $-\frac{3}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2},$ $-4 + 2i\sqrt{7}, -3 + 2i\sqrt{7},$ $-2 + 2i\sqrt{7}, -1 + 2i\sqrt{7},$ $-\frac{9}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -\frac{7}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2},$ $-\frac{5}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2},$ $-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -3 + i\sqrt{7}$ $-2 + i\sqrt{7}\}$	$\frac{1+i\sqrt{7}}{2}(2t+1)+$ $+\frac{13-i\sqrt{7}}{2}$	$\{-(\alpha+2-b), (1-b)\alpha-1, (2-b)\alpha+1-b\}$
$D = 7$ *und* $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2},$ $-2 + 2i\sqrt{7}, -1 + 2i\sqrt{7},$ $-\frac{5}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2},$ $-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -2 + i\sqrt{7}$ $-1 + i\sqrt{7}\}$	$\frac{1-i\sqrt{7}}{2}(2t+1)-$ $-\frac{13+i\sqrt{7}}{2}$	$\{-(\alpha - b), (1+b)\alpha + 1, -(b\alpha + 1 + b)\}$
$D = 7$ *und* $\lvert t\rvert \geq 2$	$2t+1-i2\sqrt{7}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D = 7$ *und* $t = -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$ $\lvert t\rvert = 3\sqrt{2}$	$6 - i\sqrt{7}$ $5 - 2i\sqrt{7}$ $1 + 2i\sqrt{7}$	$\{\alpha + 2 - 2b, (1-2b)\alpha - 1,$ $-((2-2b)\alpha + 1 - 2b)\}$ $\{\alpha + 3 - 2b, (2-2b)\alpha - 1,$ $-((3-2b)\alpha + 2 - 2b)\}$ $\{-(\alpha^2 + (3-2b)\alpha + 1 - b),$ $(1-b)\alpha^2 + (1-2b)\alpha - 1,$ $-((1-b)\alpha^2 - \alpha - 1 + b)\}$

$\mathcal{L}(t, \alpha, \beta)$		
$D = 7$ *und* $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$ $\lvert t\rvert = 4$	$1 - 2i\sqrt{7}$	$\{\alpha + 1 - 2b, -(2b\alpha + 1), (2b - 1)\alpha + 2b\}$
	$1 + 2i\sqrt{7}$	$\{-(\alpha + 2 - 2b), -((1 - 2b)\alpha - 1), (2 - 2b)\alpha + 1 - 2b\}$
	$\frac{7}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$\{-(2\alpha + 1 - b), (1 + b)\alpha + 2, (1 - b)\alpha - 1 - b\}$
	$\frac{7}{2} - \frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$\{2\alpha + 2 - b, -(b\alpha + 2), -((2 - b)\alpha - b)\}$
	-3	$\{\alpha^2 + (2 - 2b)\alpha - b, (b - 1)\alpha^2 + 2b\alpha + 1, -(b\alpha^2 + 2\alpha + 1 - b)\}$
	-5	$\{\alpha^2 + (3 - 2b)\alpha - b, (b - 2)\alpha^2 + (2b - 1)\alpha + 1,$ $-(b\alpha^2 + 3\alpha + 2 - b)\}$
	-7	$\{\alpha^2 + (4 - 2b)\alpha - b, (b - 3)\alpha^2 + (2b - 2)\alpha + 1,$ $-(b\alpha^2 + 4\alpha + 3 - b)\}$ *oder* $\{(\alpha + 1 - b)^2, (b\alpha + 1)^2$ *oder* $((1 - b)\alpha - b)^2\}$
$D = 7$ *und* $t = -2 + i\sqrt{7}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{11}$	$4 + i\sqrt{7}$	$\{\alpha + 3 - b, (2 - b)\alpha - 1, -((3 - b)\alpha + 2 - b)\}$
	5	$\{\alpha^2 + (3 - b)\alpha + 1, -((1 - b)\alpha^2 + (1 - b)\alpha - 1),$ $\alpha^2 - (1 - b)\alpha - 1 + b\}$
$D = 7$ *und* $t = -1 + i\sqrt{7}$ $\lvert t\rvert = 2\sqrt{2}$	$1 - 2i\sqrt{7}$	$\{(5 - 3b)\alpha - 2 - b, -((7 - 2b)\alpha + 5 - 3b), (2 + b)\alpha + 7 - 2b\},$ $\{-(\alpha^2 + \alpha + 1 - b), -((1 - b)\alpha^2 + \alpha + 1),$ $-((1 - b)\alpha^2 + (1 - 2b)\alpha + 1 - b)\},$ $\{-(\alpha^2 + (3 - 3b)\alpha - 1 - b), (3 - 2b)\alpha^2 + (1 - 3b)\alpha - 1,$ $(1 + b)\alpha^2 + (5 - b)\alpha + 3 - 2b\},$ $\{-(\alpha^2 + (4 - 3b)\alpha - 2 - b), (5 - 2b)\alpha^2 + (2 - 3b)\alpha - 1,$ $(2 + b)\alpha^2 + (8 - b)\alpha + 5 - 2b\},$ $\{3\alpha^2 + (4 - 2b)\alpha + 1 - b, b\alpha^2 + (2 + 2b)\alpha + 3,$ $(1 - b)\alpha^2 - 2\alpha + b\},$ $\{(2 - b)\alpha^2 + (3 - 3b)\alpha - 1 - b, -((2 - b)\alpha^2 - (1 + b)\alpha - 2 + b),$ $-((1 + b)\alpha^2 + (5 - b)\alpha + 2 - b)\}$ *oder* $\{-((11 - 5b)\alpha^2 - (2 + 3b)\alpha - 6 + 4b),$ $-((7 + 2b)\alpha^2 + (24 - 7b)\alpha + 11 - 5b),$ $(6 - 4b)\alpha^2 + (10 - 11b)\alpha - 7 - 2b\}$
	$1 + 2i\sqrt{7}$	$\{3\alpha + 3 - b, -(b\alpha + 3), -((3 - b)\alpha - b)\},$ $\{3\alpha - b, -((3 + b)\alpha + 3), b\alpha + 3 + b\},$ $\{(1 - 2b)\alpha - 1 - b, -((2 - b)\alpha + 1 - 2b), (1 + b)\alpha + 2 - b\},$ $\{3\alpha + 6 - 4b, (3 - 4b)\alpha - 3, -((6 - 4b)\alpha + 3 - 4b)\},$ $\{-(\alpha^2 + 2\alpha - b), (1 + b)\alpha^2 - 1, b\alpha^2 + (2 + 2b)\alpha + 1 + b\},$ $\{-(\alpha^2 + 2\alpha + 3 + b), -((2 + b)\alpha^2 + 1),$ $-((3 + b)\alpha^2 + (4 + 2b)\alpha + 2 + b)\}$ *oder* $\{-(b\alpha^2 + (1 + 3b)\alpha + 2 + b),$ $-((1 - b)\alpha^2 - (1 + b)\alpha + b), -((2 + b)\alpha^2 + (3 - b)\alpha + 1 - b)\}$
	$\frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$	$\{2\alpha + 1 - b, -((1 + b)\alpha + 2), -((1 - b)\alpha - 1 - b)\}$ *oder* $\{-(2b\alpha + 1 + b), -((1 - b)\alpha - 2b), (1 + b)\alpha + 1 - b\}$
	$\frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$	$\{2\alpha + 2 - b, -(b\alpha + 2), -((2 - b)\alpha - b)\}$ *oder* $\{-(2\alpha - b), (2 + b)\alpha + 2, -(b\alpha + 2 + b)\}$
	$-i\sqrt{7}$	$\{\alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1\}$ *oder* $\{4\alpha^2 + (5 - 2b)\alpha + 1 - b, b\alpha^2 + (3 + 2b)\alpha + 4,$ $(1 - b)\alpha^2 - 3\alpha + b\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D = 7$ *und* $t = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$ $\lvert t\rvert = 2$	$2 + i\sqrt{7}$	$\{-(\alpha+3-b), -((2-b)\alpha-1),$ $(3-b)\alpha+2-b\}$
$D = 10$ *und* $t = -1 + i\sqrt{10}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{11}$	t^2+t+7	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D = 11$ *und* $t \in \{-\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2},$ $-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}, -3+i\sqrt{11},$ $-2+i\sqrt{11}, -1+i\sqrt{11}\}$	$\frac{2+i\sqrt{11}}{2}(2t+1)+$ $+\frac{1}{2}(19-2i\sqrt{11})$	$\{-(\alpha+2-b), -((1-b)\alpha-1),$ $(2-b)\alpha+1-b\}$
$D = 11$ *und* $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2},$ $-1+i\sqrt{11}\}$	$\frac{2-i\sqrt{11}}{2}(2t+1)-$ $-\frac{1}{2}(19+2i\sqrt{11})$	$\{-(\alpha-b), (1+b)\alpha+1, -(b\alpha+1+b)\}$
$D = 11$ *und* $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{11}}{2},$ $-3+2i\sqrt{11}, -2+2i\sqrt{11},$ $-1+2i\sqrt{11}, -\frac{7}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2},$ $-\frac{5}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2},$ $-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}, -3+i\sqrt{11},$ $-2+i\sqrt{11}, -1+i\sqrt{11}\}$	$\frac{3}{2}(2t+1) - \frac{5i\sqrt{11}}{2}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D = 11$ *und* $t = -1 + i\sqrt{11}$ $\lvert t\rvert = 2\sqrt{3}$	$1 - 2i\sqrt{11}$	$\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2),$ $-((1-b)\alpha-1-b)\}$ *oder* $\{2\alpha+4-3b, (2-3b)\alpha-2,$ $-((4-3b)\alpha+2-3b)\}$
	$-\frac{1}{2} - \frac{3i\sqrt{11}}{2}$	$\{\alpha^2+(2-b)\alpha+1,$ $b\alpha^2+b\alpha+1, \alpha^2+b\alpha+b\}$
	$4 + i\sqrt{11}$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$ *oder* $\{-(2\alpha^2+(2-2b)\alpha-1-b),$ $(1-b)\alpha^2-(2+2b)\alpha-2,$ $(1+b)\alpha^2+4\alpha+1-b\}$
	$-\frac{5}{2} - \frac{3i\sqrt{11}}{2}$	$\{\alpha^2+(2-b)\alpha+2, (1+b)\alpha^2+b\alpha+1,$ $2\alpha^2+(2+b)\alpha+1+b\}$
$D = 13$ *und* $t = -1 + i\sqrt{13}$ $\lvert t\rvert = \sqrt{14}$	t^2+t+7	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D = 15$ *und* $t \in \{-2+i\sqrt{15},$ $-1+i\sqrt{15}\}$	$\frac{3+i\sqrt{15}}{2}(2t+1)+$ $+\frac{1}{2}(25-3i\sqrt{15})$	$\{-(\alpha+2-b), -((1-b)\alpha-1), (2-b)\alpha+1-b\}$
$D = 15$ *und* $t = -1 + i\sqrt{15}$ $\lvert t\rvert = 4$	$1 + 2i\sqrt{15}$	$\{-(\alpha-b), (1+b)\alpha+1, -(b\alpha+1+b)\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=15$ *und* $t\in\{-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{15}}{2},$ $-2+i\sqrt{15},$ $-1+i\sqrt{15}\}$	$2(2t+1)-$ $-3i\sqrt{15}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D=15$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$ $\lvert t\rvert=2$	3	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D=19$ *und* $t=-1+i\sqrt{19}$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{5}$	$\frac{11}{2}-\frac{3i\sqrt{19}}{2}$ $\frac{5}{2}-\frac{3i\sqrt{19}}{2}$	$\{\alpha+2-b, (1-b)\alpha-1, -((2-b)\alpha+1-b)\}$ $\{\alpha+1-b, -(b\alpha+1), -((1-b)\alpha-b)\}$
$D=19$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{5}$	-3 2 4	$\{2\alpha+3-b, (1-b)\alpha-2, -((3-b)\alpha+1-b)\}$ $\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$ $\{(\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2\}$
$D=23,31,35,39$ *und* $t=-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{D}}{2}$	t^2+t+7	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D=23$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{6}$	$i\sqrt{23}$ $\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$ $\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{23}}{2}$	$\{\alpha-1, -(2\alpha+1), \alpha+2\},$ $\{3\alpha+2-b, -((1+b)\alpha+3), -((2-b)\alpha-1-b)\}$ *oder* $\{5\alpha+3-b, -((2+b)\alpha+5), -((3-b)\alpha-2-b)\}$ $\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$ $\{-(2\alpha+2-b), b\alpha+2, (2-b)\alpha-b\}$
$D=31$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{2}$	$i\sqrt{31}$ $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{31}}{2}$ $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$ -3	$\{\alpha-1, -(2\alpha+1), \alpha+2\},$ $\{-(3\alpha+2-b), (1+b)\alpha+3, (2-b)\alpha-1-b\}$ *oder* $\{-(5\alpha+4-3b), (1+3b)\alpha+5, (4-3b)\alpha-1-3b\}$ $\{2\alpha+1-b, -((1+b)\alpha+2), -((1-b)\alpha-1-b)\}$ $\{-(2\alpha+2-b), b\alpha+2, (2-b)\alpha-b\}$ $\{\alpha^2+\alpha+2, 2\alpha^2+\alpha+1, 2\alpha^2+3\alpha+2\},$ $\{\alpha^2+2\alpha+2, \alpha^2+1, 2\alpha^2+2\alpha+1\}$ *oder* $\{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2, \alpha^2+b\alpha+1+b,$ $2\alpha^2-(b-2)\alpha+1\}$
$D=35,39,43,47,51,55$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{D}}{2}$	t^2+t+7	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$
$D=35$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$ $\lvert t\rvert=3$	$i\sqrt{35}$ 4 -5	$\{\alpha-1, -(2\alpha+1), \alpha+2\},$ $\{-(2\alpha+1-b), (1+b)\alpha+2, (1-b)\alpha-1-b\}$ *oder* $\{-(2\alpha+2-b), b\alpha+2, (2-b)\alpha-b\}$ $\{(\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2\}$ $\{\alpha^2+\alpha+4, 4\alpha^2+\alpha+1, 4\alpha^2+7\alpha+4\}$ *oder* $\{\alpha^2+2\alpha+2, \alpha^2+1, 2\alpha^2+2\alpha+1\}$

Bemerkung 2.16 *Die Mengen M_1 und M_2 bestehen also aus den folgenden Werten:*
$M_1 := \{-1+10i\sqrt{2}, -5+9i\sqrt{2}, -4+9i\sqrt{2}, -3+9i\sqrt{2}, -2+9i\sqrt{2}, -1+9i\sqrt{2}, -6+8i\sqrt{2}, -5+8i\sqrt{2}, -4+8i\sqrt{2}, -3+8i\sqrt{2}, -2+8i\sqrt{2}, -1+8i\sqrt{2}, -7+7i\sqrt{2}, -6+7i\sqrt{2}, -5+7i\sqrt{2}, -4+7i\sqrt{2}, -3+7i\sqrt{2}, -2+7i\sqrt{2}, -1+7i\sqrt{2}, -7+6i\sqrt{2}, -6+6i\sqrt{2}, -5+6i\sqrt{2}, -4+6i\sqrt{2}, -3+6i\sqrt{2}, -2+6i\sqrt{2}, -1+6i\sqrt{2}, -7+5i\sqrt{2}, -6+5i\sqrt{2}, -5+5i\sqrt{2}, -4+5i\sqrt{2}, -3+5i\sqrt{2}, -2+5i\sqrt{2}, -1+5i\sqrt{2}, -7+4i\sqrt{2}, -6+4i\sqrt{2}, -5+4i\sqrt{2}, -4+4i\sqrt{2}, -3+4i\sqrt{2}, -2+4i\sqrt{2}, -1+4i\sqrt{2}, -6+3i\sqrt{2}, -5+3i\sqrt{2}, -4+3i\sqrt{2}, -3+3i\sqrt{2}, -2+3i\sqrt{2}, -1+3i\sqrt{2}, -5+2i\sqrt{2}, -4+2i\sqrt{2}, -3+2i\sqrt{2}, -2+2i\sqrt{2}, -1+2i\sqrt{2}, -1+i\sqrt{2}\}$,
$M_2 := \{-\frac{1}{2}+\frac{15i\sqrt{3}}{2}, -3+7i\sqrt{3}, -2+7i\sqrt{3}, -1+7i\sqrt{3}, -\frac{9}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -5+6i\sqrt{3}, -4+6i\sqrt{3}, -3+6i\sqrt{3}, -2+6i\sqrt{3}, -1+6i\sqrt{3}, -\frac{13}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2}, -6+5i\sqrt{3}, -5+5i\sqrt{3}, -4+5i\sqrt{3}, -3+5i\sqrt{3}, -2+5i\sqrt{3}, -1+5i\sqrt{3}, -\frac{13}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -7+4i\sqrt{3}, -6+4i\sqrt{3}, -5+4i\sqrt{3}, -4+4i\sqrt{3}, -3+4i\sqrt{3}, -2+4i\sqrt{3}, -1+4i\sqrt{3}, -\frac{13}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}, -7+3i\sqrt{3}, -6+3i\sqrt{3}, -5+3i\sqrt{3}, -4+3i\sqrt{3}, -3+3i\sqrt{3}, -2+3i\sqrt{3}, -1+3i\sqrt{3}, -\frac{13}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -6+2i\sqrt{3}, -5+2i\sqrt{3}, -4+2i\sqrt{3}, -3+2i\sqrt{3}, -2+2i\sqrt{3}, -1+2i\sqrt{3}, -\frac{13}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, -5+i\sqrt{3}, -4+i\sqrt{3}, -3+i\sqrt{3}, -2+i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3}, -\frac{11}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\}$.

Bemerkung 2.17 *Im Fall $D = 2$ gilt für alle $t \in \{-1+10i\sqrt{2}, -5+9i\sqrt{2}, -7+7i\sqrt{2}, -7+4i\sqrt{2}, -5+2i\sqrt{2}\}$, dass $|N_{k(\alpha)/k}(\alpha-1)| = |N_{k(\alpha)/k}(\alpha+1-b)| = |2t+1|$, aber keine der Konjugierten von $\alpha+1-b$ ist zu einer der Konjugierten von $\alpha-1$ assoziiert, da der Quotient $\frac{N_{k(\alpha)/k}(\alpha+1-b)}{N_{k(\alpha)/k}(\alpha-1)}$ kein Element von $\mathbb{Z}_k$ ist.*

Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man aus Satz 2.15 das folgende Resultat:

Korollar 2.18 *Für alle t mit $\Re t = -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ impliziert*

$$|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|,$$

dass γ entweder zu einer ganzen Zahl in $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist oder folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\gamma = \mu\beta\alpha^{b_1}(\alpha+1)^{b_2}$$

mit einer Einheit μ von $\mathbb{Z}_k$, $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ und einer Zahl β, die entweder ein Element des Tripels $\{\alpha-1, -(2\alpha+1), \alpha+2\}$ mit $N_{k(\alpha)/k}(\beta) = 2t+1$ oder ein Element der folgenden Liste ist.

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
Diskriminante	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	β
$D=3$ *und* $t \notin \{-\frac{1}{2}+\frac{15i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{1}{2}+\frac{13i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{11i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{1}{2}+\frac{9i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\}$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)-\frac{7}{2}$	$\{\alpha+1+b, b\alpha-1, -((1+b)\alpha+b)\}$
$D=3$ *und* $t \notin \{-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2},$ $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\}$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)+\frac{7}{2}$	$\{\alpha-b, -((1+b)\alpha+1), b\alpha+1+b\}$
$D=3$ *und* $t \neq -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2t+1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2t+1}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$ $\{-(\alpha+b), (1-b)\alpha+1, b\alpha-1+b\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}$ $\|t\|=\sqrt{37}$	$5+6i\sqrt{3}$ $5-6i\sqrt{3}$ -12	$\{-(\alpha+1-2b), 2b\alpha+1, -((2b-1)\alpha+2b)\}$ $\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1,$ $-((2-2b)\alpha+1-2b)\}$ $\{(\alpha+1-b)^2, (b\alpha+1)^2, ((1-b)\alpha-b)^2\}$
$D=3$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$ $\|t\|=\sqrt{19}$	-4 $2+3i\sqrt{3}$ $2-3i\sqrt{3}$ $-4i\sqrt{3}$ $4-3i\sqrt{3}$ $4+3i\sqrt{3}$ -3 -5 8	$\{\alpha-b, -((1+b)\alpha+1), b\alpha+1+b\}$ *oder*$\{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b,$ $(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1,$ $-((2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b)\}$ $\{-(\alpha+1-2b), 2b\alpha+1, -((2b-1)\alpha+2b)\}$ $\{\alpha+2-2b, (1-2b)\alpha-1,$ $-((2-2b)\alpha+1-2b)\}$ $\{\alpha+2-3b, (1-3b)\alpha-1,$ $-((2-3b)\alpha+1-3b)\}$ $\{\alpha+2-4b, (1-4b)\alpha-1,$ $-((2-4b)\alpha+1-4b)\}$ $\{-(\alpha+3-4b), -((2-4b)\alpha-1),$ $(3-4b)\alpha+2-4b\}$ $\{(\alpha+1-b)^2, (b\alpha+1)^2, ((1-b)\alpha-b)^2\}$ $\{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b,$ $(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b)\}$ $\{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b,$ $(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1,$ $-((b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b)\}$
$D=7$ *und* $t \neq -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2}$	$2t+1-2i\sqrt{7}$	$\{-(\alpha+1-b), b\alpha+1, (1-b)\alpha-b\}$
$D=7$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$ $\|t\|=2\sqrt{11}$	$11-2i\sqrt{7}$ $11+2i\sqrt{7}$	$\{\alpha+2-b, (1-b)\alpha-1, -((2-b)\alpha+1-b)\}$ $\{-(\alpha-b), (1+b)\alpha+1, -(b\alpha+1+b)\}$

$\mathcal{L}(t,\alpha,\beta)$		
$D=7$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$ $\lvert t\rvert=4$	$4+i\sqrt{7}$	$\{-(\alpha-b),(1+b)\alpha+1,-(b\alpha+1+b)\}$
	$4-i\sqrt{7}$	$\{\alpha+2-b,(1-b)\alpha-1,-((2-b)\alpha+1-b)\}$
	$1-2i\sqrt{7}$	$\{\alpha+1-2b,-(2b\alpha+1),(2b-1)\alpha+2b\}$
	$1+2i\sqrt{7}$	$\{-(\alpha+2-2b),-((1-2b)\alpha-1),(2-2b)\alpha+1-2b\}$
	$\frac{7}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$\{-(2\alpha+1-b),(1+b)\alpha+2,(1-b)\alpha-1-b\}$
	$\frac{7}{2}-\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$\{2\alpha+2-b,-(b\alpha+2),-((2-b)\alpha-b)\}$
	-3	$\{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b,(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+2\alpha+1-b)\}$
	-5	$\{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b,(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+3\alpha+2-b)\}$
	-7	$\{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b,(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1,$ $-(b\alpha^2+4\alpha+3-b)\}$ *oder* $\{(\alpha+1-b)^2,(b\alpha+1)^2,((1-b)\alpha-b)^2\}$
$D=11$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{11}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{69}$	$5i\sqrt{11}$	$\{\alpha-1,-(2\alpha+1),\alpha+2\}$ *oder* $\{-(\alpha+1-b),b\alpha+1,(1-b)\alpha-b\}$
$D=11$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$ $\lvert t\rvert=5$	$2i\sqrt{11}$	$\{-(\alpha+1-b),b\alpha+1,(1-b)\alpha-b\}$
	$7+2i\sqrt{11}$	$\{-(\alpha-b),(1+b)\alpha+1,-(b\alpha+1+b)\}$
	$7-2i\sqrt{11}$	$\{\alpha+2-b,(1-b)\alpha-1,-((2-b)\alpha+1-b)\}$
$D=15$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{15}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{34}$	$3i\sqrt{15}$	$\{\alpha-1,-(2\alpha+1),\alpha+2\}$ *oder* $\{-(\alpha+1-b),b\alpha+1,(1-b)\alpha-b\}$
$D=15$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$ $\lvert t\rvert=2$	3	$\{\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+1\}$
$D=19$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{5}$	-3	$\{2\alpha+3-b,(1-b)\alpha-2,-((3-b)\alpha+1-b)\}$
	2	$\{\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+1\}$
	4	$\{(\alpha^2+\alpha+1)^2,(\alpha^2+\alpha+1)^2,(\alpha^2+\alpha+1)^2\}$
$D=23$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$ $\lvert t\rvert=\sqrt{6}$	$i\sqrt{23}$	$\{\alpha-1,-(2\alpha+1),\alpha+2\}$, $\{3\alpha+2-b,-((1+b)\alpha+3),-((2-b)\alpha-1-b)\}$ *oder* $\{5\alpha+3-b,-((2+b)\alpha+5),-((3-b)\alpha-2-b)\}$
	$\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$	$\{2\alpha+1-b,-((1+b)\alpha+2),-((1-b)\alpha-1-b)\}$
	$\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{23}}{2}$	$\{-(2\alpha+2-b),b\alpha+2,(2-b)\alpha-b\}$
$D=31$ *und* $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$ $\lvert t\rvert=2\sqrt{2}$	$i\sqrt{31}$	$\{\alpha-1,-(2\alpha+1),\alpha+2\}$, $\{-(3\alpha+2-b),(1+b)\alpha+3,(2-b)\alpha-1-b\}$ *oder* $\{-(5\alpha+4-3b),(1+3b)\alpha+5,(4-3b)\alpha-1-3b\}$
	$\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{31}}{2}$	$\{2\alpha+1-b,-((1+b)\alpha+2),-((1-b)\alpha-1-b)\}$
	$\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$	$\{-(2\alpha+2-b),b\alpha+2,(2-b)\alpha-b\}$
	-3	$\{\alpha^2+\alpha+2,2\alpha^2+\alpha+1,2\alpha^2+3\alpha+2\}$, $\{\alpha^2+2\alpha+2,\alpha^2+1,2\alpha^2+2\alpha+1\}$ *oder* $\{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2,\alpha^2+b\alpha+1+b,$ $2\alpha^2-(b-2)\alpha+1\}$

$\mathcal{L}(t, \alpha, \beta)$		
$D = 35$ *und* $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$ $\lvert t\rvert = 3$	$i\sqrt{35}$	$\{\alpha - 1, -(2\alpha + 1), \alpha + 2\}$, $\{-(2\alpha + 1 - b), (1 + b)\alpha + 2, (1 - b)\alpha - 1 - b\}$ *oder* $\{-(2\alpha + 2 - b), b\alpha + 2, (2 - b)\alpha - b\}$
	-2	$\{\alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + 1\}$
	4	$\{(\alpha^2 + \alpha + 1)^2, (\alpha^2 + \alpha + 1)^2, (\alpha^2 + \alpha + 1)^2\}$
	-5	$\{\alpha^2 + \alpha + 4, 4\alpha^2 + \alpha + 1, 4\alpha^2 + 7\alpha + 4\}$ *oder* $\{\alpha^2 + 2\alpha + 2, \alpha^2 + 1, 2\alpha^2 + 2\alpha + 1\}$
$D = 39, 43, 47, 51, 55$ *und* $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$	$t^2 + t + 7$	$\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$

Kapitel 3

Annähernd lösungsfreie Mengen der relativen Thue-Gleichung

3.1 Einleitung

Wie bereits im Kapitel 1 gezeigt wurde, ist das Lösen der Thue-Gleichung (1.1) äquivalent zum Berechnen aller Werte γ, die die Ungleichung $|N_{k(\alpha)/k}(\gamma)| \leq |2t+1|$ erfüllen. Alle Elemente mit kleiner Norm wurden bereits im vorigen Kapitel berechnet, nun kann mit diesen Werten die Thue-Gleichung gelöst werden. Zu diesem Zweck wird im folgenden eine obere Schranke für $|\Lambda_j| = \left|\log\left|\frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j+2)}}\right| - \log\left|\frac{\alpha^{(j)}-\alpha^{(j+1)}}{\alpha^{(j)}-\alpha^{(j+2)}}\right|\right|$ mit $\gamma^{(j)} = x - \alpha^{(j)}y$ berechnet. Diese Schranke wird dann gemeinsam mit bestimmten Bedingungen an $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ dazu verwendet, Lösungen (x, y) der Thue-Gleichung (1.1) zu finden. In Kapitel 4 wird dann untersucht, ob es unter den $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$, die diese Bedingungen nicht erfüllen, ebenfalls Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) gibt.

Einige einführende Bemerkungen über den rational-ganzzahligen Fall

Im rational-ganzzahligen Fall konnten Mignotte, Pethő und Lemmermeyer [11] mithilfe von Kettenbrüchen Eigenschaften bestimmen, die die Lösungen (x, y) der Thue-Gleichung erfüllen müssen. Dabei verwendeten sie die Kettenbruchentwicklung der Nullstelle λ von

$$f_n(x) = x^3 - (n-1)x^2 - (n+2)x - 1$$

mit ganzzahligem Parameter n. Sie konnten zeigen, dass für eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$|F_n(x, y)| = |x^3 - (n-1)x^2y - (n+2)xy^2 - y^3| = 2n + 1 \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{x}{y} - \lambda\right| < \frac{1}{2y^2}$$

gilt, wenn $n = 1, |y| \geq 8$, $n = 2, |y| \geq 6$ oder $n \geq 3, |y| \geq 5$ ist. In diesen Fällen ist $\frac{x}{y}$ eine Konvergente von λ. Weiters bewiesen sie, dass bis auf einige Einzellösungen alle Lösungen der Gleichung (3.1) Konvergenten von λ sein müssen.

Das Konzept der Approximation von reellen Zahlen durch rationale Zahlen durch sogenannte Farey-Brüche bzw. Farey-Intervalle wurde von A. Schmidt (siehe etwa [12], [13], [14], [15]) auf

gewisse imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ verallgemeinert. An die Stelle der Farey-Intervalle treten dann zweidimensionale geometrische Figuren wie Farey-Dreiecke (kurz FT), Farey-Rechtecke (kurz FQ) oder Farey-Hexagone (kurz FH) mit den Eckpunkten $\frac{p_j}{q_j}$ in $\mathbb{Z}_k$, $q_j \neq 0$, $j = 1, ...n$ (abhängig von der Figur). Mit diesen Figuren lässt sich dann eine Kette $FP^{(0)}, FP^{(1)}, ...$ bilden, sodass $FP^{(n+1)}$ ein FT, FQ oder FH ist und $FP^{(n+1)} \subset FP^{(n)}$ gilt. Man kann dann zeigen, dass jedes $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ in so einer Kette enthalten ist und $\lim_{n\to\infty} \frac{p_j^{(n)}}{q_j^{(n)}} = \xi$ für alle j gilt (Konvergenten).
Diese Verallgemeinerung lässt sich hier i.a. jedoch nicht anwenden, um die Lösungsmenge $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ der Thue-Gleichung (1.1) einzuschränken, da die genannten Approximationsresultate von Schmidt nur für die Diskriminanten $D = 1, 2, 3, 7, 11$ erzielt werden konnten. Wir mussten daher eine andere Vorgangsweise wählen.

3.2 Eine obere Schranke für $\left|x/y - \alpha^{(j)}\right|$

Es wird nun eine obere Schranke für $\left|x/y - \alpha^{(j)}\right|$ ermittelt, die dann dazu verwendet wird, eine obere Schranke für $|\Lambda_j|$ zu ermitteln.

Sei $j \in \{1, 2, 3\}$ so gewählt, dass

$$|\gamma^{(j)}| = \min_{l\in\{1,2,3\}} |\gamma^{(l)}| = \min_{l\in\{1,2,3\}} |x - \alpha^{(l)}y| \tag{3.2}$$

gilt. Sei $D_{f_t} = \prod_{i<j}(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)})^2 = (t^2 + t + 7)^2$ die Diskriminante von f_t. Dann gilt

$$D_{f_t} = \left(\frac{\gamma^{(j+1)}}{y}\right)^2 \left(\frac{\gamma^{(j+2)}}{y}\right)^4 \left(1 - \frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j+2)}}\right)^2 \left(1 - \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+2)}}\right)^2 \left(1 - \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+1)}}\right)^2. \tag{3.3}$$

Dies lässt sich durch Einsetzen von $\gamma^{(j)} = x - \alpha^{(j)}y$ leicht nachrechnen. Nun wird das folgende Hilfsresultat verwendet.

Lemma 3.1

$$\max_{\substack{z_1,z_2\in\mathbb{C}\\ |z_1|\leq 1,\, |z_2|\leq 1,\, |z_2|\leq|z_1|}} \left|(1 - z_1)(1 - z_2)\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)\right| = 3\sqrt{3}.$$

Beweis Sei $g(u, w) := (1 - u)(1 - w)(1 - uw)$ und $M := \max_{\substack{|u|\leq 1\\ |w|\leq 1}} |g(u, w)|$.

Da $|g(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})| = 3\sqrt{3}$ gilt, folgt daraus $M \geq 3\sqrt{3}$. Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, seien

$$A := \{z : |z| \leq 1\} \cap \{z : |1 - z| \leq 1\} \quad \text{und} \quad B := \{z : |z| \leq 1\}\backslash A.$$

Fall 1: $\{u, w, uw\} \cap A \neq \emptyset$. Dann existiert ein $z \in \{u, w, uw\} \cap A$ für das $|1 - z| \leq 1$ gilt, sodass sich $|g(u, w)| \leq 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4 < 3\sqrt{3}$ ergibt.
Fall 2: $\{u, w, uw\} \cap A = \emptyset$. In diesem Fall seien $u := \rho e^{i\varphi}$ und $w := \sigma e^{i\psi}$ die Polardarstellungen von u und v. Da u, w und uw nicht in A liegen, wird der Abstand dieser Punkte zu 1 nicht

kleiner, wenn ρ oder σ größer werden. Darum muss $\rho = \sigma = 1$ sein, um das Maximum zu erhalten. Da $|1-u| = 2|\sin\frac{\varphi}{2}|$,$|1-w| = 2|\sin\frac{\psi}{2}|$ und $|1-uw| = 2|\sin\frac{\varphi+\psi}{2}|$ gilt, kann man in diesem Fall

$$|g(u,w)| \le 8 \max_{\varphi,\psi,\varphi+\psi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\right|$$

schreiben. ($\varphi,\psi,\varphi+\psi \in \{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\}$ implizieren $|g(u,w)| \le 4$, da in diesem Fall $|1-u| = 1, |1-w| = 1$ oder $|1-uw|$=1 gilt.)

Seien $\alpha := \frac{\varphi}{2}$, $\beta := \frac{\psi}{2}$ und $h(\alpha,\beta) := \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.
Für die relativen Maxima von $h(\alpha,\beta)$ gilt $\frac{\partial h}{\partial\alpha} = 0$, d.h. $\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = 0$ oder $-\tan(\alpha+\beta) = \tan\alpha$ ($\cos\alpha \neq 0$). Falls $\cos\alpha = 0$ ist, gilt auch $\cos(\alpha+\beta) = 0$, und es ergibt sich ein Widerspruch. Außerdem gilt $\frac{\partial h}{\partial\beta} = 0$, d.h. $\cos\beta\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 0$ oder $-\tan(\alpha+\beta) = \tan\beta$ ($\cos\beta \neq 0$). Falls $\cos\beta = 0$ ist, gilt auch $\cos(\alpha+\beta) = 0$, und man erhält einen Widerspruch. Deshalb gilt $\tan\alpha = \tan\beta = -\tan(\alpha+\beta)$. Da $\alpha,\beta,\alpha+\beta \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$, $\alpha = \beta = \pi-(\alpha+\beta)$ gilt, folgt, dass $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ und $\varphi = \psi = \frac{2\pi}{3}$, was $u = w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ entspricht. Deswegen erhält man $M = 3\sqrt{3}$. □

Sei (x,y) eine Lösung der Thue-Gleichung (1.1) und $\gamma^{(j)} = x-\alpha^{(j)}y$. Nun kann Lemma 3.1 auf (3.3) mit der Wahl $z_1 = \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+1)}}$ und $z_2 = \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+2)}}$ angewendet werden. Man erhält

$$\left|\left(1-\frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+1)}}\right)\left(1-\frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j+2)}}\right)\left(1-\frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j+2)}}\right)\right| = 3\sqrt{3}.$$

Daraus folgt $|D_{f_t}| = |t^2+t+7|^2 \le \left|\frac{\gamma^{(j+1)}}{y}\right|^2\left|\frac{\gamma^{(j+2)}}{y}\right|^4(3\sqrt{3})^2$. Multipliziert man diese Ungleichung mit $\left|\frac{\gamma^{(j+1)}}{y}\right|^2\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right|^4$ und verwendet die Ungleichung

$$|N_{k(\alpha)/k}(\gamma^{(j)})| = |\gamma^{(j)}||\gamma^{(j+1)}||\gamma^{(j+2)}| = |\ell|,$$

so ergibt sich

$$\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right| \le \left(\frac{(3\sqrt{3})^2|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2}\right)^{1/6}\frac{1}{|y|^2} \tag{3.4}$$

unter der Bedingung, dass $|\gamma^{(j+1)}| \le |\gamma^{(j+2)}|$ gilt. Ist die umgekehrte Ungleichung gültig, so führt eine analoge Argumentation zum gleichen Ergebnis.

Mithilfe von $|\ell| \le |2t+1|$ und der Dreiecksungleichung ergibt sich für $|t| \ge 6$ unter Verwendung von

$$\frac{|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2} \le \frac{|2t+1|^4}{|t^2+t+7|^2} = 2^4\left|1-\frac{27}{4}\frac{1}{t^2+t+7}\right|^2 \le 2^4\left|1+\frac{27}{4}\frac{1}{|t|^2-|t|-7}\right|^2$$

aus (3.4) die folgende Ungleichung

$$\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right| \le \left(\frac{(3\sqrt{3})^2|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2}\right)^{1/6}\frac{1}{|y|^2} \le 3^{1/2}4^{1/3}\left|1+\frac{27}{4}\frac{1}{|t|^2-|t|-7}\right|^{1/3}\frac{1}{|y|^2},$$

sodass man schließlich

$$\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right| = \min_{l\in\{1,2,3\}}\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(l)}\right| \leq \frac{2.9958}{|y|^2} \tag{3.5}$$

erhält. Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man unter Verwendung von $|t| = |t+1|$ und $t(t+1) = -|t|^2$

$$\frac{|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2} \leq 2^4\left|1-\frac{27}{4}\frac{1}{t^2+t+7}\right|^2 \leq 2^4\left|1-\frac{27}{4}\frac{1}{7-|t|^2}\right|^2$$

und damit die schärfere Ungleichung

$$\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right| \leq \frac{2.9482}{|y|^2}. \tag{3.6}$$

Nun wird dieses Ergebnis mithilfe von “Bootstrapping” ähnlich wie in [11, p. 263f] verbessert. Dazu sei $|y| \geq 4$. Dann impliziert (3.5), dass

$$\min_{l\in\{1,2,3\}}\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(l)}\right| = \left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right| \leq 0.18723.$$

Darum gilt für $l \in \{j+1, j+2\}$ mithilfe von (2.3)

$$\begin{aligned} |x-\alpha^{(l)}y| &\geq \left(|\alpha^{(l)}-\alpha^{(j)}| - \left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right|\right)|y| \geq \left(|\alpha^{(l)}-\alpha^{(j)}| - 0.18723\right)|y| \\ &\geq \left(|\alpha^{(3)}-\alpha^{(2)}| - 0.18723\right)|y| \geq (0.96097-0.18723)|y| = 0.773747|y|. \end{aligned}$$

Weiters gilt, wieder unter Verwendung von (2.3), dass es ein $l \in \{j+1, j+2\}$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} |x-\alpha^{(l)}y| &\geq \left(|\alpha^{(l)}-\alpha^{(j)}| - \left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right|\right)|y| \geq \left(|\alpha^{(l)}-\alpha^{(j)}| - 0.18723\right)|y| \\ &\geq \left(\min(|\alpha^{(2)}-\alpha|, |\alpha^{(3)}-\alpha|) - 0.18723\right)|y| \\ &\geq (|t| - 1.56246 - 0.18723)|y| = (|t| - 1.74969)|y|. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ungleichungen in

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right| = \frac{|N(\gamma)|}{|x-\alpha^{(j+1)}y||x-\alpha^{(j+2)}y||y|}$$

ein, so folgt daraus

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right| \leq \frac{|2t+1|}{0.773747\cdot||t|-1.74969||y|^3} \leq \frac{3.95297}{|y|^3}.$$

Man erhält also das folgende Resultat.

Lemma 3.2 *Sei $|t| \geq 6$ und $|y| \geq 4$ und (x, y) eine Lösung von (1.1). Dann gilt*

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(j)}\right| = \min_{l\in\{1,2,3\}}\left|\frac{x}{y}-\alpha^{(l)}\right| \leq \frac{3.95297}{|y|^3}.$$

Korollar 3.3 *Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man mit den Bedingungen von Lemma 3.2 die bessere Abschätzung*

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha^{(j)}\right| \leq \frac{3.63241}{|y|^3}.$$

Nun verwendet man die folgende Notation

$$\alpha^{(j)} = \lfloor \alpha^{(j)} \rfloor + \{\alpha^{(j)}\}, \tag{3.7}$$

wobei $\lfloor \alpha^{(1)} \rfloor = t$, $\lfloor \alpha^{(2)} \rfloor = -1$ und $\lfloor \alpha^{(3)} \rfloor = 0$ die "Ganzteile" von $\alpha^{(j)}$ ($j \in \{1,2,3\}$) bezeichnen. Dann gilt mit Lemma 3.2 für $|t| \geq 6$, $|y| \geq 4$ und $x \notin \{0, -y, ty\}$

$$\frac{3.95297}{|y|^3} \geq \left| \frac{x - \lfloor \alpha^{(j)} \rfloor y}{y} - \{\alpha^{(j)}\} \right| \geq \frac{1}{|y|} - |\{\alpha^{(j)}\}|.$$

Die letztere Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass $|z_1 - z_2| \geq 1$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_k$, $z_1 \neq z_2$ gilt. Daraus erhält man

$$\frac{1}{|y|}\left(1 - \frac{3.95297}{|y|^2}\right) \leq |\{\alpha^{(j)}\}|.$$

Verwendet man die Entwicklungen (2.3) für $\alpha^{(j)}$, so ergibt sich $|\{\alpha^{(j)}\}| \leq |\{\alpha\}| \leq \frac{2.302166}{|t|}$ und deshalb

$$|y| \geq \frac{0.75294}{|\{\alpha^{(j)}\}|} \geq \frac{0.75294}{|\{\alpha^{(1)}\}|} \geq 0.32706|t|.$$

Also hat man das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 3.4 *Sei $|t| \geq 6$ und $|y| \geq 4$ und sei $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ eine Lösung der Thue-Gleichung* (1.1) *mit $x \notin \{0, -y, ty\}$. Dann gilt*

$$|y| \geq 0.32706|t|.$$

Korollar 3.5 *Sei $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ eine Lösung von* (1.1)*. Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man mit den Bedingungen aus Lemma 3.4 die schärfere Abschätzung*

$$|y| \geq 0.33576|t|.$$

3.3 Eine obere Schranke für Λ_j

In diesem Abschnitt wird eine obere Schranke für Λ_j erzielt, die dann dazu verwendet wird, Mengen in $\mathbb{Z}_k$ zu bestimmen, die keine Lösungen x und y der Thue-Gleichung (1.1) enthalten.

Um eine obere Schranke für

$$\Lambda_j = \log\left|\frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j+2)}}\right| - \log\left|\frac{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+1)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+2)}}\right| \tag{3.8}$$

mit $\gamma^{(j)} = x - \alpha^{(j)} y$ zu erhalten, verwendet man die Gleichung (vgl. [1, Gleichung (14)])

$$|\gamma^{(l)}| = |x - \alpha^{(l)} y| = |y||\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}| \left|1 + \frac{x/y - \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}}\right|$$

bzw.

$$\log|\gamma^{(l)}| = \log|y| + \log|\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}| + \log\left|1 + \frac{x/y - \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}}\right| \tag{3.9}$$

mit $l \in \{j+1, j+2\}$. Unter Verwendung von Lemma 3.2 ergibt sich für j

$$\left|\frac{x/y - \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}}\right| \leq \frac{3.95297}{|y|^3}\frac{1}{|\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|} \leq \frac{4.11349}{|y|^3}. \tag{3.10}$$

Für $|y| \geq 4$ ist die rechte Seite von (3.10) kleiner als 1, und man kann daher

$$|\log|1+z|| \leq |\log(1-|z|)| = \log\frac{1}{1-|z|} \leq \frac{|z|}{1-|z|}$$

(für $|z| \leq 1$) anwenden, sodass sich aus (3.10) für $|y| \geq 4$

$$\log\left|1 + \frac{x/y - \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}}\right| \leq \frac{4.39604}{|y|^3}$$

ergibt.

Bildet man die Differenz der beiden Fälle $l = j+1$ und $l = j+2$ von (3.9), so erhält man die folgende Abschätzung.

Lemma 3.6 *Sei $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ eine Lösung von* (1.1)*. Für $|t| \geq 6$, $|y| \geq 4$, $x \notin \{0, -y, ty\}$ und $l \in \{j+1, j+2\}$ gilt*

$$|\Lambda_j| \leq \frac{8.79208}{|y|^3}.$$

Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ erhält man mit dieser Methode die folgende schärfere Abschätzung.

Lemma 3.7 *Mit den Bedingungen von Lemma 3.6 und $\Re t = -\frac{1}{2}$ ergibt sich*

$$|\Lambda_j| \leq \frac{8.03434}{|y|^3}.$$

Bemerkung 3.8 *Die beiden oberen Schranken aus Lemma 3.6 bzw. Lemma 3.7 sind nur für $|t| \geq 6$ gültig, für alle t mit $|t| < 6$ verwendet man* (3.4)*, wo der exakte Wert von t und die Ungleichung $|\ell| \leq |2t+1|$ eingesetzt werden. Dieses Ergebnis wird dann analog zu oben mittels "Bootstrapping" verbessert.*

3.4 Annähernd lösungsfreie Mengen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es Paare $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ mit bestimmten Eigenschaften gibt, die, bis auf einige wenige Einzelfälle, keine Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) sind.

Dazu benötigt man die folgende Darstellung für Λ_j.

Lemma 3.9 *Sei Λ_j wie in (3.8) definiert, (x,y) eine Lösung von (1.1) und $\gamma = x - \alpha y$ nicht zu einer ganzen Zahl in $\mathbb{Z}_k$ assoziiert. Dann gilt*

$$|\Lambda_j| = |\log|\delta_j| + A_j \log|\alpha| + B_j \log|\alpha + 1||$$

mit $A_j, B_j \in \mathbb{Z}$, wobei δ_j der Quotient von zwei zyklisch aufeinander folgenden Elementen in einem der Tripel aus Satz 2.15 ist.

Beweis Sei Λ_j wie in (3.8) und γ wie in (2.13) definiert. Setzt man diese Darstellung von γ in (3.8) ein, so erhält man

$$\Lambda_j = \log\left|\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}\right| + \log\left|\frac{\alpha^{(j+1)b_1}(\alpha^{(j+1)}+1)^{b_2}}{\alpha^{(j+2)b_1}(\alpha^{(j+2)}+1)^{b_2}}\right| - \log\left|\frac{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+1)}}{\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+2)}}\right|.$$

Da $\alpha^{(j)}, \alpha^{(j+1)}, \alpha^{(j+2)}$ durch α und $\alpha + 1$ ausgedrückt werden können und $\delta_j = \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}$ gesetzt werden kann, erhält man das Resultat. □

Korollar 3.10 *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.9 gültig. Gilt $\Re t = -\frac{1}{2}$, so folgt*

$$|\Lambda_j| = |\log|\delta_j| + C_j \log|\alpha||$$

mit $C_j \in \mathbb{Z}$, wobei δ_j der Quotient von zwei zyklisch aufeinander folgenden Elementen in einem der Tripel aus der Liste von Korollar 2.18 ist.

Beweis Dieses Resultat folgt aus Lemma 3.9, da $|\alpha| = |\alpha + 1|$ für $\Re t = -\frac{1}{2}$ gilt (vgl. Lemma 2.4). □

Im verbleibenden Teil dieser Arbeit sei nun immer $\Re t = -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt.

Bemerkung 3.11 *Der Grund für diese Einschränkung ist, dass im Fall $\Re t = -\frac{1}{2}$ die Linearform in Logarithmen, die untersucht werden muss (vgl. Korollar 3.10), wesentlich einfacher handzuhaben ist als die Linearform im allgemeinen Fall (vgl. Lemma 3.9), wo man den Logarithmus von $|\alpha|$ und $|\alpha + 1|$ getrennt von einander betrachten muss.*

Für $\Re t = -\frac{1}{2}$ wird die Thue-Gleichung (1.1) vollständig gelöst. Zuerst wird gezeigt, dass Werte x und $y \in \mathbb{Z}_k$ mit bestimmten Eigenschaften nur in Einzelfällen Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) sind. In Kapitel 4 werden dann alle Werte x und y, die diese Einschränkungen nicht erfüllen, in Hinblick auf ihren Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung (1.1) betrachtet.

Im Folgenden werden die Ergebnisse von Kapitel 2 und Abschnitt 3.3 kombiniert, um alle Lösungen $(x,y) \in \mathbb{Z}_k^2$ der relativen Thue-Gleichung (1.1) mit den folgenden Eigenschaften zu berechnen:

$$\begin{cases} \bullet\ |y| \geq 4 \text{ (für } |t| \geq 6) \text{ bzw. } |y| \geq 7 \text{ (für } |t| < 6), \\ \bullet\ x \notin \{0, -y, ty\} \text{ und} \\ \bullet\ \gamma = x - \alpha y \text{ ist nicht zu einer Zahl aus } \mathbb{Z}_k \text{ assoziiert.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Zu diesem Zweck werden nun alle Fälle von β aus der Liste in Korollar 2.18 untersucht. Die Vorgehensweise ist dabei in allen Fällen die gleiche:

Man setzt die Werte von β in die Darstellung von $|\Lambda_j|$ aus Korollar 3.10 ein und berechnet eine untere Schranke für $|\Lambda_j|$. Für β, die nur für ein spezielles t auftreten, verwendet man dazu den exakten Wert von α, in allen anderen Fällen benötigt man die Darstellung (2.3). Mithilfe der oberen Schranke $|\Lambda_j|$ aus Lemma 3.7 (für $|t| \geq 6$) bzw. analogen oberen Schranken für alle t mit $|t| < 6$ (vgl. Bemerkung 3.8) erhält man immer einen Widerspruch zu dieser unteren Schranke genau dann, wenn $\Lambda_j \neq 0$ gilt. Unter den Voraussetzungen (3.11) können also nur jene β eine Lösung der Thue-Gleichung (1.1) liefern, für die $\Lambda_j = 0$ gilt. Diese Sonderfälle werden später behandelt. Das Programm zur Berechnung der Schranken wird in Anhang A.4.1 beschrieben.

(i) $\{\alpha - 1, 2\alpha + 1, \alpha + 2\}$ (für alle D und beliebige t)

(i.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha - 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha-1}{\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{\alpha-1}{2\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha-1}{2\alpha+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2\alpha+1}\right)$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log\left|1 - \frac{3}{2\alpha + 1}\right|.$$

Unter Verwendung von (2.3) ergibt sich für $\underline{|t| \geq 6}$

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + L_6\left(\frac{2.489}{|t|}\right).$$

Mithilfe von Lemma 3.7 erhält man für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log|\alpha| - \log 2 + L_6\left(\frac{2.489}{|t|}\right)\right| \leq \frac{8.03434}{|y|^3} \leq 0.12554.$$

Die linke Seite wird minimal für $C_j + 1 = 0$, wobei sie durch 0.2784 nach unten beschränkt wird. Daraus folgt ein Widerspruch zu Lemma 3.7.
Nun werden noch alle Fälle mit $\underline{|t| < 6}$ untersucht. Diese werden hier nur in komprimierter Form angegeben.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.07453$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.84732 - \log 2 + \log 1.07453|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.621262, obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 15.0927$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 0.509825 - \log 2 + \log 15.0927|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 3$, und man bekommt $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird später untersucht.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.09344$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.42811 - \log 2 + \log 1.09344|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.603815, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 9.41325$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 0.525054 - \log 2 + \log 9.41325|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.260465, obere Schranke 0.038577 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
<u>$D=11$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 1.05318,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.56711-\log 2+\log 1.05318|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.641337, obere Schranke 0.10886 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
<u>$D=11$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{11}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 7.09539,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 0.543689-\log 2+\log 7.09539|\,.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.0475423, obere Schranke 0.0289256 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.
<u>$D=15$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{15}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 1.03725,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 5.46816-\log 2+\log 1.03725|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.656576, obere Schranke 0.0989171 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
<u>$D=15$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 5.67184,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 0.567614-\log 2+\log 5.67184|\,.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.090262, obere Schranke 0.0458768 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.
<u>$D=19$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 4.60993,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 0.600919-\log 2+\log 4.60993|\,.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.183526, obere Schranke 0.0812731 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.
<u>$D=23$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 3.67273,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 0.655866-\log 2+\log 3.67273|\,.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.185988, obere Schranke 0.100159 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.
<u>$D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 1.33283,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 1.77423-\log 2+\log 1.33283|\,.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.167522, obere Schranke 0.143915 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.
<u>$D=35$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$:</u> $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2+\log 1.24368,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 2.08931-\log 2+\log 1.24368|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.261766, obere Schranke 0.156558 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

$\underline{D = 39 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{39}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.19569,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 2.34231 - \log 2 + \log 1.19569| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.336717, obere Schranke 0.292454 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 43 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{43}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.16457,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 2.56248 - \log 2 + \log 1.16457| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.40018, obere Schranke 0.228888 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 47 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{47}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.14243,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 2.7611 - \log 2 + \log 1.14243| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.455638, obere Schranke 0.194681 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 51 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{51}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.12575,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 2.94401 - \log 2 + \log 1.12575| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.505073, obere Schranke 0.1733 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 55 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{55}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.11268,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.11471 - \log 2 + \log 1.11268| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.54976, obere Schranke 0.158662 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 59 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{59}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.10214,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.27553 - \log 2 + \log 1.10214| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.590586, obere Schranke 0.148006 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 67 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{67}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.08614,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.57369 - \log 2 + \log 1.08614| .$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.610519, obere Schranke 0.133519 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D = 71 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{71}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.07991,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.71318 - \log 2 + \log 1.07991| .$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.616271, obere Schranke 0.128367 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=79$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{79}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.06984,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.97672 - \log 2 + \log 1.06984|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.625636, obere Schranke 0.120555 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=83$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{83}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.06571,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.10186 - \log 2 + \log 1.06571|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.629503, obere Schranke 0.117521 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=87$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{87}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.06205,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.22314 - \log 2 + \log 1.06205|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.632946, obere Schranke 0.114907 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=91$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{91}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.05878,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.34092 - \log 2 + \log 1.05878|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.636032, obere Schranke 0.112631 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=95$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{95}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.05584,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.45549 - \log 2 + \log 1.05584|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.638815, obere Schranke 0.110631 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=103$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{103}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.05076,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.67599 - \log 2 + \log 1.05076|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.643634, obere Schranke 0.107279 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=107$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{107}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.04855,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.78234 - \log 2 + \log 1.04855|\,.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.645735, obere Schranke 0.105861 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=111$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{111}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.04653,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 4.88632 - \log 2 + \log 1.04653|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.647663, obere Schranke 0.10458 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
<u>$D = 115$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{115}}{2}$:</u> $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.04468$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 4.98809 - \log 2 + \log 1.04468|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.64944, obere Schranke 0.103418 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
<u>$D = 119$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{119}}{2}$:</u> $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.04296$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.08779 - \log 2 + \log 1.04296|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.651083, obere Schranke 0.102359 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
<u>$D = 123$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{123}}{2}$:</u> $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.04137$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.18554 - \log 2 + \log 1.04137|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.652606, obere Schranke 0.101389 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
<u>$D = 127$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{127}}{2}$:</u> $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.0399$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.28145 - \log 2 + \log 1.0399|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.654022, obere Schranke 0.100498 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
<u>$D = 131$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{131}}{2}$:</u> $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 1.03853$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.37563 - \log 2 + \log 1.03853|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.655342, obere Schranke 0.099677 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(i.2) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha+1}{2\alpha^{(2)}+1} = -\alpha\frac{2\alpha+1}{\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+1}{\alpha+2}$.
Da $|\alpha + 2| = |\alpha - 1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (i.1) und kann daher analog behandelt werden.

(i.3) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+2}{\alpha^{(2)}+2} = -\alpha\frac{\alpha+2}{\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+2}{\alpha-1}$.
Es gilt $|\alpha + 2| = |\alpha - 1|$ und daher $|\tilde{\delta}_j| = 1$ sowie $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Man bekommt

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq S,$$

wobei S für die oberen Schranken, die in (i.1) berechnet wurden, steht. Für <u>$|t| \geq 6$</u> und $C_j + 1 \neq 0$ erhält man einen Widerspruch zur oberen Schranke aus Lemma 3.7. Für $C_j + 1 = 0$ bekommt man $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird später betrachtet.
Das Gleiche gilt für <u>$|t| < 6$</u>, in diesen Fällen werden jedoch die oberen Schranken verwendet, die für jedes t separat berechnet wurden.

(ii) $\{\alpha + 1 - b, b\alpha + 1, (1 - b)\alpha - b\}$ ($D = 3$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $D = 7$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $D = 11$ und $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{11}}{2}\}$ ebenso wie $D = 15$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{15}}{2}$)

(ii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 1 - b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+1-b}{\alpha^{(2)}+1-b} = -\alpha\frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1}$.
$\underline{D=3}$: Da $|\alpha+1-b| = |b\alpha+1|$ gilt, gilt $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Es ergibt sich

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log|\alpha|| \leq S.$$

S ist eine Abkürzung für die obere Schranke. Für $|t| \geq 6$ ist S die obere Schranke aus Lemma 3.7, für $|t| < 6$ wird S für jedes t extra berechnet. Für $\underline{|t| \geq 6}$ und $C_j + 1 \neq 0$ bekommt man einen Widerspruch zur oberen Schranke aus Lemma 3.7. Für $C_j + 1 = 0$ ergibt sich $\Lambda_j = 0$, sodass dieser Fall extra betrachet werden muss.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: Obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch für $C_j + 1 \neq 0$. Für $C_j + 1 = 0$ erhält man $\Lambda_j = 0$, was eine genauere Betrachtung nötig macht.
$\underline{D=7}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ wie folgt geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{b\alpha+1}\right)$ mithilfe $b^2 = b - 2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b| + \log\left|1 + \frac{1}{b\alpha+1}\right|.$$

Verwendet man (2.3), so führt dies für $\underline{|t| \geq 6}$ zu

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{2} + L_6\left(\frac{1.00965}{|t|}\right).$$

Mithilfe von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log|\alpha| - \log\sqrt{2} + L_6\left(\frac{1.00965}{|t|}\right)\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.1783. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{2} + \log 0.75456$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.42811 - \log 2 + \log 0.75456|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.6038, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 11 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{11}}{2}}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{2}{b\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b - 3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b| + \log\left|1 + \frac{2}{b\alpha+1}\right| = -\log\sqrt{3} + \log 0.85158.$$

Mithilfe von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 8.05941 - \log\sqrt{3} + \log 0.85158\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.70997. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 11 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{3} + \log 0.720193$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 4.56711 - \log\sqrt{3} + \log 0.720193\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.641337, obere Schranke 0.10886 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$D = 15$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{15}}{2}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben:

$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{3}{b\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b - 4$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b| + \log\left|1 + \frac{3}{b\alpha+1}\right| = -\log 2 + \log 0.7052,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.4682 - \log 2 + \log 0.7052|\,.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.6566, obere Schranke 0.0989 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(ii.2) $\beta^{(j+1)} = b\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha+1}{b\alpha^{(2)}+1} = \alpha\frac{b\alpha+1}{(1-b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+1}{(1-b)\alpha-b}$.
Da $|b\alpha + 1| = |(1 - b)\alpha - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Es ergibt sich

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq S.$$

(S ist wie in (ii.1) definiert.) Für $|t| \geq 6$ und $C_j + 1 \neq 0$ erhält man einen Widerspruch zu Lemma 3.7. Für $C_j + 1 = 0$ bekommt man $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird später noch genauer betrachtet.
Das Gleiche gilt für $|t| < 6$, in diesen Fällen werden jedoch die oberen Schranken verwendet, die für jedes t separat berechnet wurden.

(ii.3) $\beta^{(j+1)} = (1 - b)\alpha - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-b)\alpha-b}{(1-b)\alpha^{(2)}-b} = -\alpha\frac{(1-b)\alpha-b}{\alpha+1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-b}{\alpha+1-b}$.
Da $|b\alpha + 1| = |(1 - b)\alpha - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (ii.1). Deshalb kann dieser Fall analog behandelt werden.

(iii) $\{\alpha + 1 + b, b\alpha - 1, (1 + b)\alpha + b\}$ ($D = 3$ für beliebige t mit $|t| \geq 8$ und einige t mit $6 < |t| < 8$)

(iii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 1 + b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+1+b}{\alpha^{(2)}+1+b} = \alpha\frac{\alpha+1+b}{b\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1+b}{b\alpha-1}$.
Da $|\alpha + 1 + b| = |b\alpha - 1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Verwendet man Lemma 3.7, so erhält man für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq 0.12554.$$

Für $|t| \geq 6$ und $C_j + 1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ bekommt man $\Lambda_j = 0$, sodass dieser Fall noch genauer betrachtet werden muss.

(iii.2) $\beta^{(j+1)} = b\alpha - 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha-1}{b\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{b\alpha-1}{(1+b)\alpha+b}$, sei
$\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha-1}{(1+b)\alpha+b} = \frac{b}{1+b}\left(1 - \frac{2b}{(2b-1)\alpha-1+b}\right)$ mit $b^2 = b - 1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| - \log|1 + b| + \log\left|1 - \frac{2b}{(2b-1)\alpha - 1 + b}\right|.$$

Unter Verwendung von (2.3) führt dies auf

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{3} + L_6\left(\frac{1.78362}{|t|}\right).$$

Mithilfe von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log|\alpha| - \log\sqrt{3} + L_6\left(\frac{1.78362}{|t|}\right)\right| \leq 0.12554.$$

Für $|t| \geq 6$ wird die linke Seite minimal für $C_j + 1 = 0$ und besitzt die obere Schranke 0.252. Dies liefert einen Widerspruch zu Lemma 3.7.

(iii.3) $\beta^{(j+1)} = (1+b)\alpha + b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1+b)\alpha+b}{(1+b)\alpha^{(2)}+b} = -\alpha\frac{(1+b)\alpha+b}{\alpha+1+b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+b}{\alpha+1+b}$.
Da $|\alpha+1+b| = |b\alpha-1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (iii.2) und kann deshalb analog behandelt werden.

(iv) $\{\alpha - b, (1+b)\alpha+1, b\alpha+1+b\}$ ($D = 3$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $D = 7$ und $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}\}$ sowie $D = 11$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}$)

(iv.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha-b}{\alpha^{(2)}-b} = -\alpha\frac{\alpha-b}{(1+b)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha-b}{(1+b)\alpha+1}$.
$\underline{D=3}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha-b}{(1+b)\alpha+1} = \frac{1}{b+1}\left(1 - \frac{2b}{(1+b)\alpha+1}\right)$ mithilfe $b^2 = b - 1$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b+1| + \log\left|1 - \frac{2b}{(1+b)\alpha+1}\right|.$$

Verwendet man (2.3), so ergibt sich für $\underline{|t| \geq 6}$

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{3} + L_6\left(\frac{1.78362}{|t|}\right).$$

Die Anwendung von Lemma 3.7 liefert für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log|\alpha| - \log\sqrt{3} + L_6\left(\frac{1.78362}{|t|}\right)\right| \leq 0.12554.$$

Die linke Seite wird minimal für $C_j + 1 = 0$ und ist durch 0.252 nach unten beschränkt. Dies führt auf einen Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{3} + \log 0.883042,$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.84732 - \log\sqrt{3} + \log 0.883042\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.673689, obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha-b}{(1+b)\alpha+1} = \frac{1}{b+1}\left(1 + \frac{1-2b}{(1+b)\alpha+1}\right)$ mithilfe $b^2 = b - 2$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b+1| + \log\left|1 + \frac{1-2b}{(1+b)\alpha+1}\right| = -\log 2 + \log 0.8502.$$

Die Anwendung von Lemma 3.7 liefert für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 6.3187 - \log 2 + \log 0.8502| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.8554. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 0.75,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.4281 - \log 2 + \log 0.75|\,.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.2512, obere Schranke 0.139898 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D=11 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt schreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha-b}{(1+b)\alpha+1} = \frac{1}{b+1}\left(1+\frac{2-2b}{(1+b)\alpha+1}\right)$ mit $b^2=b-3$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b+1| + \log\left|1+\frac{2-2b}{(1+b)\alpha+1}\right| = -\log\sqrt{5}+\log 0.72398,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 4.56711 - \log\sqrt{5} + \log 0.72398\right|.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.391169, obere Schranke 0.10886 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

(iv.2) $\beta^{(j+1)} = (1+b)\alpha+1: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1+b)\alpha+1}{(1+b)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha\frac{(1+b)\alpha+1}{b\alpha+1+b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+1}{b\alpha+1+b}$.
$\underline{D=3}$: Da $|b\alpha+1+b| = |\alpha-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (iv.1) und kann daher analog behandelt werden.
$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+1}{b\alpha+1+b} = \frac{1+b}{b}\left(1+\frac{1-2b}{(2b-2)\alpha-1+3b}\right)$ mit $b^2=b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|b| + \log\left|1+\frac{1-2b}{(2b-2)\alpha-1+3b}\right| = \log\sqrt{2}+\log 1.0496.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y|\geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 6.3187 + \log\sqrt{2} + \log 1.0496\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.395. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = \log\sqrt{2}+\log 1.082,$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.082\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.4254, obere Schranke 0.139898 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D=11 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ wie folgt geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+1}{b\alpha+1+b} = \frac{1+b}{b}\left(1+\frac{2-2b}{(2b-3)\alpha-2+3b}\right)$ mit $b^2=b-3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|b| + \log\left|1+\frac{2-2b}{(2b-3)\alpha-2+3b}\right| = \log\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\log 1.04218,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 4.56711 + \log\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \log 1.04218\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.296728, obere Schranke 0.10886 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

(iv.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha + 1 + b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha+1+b}{b\alpha^{(2)}+1+b} = \alpha\frac{b\alpha+1+b}{\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+1+b}{\alpha-b}$.
$\underline{D=3}$: Da $|b\alpha + 1 + b| = |\alpha - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Verwendet man Lemma 3.7, so erhält man für $|y| \geq 4$ und $\underline{|t| \geq 6}$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq 0.12554.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ wird $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird noch genauer untersucht.
Dasselbe gilt für $\underline{t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$, in diesem Fall wird die obere Schranke für $|\Lambda_j|$ verwendet, welche im Fall (iv.1) berechnet wurde.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+1+b}{\alpha-b} = b\left(1 - \frac{1-2b}{b\alpha+2-b}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| + \log\left|1 - \frac{1-2b}{b\alpha+2-b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 1.1205.$$

Unter Anwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 6.3187 + \log\sqrt{2} + \log 1.1205\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.4604. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = \log\sqrt{2} + \log 1.2322$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.2322\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.5554, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 11 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+1+b}{\alpha-b} = b\left(1 - \frac{2-2b}{b\alpha+3-b}\right)$, da $b^2 = b - 3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| + \log\left|1 - \frac{2-2b}{b\alpha+3-b}\right| = \log\sqrt{3} + \log 1.32535,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 4.56711 + \log\sqrt{3} + \log 1.32535\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.687897, obere Schranke 0.10886 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(v) $\{\alpha + b, (1 - b)\alpha + 1, b\alpha - 1 + b\}$ ($D = 3$ für $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$)

(v.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+b}{\alpha^{(2)}+b} = -\alpha\frac{\alpha+b}{(1-b)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+b}{(1-b)\alpha+1}$.
Da $|\alpha + b| = |(1 - b)\alpha + 1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Unter Verwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$ und $\underline{|t| \geq 6}$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq 0.12554.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ bekommt man einen Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ ist $\Lambda_j = 0$, sodass noch eine genauere Untersuchung nötig ist.
Dasselbe gilt auch für $\underline{t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$. In diesem Fall wird eine obere Schranke für $|\Lambda_j|$ mithilfe (3.4), wo der exakte Wert von t eingesetzt wird, berechnet. Für $|y| \geq 4$ besitzt $|\Lambda_j|$ die obere Schranke 0.124119, und man bekommt einen Widerspruch.

(v.2) $\beta^{(j+1)} = (1-b)\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-b)\alpha+1}{(1-b)\alpha^{(2)}+1} = \alpha\frac{(1-b)\alpha+1}{b\alpha-1+b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha+1}{b\alpha-1+b}$.
Da $|b\alpha - 1 + b| = |(1-b)\alpha + 1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Verwendet man Lemma 3.7, so erhält man für $|y| \geq 4$ und $\underline{|t| \geq 6}$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log|\alpha|| \leq 0.12554.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ ist $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird noch extra untersucht.
Dies gilt ebenso für $\underline{t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$, wo man die obere Schranke für $|\Lambda_j|$, die im Fall (v.1) berechnet wurde, verwendet.

(v.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha - 1 + b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha-1+b}{b\alpha^{(2)}-1+b} = -\alpha\frac{b\alpha-1+b}{\alpha+b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha-1+b}{\alpha+b}$.
Da $|b\alpha - 1 + b| = |(1-b)\alpha + 1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (v.1) und kann daher ebenso wie in diesem Fall behandelt werden.

(vi) $\{\alpha + 2 - b, (1-b)\alpha - 1, (2-b)\alpha + 1 - b\}$ ($D = 7$ und $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}\}$ sowie $D = 11$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}$)

(vi.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 2 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+2-b}{\alpha^{(2)}+2-b} = \alpha\frac{\alpha+2-b}{(1-b)\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+2-b}{(1-b)\alpha-1}$.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+2-b}{(1-b)\alpha-1} = \frac{1}{1-b}\left(1 + \frac{1-2b}{(1-b)\alpha-1}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|1-b| + \log\left|1 + \frac{1-2b}{(1-b)\alpha - 1}\right| = -\log\sqrt{2} + \log 0.8925.$$

Mithilfe von Lemma 3.7 folgt für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 6.3187 - \log\sqrt{2} + \log 0.8925\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.4604. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\quad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{2} + \log 0.8115,$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 - \log\sqrt{2} + \log 0.8115\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.5554, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 11 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+2-b}{(1-b)\alpha-1} = \frac{1}{1-b}\left(1 - \frac{2b}{(1-b)\alpha-1}\right)$ mit $b^2 = b - 3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|1-b| + \log\left|1 - \frac{2b}{(1-b)\alpha - 1}\right| = -\log\sqrt{3} + \log 0.754518,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 4.56711 - \log\sqrt{3} + \log 0.754518\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.687897, obere Schranke 0.10886 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(vi.2) $\beta^{(j+1)} = (1-b)\alpha - 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-b)\alpha-1}{(1-b)\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{(1-b)\alpha-1}{(2-b)\alpha+1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1}{(2-b)\alpha+1-b}$.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1}{(2-b)\alpha+1-b} = \frac{1-b}{2-b}\left(1 + \frac{1-2b}{2b\alpha+1+b}\right)$ mit $b^2 = b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log|2-b| + \log\left|1 + \frac{1-2b}{2b\alpha+1+b}\right| = -\log\sqrt{2} + \log 0.9527.$$

Verwendet man Lemma 3.7, so bekommt man für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 6.3187 - \log\sqrt{2} + \log 0.9527\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.395. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log\sqrt{2} + \log 0.9242$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 - \log\sqrt{2} + \log 0.9242\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.4254, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 11 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1}{(2-b)\alpha+1-b} = \frac{1-b}{2-b}\left(1 - \frac{2b}{(1+2b)\alpha+2+b}\right)$ mit $b^2 = b-3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log|2-b| + \log\left|1 - \frac{2b}{(1+2b)\alpha+2+b}\right| = \log\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \log 0.959527,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 4.56711 + \log\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \log 0.959527\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.296728, obere Schranke 0.10886 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(vi.3) $\beta^{(j+1)} = (2-b)\alpha + 1 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-b)\alpha+1-b}{(2-b)\alpha^{(2)}+1-b} = -\alpha\frac{(2-b)\alpha+1-b}{\alpha+2-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha+1-b}{\alpha+2-b}$.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha+1-b}{\alpha+2-b} = (2-b)\left(1 - \frac{1-2b}{(2-b)\alpha+2-3b}\right)$ mithilfe $b^2 = b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-b| + \log\left|1 - \frac{1-2b}{(2-b)\alpha+2-3b}\right| = \log 2 + \log 1.1761.$$

Verwendet man Lemma 3.7, so ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 6.3187 + \log 2 + \log 1.1761| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.8554. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 + \log 1.3332$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.4281 + \log 2 + \log 1.3332|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.2512, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$D = 11$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt geschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha+1-b}{\alpha+2-b} = (2-b)\left(1 + \frac{2b}{(2-b)\alpha+1-3b}\right)$ mit $b^2 = b - 3$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-b| + \log\left|1 + \frac{2b}{(2-b)\alpha + 1 - 3b}\right| = \log\sqrt{5} + \log 1.38125,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 4.56711 + \log\sqrt{5} + \log 1.38125\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.391169, obere Schranke 0.10886 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(vii) $\{\alpha + 1 - 2b, 2b\alpha + 1, (2b-1)\alpha + 2b\}$ ($D = 3$ und $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}\}$ sowie $D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(vii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 1 - 2b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+1-2b}{\alpha^{(2)}+1-2b} = -\alpha\frac{\alpha+1-2b}{2b\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-2b}{2b\alpha+1}$.
$D = 3$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-2b}{2b\alpha+1} = \frac{1}{2b}\left(1 - \frac{2b-3}{2b\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b - 1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|2b| + \log\left|1 - \frac{2b-3}{2b\alpha+1}\right| = -\log 2 + \log 0.7591.$$

Unter Anwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 5.7367 - \log 2 + \log 0.7591| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.7781. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$D = 3$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 0.6316$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.8473 - \log 2 + \log 0.6316|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, untere Schranke 0.194789, obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$: Hier schreibt man $\tilde{\delta}_j$ wie folgt um:
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+1-2b}{2b\alpha+1} = \frac{1}{2b}\left(1 + \frac{7-2b}{2b\alpha+1}\right)$, da $b^2 = b - 2$ gilt. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|2b| + \log\left|1 + \frac{7-2b}{2b\alpha+1}\right| = -\log 2\sqrt{2} + \log 0.2912,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 - \log 2\sqrt{2} + \log 0.2912\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 2$, untere Schranke 0.1904, obere Schranke 0.0608603 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

(vii.2) $\beta^{(j+1)} = 2b\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2b\alpha+1}{2b\alpha^{(2)}+1} = -\alpha\frac{2b\alpha+1}{(2b-1)\alpha+2b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2b\alpha+1}{(2b-1)\alpha+2b}$.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umschreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{2b\alpha+1}{(2b-1)\alpha+2b} = \frac{2b}{2b-1}\left(1 - \frac{2b-3}{(2b-4)\alpha-4+4b}\right)$ mit $b^2 = b - 1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2b| - \log|2b-1| + \log\left|1 - \frac{2b-3}{(2b-4)\alpha-4+4b}\right| = \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log 1.0244.$$

Verwendet man Lemma 3.7, so erhält man für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 5.7367 + \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log 1.0244\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.168. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log 1.0352$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log 1.0352\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.1784, obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{2b\alpha+1}{(2b-1)\alpha+2b} = \frac{2b}{2b-1}\left(1 + \frac{7-2b}{(2b-8)\alpha-8+4b}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2b| - \log|2b-1| + \log\left|1 + \frac{7-2b}{(2b-8)\alpha-8+4b}\right| = \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \log 1.0095,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 + \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \log 1.0095\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.0762, obere Schranke 0.0608603 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

(vii.3) $\beta^{(j+1)} = (2b-1)\alpha + 2b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2b-1)\alpha+2b}{(2b-1)\alpha^{(2)}+2b} = \alpha\frac{(2b-1)\alpha+2b}{\alpha+1-2b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2b-1)\alpha+2b}{\alpha+1-2b}$.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen schreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(2b-1)\alpha+2b}{\alpha+1-2b} = (2b-1)\left(1 + \frac{2b-3}{(2b-1)\alpha+3}\right)$ mit $b^2 = b - 1$. Somit gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2b-1| + \log\left|1 + \frac{2b-3}{(2b-1)\alpha+3}\right| = \log\sqrt{3} + \log 1.2859.$$

Unter Anwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 5.7367 + \log\sqrt{3} + \log 1.2859\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.8008. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = \log\sqrt{3} + \log 1.5294$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\sqrt{3} + \log 1.5294\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-1$, untere Schranke 0.3732, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j=\frac{(2b-1)\alpha+2b}{\alpha+1-2b}=(2b-1)\left(1-\frac{7-2b}{(2b-1)\alpha+7}\right)$ mit $b^2=b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=\log|2b-1|+\log\left|1-\frac{7-2b}{(2b-1)\alpha+7}\right|=\log\sqrt{7}+\log 3.4024,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.4281+\log\sqrt{7}+\log 3.4024\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-2$, untere Schranke 0.2666, obere Schranke 0.0608603 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

(viii) $\{\alpha+2-2b,(1-2b)\alpha-1,(2-2b)\alpha+1-2b\}$ ($D=3$ und $t\in\{-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}\}$ sowie $D=7$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(viii.1) $\beta^{(j+1)}=\alpha+2-2b:\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{\alpha+2-2b}{\alpha^{(2)}+2-2b}=\alpha\frac{\alpha+2-2b}{(1-2b)\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha+2-2b}{(1-2b)\alpha-1}$.
$\underline{D=3 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha+2-2b}{(1-2b)\alpha-1}=\frac{1}{1-2b}\left(1-\frac{2b+1}{(1-2b)\alpha-1}\right)$ und $b^2=b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=-\log|1-2b|+\log\left|1-\frac{2b+1}{(1-2b)\alpha-1}\right|=-\log\sqrt{3}+\log 0.7777.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y|\geq 4$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 5.7367-\log\sqrt{3}+\log 0.7777\right|\leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.8008. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D=3 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\qquad \log|\tilde{\delta}_j|=-\log\sqrt{3}+\log 0.6538,$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.8473-\log\sqrt{3}+\log 0.6538\right|.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.3732, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen darstellen:
$\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha+2-2b}{(1-2b)\alpha-1}=\frac{1}{1-2b}\left(1-\frac{5+2b}{(1-2b)\alpha-1}\right)$ mit $b^2=b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=-\log|1-2b|+\log\left|1-\frac{5+2b}{(2b-1)\alpha-1}\right|=-\log\sqrt{7}+\log 0.2939,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.4281-\log\sqrt{7}+\log 0.2939\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.2666, obere Schranke 0.0608603 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

(viii.2) $\beta^{(j+1)} = (1-2b)\alpha - 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-2b)\alpha-1}{(1-2b)\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{(1-2b)\alpha-1}{(2-2b)\alpha+1-2b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-2b)\alpha-1}{(2-2b)\alpha+1-2b}$.

$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umschreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1-2b)\alpha-1}{(2-2b)\alpha+1-2b} = \frac{1-2b}{2-2b}\left(1 - \frac{2b+1}{(2+2b)\alpha+3}\right)$, da $b^2 = b-1$ gilt. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-2b| - \log|2-2b| + \log\left|1 - \frac{2b+1}{(2+2b)\alpha+3}\right| = \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \log 0.9762.$$

Verwendet man Lemma 3.7, so folgt für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 5.7367 + \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \log 0.9762\right| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.16795. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \log 0.966$,

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \log 0.966\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.1784, obere Schranke 0.124119 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: In diesem Fall lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen darstellen:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1-2b)\alpha-1}{(2-2b)\alpha+1-2b} = \frac{1-2b}{2-2b}\left(1 - \frac{5+2b}{(6+2b)\alpha+7}\right)$ mit $b^2 = b-2$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-2b| - \log|2-2b| + \log\left|1 - \frac{5+2b}{(6+2b)\alpha+7}\right| = \log\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \log 0.9906,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 + \log\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \log 0.9906\right|$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.0762, obere Schranke 0.0608603 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

(viii.3) $\beta^{(j+1)} = (2-2b)\alpha + 1 - 2b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-2b)\alpha+1-2b}{(2-2b)\alpha^{(2)}+1-2b} = -\alpha\frac{(2-2b)\alpha+1-2b}{\alpha+2-2b}$,
sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-2b)\alpha+1-2b}{\alpha+2-2b}$.

$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(2-2b)\alpha+1-2b}{\alpha+2-2b} = (2-2b)\left(1 + \frac{2b+1}{(2-2b)\alpha-4b}\right)$, da $b^2 = b-1$ gilt. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-2b| + \log\left|1 + \frac{2b+1}{(2-2b)\alpha-4b}\right| = \log 2 + \log 1.3173.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.7 ergibt sich für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 5.7367 + \log 2 + \log 1.3173| \leq 0.12554.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.7781. Widerspruch zu Lemma 3.7.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}}$: $\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 + \log 1.5832$,

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.8473 + \log 2 + \log 1.5832|.$$

Minimal für $C_j+1=-1$, untere Schranke 0.1948, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$\underline{D=7 \text{ und } t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt darstellen:

$\tilde{\delta}_j=\frac{(2-2b)\alpha+1-2b}{\alpha+2-2b}=(2-2b)\left(1+\frac{5+2b}{(2-2b)\alpha-4-4b}\right)$ mit $b^2=b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=\log|2-2b|+\log\left|1+\frac{5+2b}{(2-2b)\alpha-4-4b}\right|=\log 2\sqrt{2}+\log 3.4346,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.4281+\log 2\sqrt{2}+\log 3.4346\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-2$, untere Schranke 0.1904, obere Schranke 0.0608603 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

(ix) $\{\alpha+2-3b,(1-3b)\alpha-1,(2-3b)\alpha+1-3b\}$ ($D=3$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(ix.1) $\beta^{(j+1)}=\alpha+2-3b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{\alpha+2-3b}{\alpha^{(2)}+2-3b}=\alpha\frac{\alpha+2-3b}{(1-3b)\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha+2-3b}{(1-3b)\alpha-1}=\frac{1}{1-3b}\left(1-\frac{6}{(1-3b)\alpha-1}\right)$ mit $b^2=b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=-\log|1-3b|+\log\left|1-\frac{6}{(1-3b)\alpha-1}\right|=-\log\sqrt{7}+\log 0.3506,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.8473-\log\sqrt{7}+\log 0.3506\right|.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.6737, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

(ix.2) $\beta^{(j+1)}=(1-3b)\alpha-1: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{(1-3b)\alpha-1}{(1-3b)\alpha^{(2)}-1}=-\alpha\frac{(1-3b)\alpha-1}{(2-3b)\alpha+1-3b}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{(1-3b)\alpha-1}{(2-3b)\alpha+1-3b}$.
Da $|(2-3b)\alpha+1-3b|=|(1-3b)\alpha-1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|=1$ und $\log|\tilde{\delta}_j|=0$.
Verwendet man die obere Schranke für $|\Lambda_j|$, die in (ix.1) berechnet wurde, so erhält man für $C_j+1\neq 0$ einen Widerspruch. Für $C_j+1=0$ gilt $\Lambda_j=0$, wodurch eine genauere Untersuchung nötig wird.

(ix.3) $\beta^{(j+1)}=(2-3b)\alpha+1-3b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{(2-3b)\alpha+1-3b}{(2-3b)\alpha^{(2)}+1-3b}=-\alpha\frac{(2-3b)\alpha+1-3b}{\alpha+2-3b}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{(2-3b)\alpha+1-3b}{\alpha+2-3b}$.
Da $|(2-3b)\alpha+1-3b|=|(1-3b)\alpha-1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (ix.1) und kann daher ebenso wie in diesem Fall behandelt werden.

(x) $\{\alpha+2-4b,(1-4b)\alpha-1,(2-4b)\alpha+1-4b\}$ ($D=3$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(x.1) $\beta^{(j+1)}=\alpha+2-4b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{\alpha+2-4b}{\alpha^{(2)}+2-4b}=\alpha\frac{\alpha+2-4b}{(1-4b)\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha+2-4b}{(1-4b)\alpha-1}=\frac{1}{1-4b}\left(1-\frac{13-4b}{(1-4b)\alpha-1}\right)$ mithilfe $b^2=b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=-\log|1-4b|+\log\left|1-\frac{13-4b}{(1-4b)\alpha-1}\right|=-\log\sqrt{13}+\log 0.1709,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 3.8473-\log\sqrt{13}+\log 0.1709\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.3544, obere Schranke 0.0295592 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.

(x.2) $\beta^{(j+1)} = (1-4b)\alpha - 1: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-4b)\alpha-1}{(1-4b)\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{(1-4b)\alpha-1}{(2-4b)\alpha+1-4b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-4b)\alpha-1}{(2-4b)\alpha+1-4b} = \frac{1-4b}{2-4b}\left(1 - \frac{13-4b}{(14-4b)\alpha+15-8b}\right)$, da $b^2 = b-1$ gilt. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-4b| - \log|2-4b| + \log\left|1 - \frac{13-4b}{(14-4b)\alpha+15-8b}\right| = \log\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} + \log 1.0034,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} + \log 1.0034\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.0434, obere Schranke 0.0295592 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(x.3) $\beta^{(j+1)} = (2-4b)\alpha + 1 - 4b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-4b)\alpha+1-4b}{(2-4b)\alpha^{(2)}+1-4b} = -\alpha\frac{(2-4b)\alpha+1-4b}{\alpha+2-4b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-4b)\alpha+1-4b}{\alpha+2-4b} = (2-4b)\left(1 + \frac{13-4b}{(2-4b)\alpha-12}\right)$ mit $b^2 = b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-4b| + \log\left|1 + \frac{13-4b}{(2-4b)\alpha-12}\right| = \log 2\sqrt{3} + \log 5.8318,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log 2\sqrt{3} + \log 5.8318\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -2$, untere Schranke 0.311, obere Schranke 0.0295592 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xi) $\{\alpha + 3 - 4b, (2-4b)\alpha - 1, (3-4b)\alpha + 2 - 4b\}$ ($D = 3$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(xi.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha + 3 - 4b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha+3-4b}{\alpha^{(2)}+3-4b} = \alpha\frac{\alpha+3-4b}{(2-4b)\alpha-1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha+3-4b}{(2-4b)\alpha-1} = \frac{1}{2-4b}\left(1 - \frac{9+4b}{(2-4b)\alpha-1}\right)$ mit $b^2 = b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|2-4b| + \log\left|1 - \frac{9+4b}{(2-4b)\alpha-1}\right| = -\log 2\sqrt{3} + \log 0.1715,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 - \log 2\sqrt{3} + \log 0.1715\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 2$, untere Schranke 0.311, obere Schranke 0.0295592 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xi.2) $\beta^{(j+1)} = (2-4b)\alpha - 1: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-4b)\alpha-1}{(2-4b)\alpha^{(2)}-1} = -\alpha\frac{(2-4b)\alpha-1}{(3-4b)\alpha+2-4b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-4b)\alpha-1}{(3-4b)\alpha+2-4b} = \frac{2-4b}{3-4b}\left(1 - \frac{9+4b}{(10+4b)\alpha+12}\right)$ mit $b^2 = b-1$. Somit gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-4b| - \log|3-4b| + \log\left|1 - \frac{9+4b}{(10+4b)\alpha+12}\right| = \log\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \log 0.9966,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \log 0.9966\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.0434, obere Schranke 0.0295592 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xi.3) $\beta^{(j+1)} = (3-4b)\alpha + 2 - 4b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(3-4b)\alpha+2-4b}{(3-4b)\alpha^{(2)}+2-4b} = -\alpha\frac{(3-4b)\alpha+2-4b}{\alpha+3-4b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(3-4b)\alpha+2-4b}{\alpha+3-4b} = (3-4b)\left(1+\frac{9+4b}{(3-4b)\alpha-7-8b}\right)$, da $b^2 = b-1$ gilt. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|3-4b| + \log\left|1+\frac{9+4b}{(3-4b)\alpha-7-8b}\right| = \log\sqrt{13} + \log 5.85156,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.8473 + \log\sqrt{13} + \log 5.85156\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -2$, untere Schranke 0.354429, obere Schranke 0.0295592 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xii) $\{2\alpha+1-b, (1+b)\alpha+2, (1-b)\alpha-1-b\}$ ($D = 7$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$ sowie $D = 23, 31, 35$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{D}}{2}$)

(xii.1) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha+1-b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha+1-b}{2\alpha^{(2)}+1-b} = -\alpha\frac{2\alpha+1-b}{(1+b)\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+1-b}{(1+b)\alpha+2}$.

<u>$D = 7$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$</u>: Da $|2\alpha+1-b| = |(1+b)\alpha+2|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$ und so für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.4281| \leq 0.139898.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ erhält man $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird später noch genauer untersucht.

<u>$D = 23$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$</u>: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden: $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+1-b}{(1+b)\alpha+2} = \frac{2}{1+b}\frac{(2+2b)\alpha+1-b^2}{(2+2b)\alpha+4} = \frac{2}{1+b}\left(1+\frac{3-b}{(2+2b)\alpha+4}\right)$ mit $b^2 = b-6$. Dann folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|1+b| + \log\left|1+\frac{3-b}{(2+2b)\alpha+4}\right| = -\log\sqrt{2} + \log 3.78396,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 - \log\sqrt{2} + \log 3.78396\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 2$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

<u>$D = 31$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$</u>: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt umschreiben: $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+1-b}{(1+b)\alpha+2} = \frac{2}{1+b}\left(1+\frac{5-b}{(2+2b)\alpha+4}\right)$ mit $b^2 = b-8$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|1+b| + \log\left|1+\frac{5-b}{(2+2b)\alpha+4}\right| = \log\frac{2}{\sqrt{10}} + \log 0.3427,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{2}{\sqrt{10}} + \log 0.3427\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 3$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

<u>$D = 35$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$</u>: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben: $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+1-b}{(1+b)\alpha+2} = \frac{2}{1+b}\left(1+\frac{6-b}{(2+2b)\alpha+4}\right)$ mit $b^2 = b-9$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|1+b| + \log\left|1+\frac{6-b}{(2+2b)\alpha+4}\right| = \log\frac{2}{\sqrt{11}} + \log 0.4004,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{2}{\sqrt{11}} + \log 0.4004\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.0525, obere Schranke 0.0443394 für $|y|\geq 7$. Widerspruch.

(xii.2) $\beta^{(j+1)} = (1+b)\alpha+2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1+b)\alpha^{(2)}+2} = \alpha\frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b}$.

$D=7$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b} = \frac{1+b}{1-b}\left(1+\frac{1+b}{(3-b)\alpha+1-3b}\right)$, da $b^2=b-2$ gilt. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|1-b| + \log\left|1+\frac{1+b}{(3-b)\alpha+1-3b}\right| = \log\sqrt{2}+\log 1.3253,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.3253\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-1$, untere Schranke 0.6038, obere Schranke 0.139898 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

$D=23$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$: In diesem Fall lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt darstellen:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b} = \frac{1+b}{1-b}\left(1-\frac{3-b}{(7-b)\alpha+5-3b}\right)$ mit $b^2=b-6$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|1-b| + \log\left|1-\frac{3-b}{(7-b)\alpha+5-3b}\right| = \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\log 0.428768,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \log 0.428768\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-2$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

$D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b} = \frac{1+b}{1-b}\left(1-\frac{5-b}{(9-b)\alpha+7-3b}\right)$ mit $b^2=b-8$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|1-b| + \log\left|1-\frac{5-b}{(9-b)\alpha+7-3b}\right| = \log\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}+\log 1.0828,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} + \log 1.0828\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.

$D=35$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$: In diesem Fall schreibt man $\tilde{\delta}_j$ wie folgt:
$\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+2}{(1-b)\alpha-1-b} = \frac{1+b}{1-b}\left(1-\frac{6-b}{(10-b)\alpha+8-3b}\right)$, da $b^2=b-9$ gilt. Es ergibt sich

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1+b| - \log|1-b| + \log\left|1-\frac{6-b}{(10-b)\alpha+8-3b}\right| = \log\frac{\sqrt{11}}{3}+\log 1.058,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{\sqrt{11}}{3} + \log 1.058\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.1567, obere Schranke 0.0443394 für $|y| \geq 7$. Widerspruch.

(xii.3) $\beta^{(j+1)} = (1-b)\alpha - 1 - b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-b)\alpha-1-b}{(1-b)\alpha^{(2)}-1-b} = -\alpha\frac{(1-b)\alpha-1-b}{2\alpha+1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1-b}{2\alpha+1-b}$.

<u>$D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$</u>: Da $|2\alpha+1-b| = |(1+b)\alpha+2|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xii.1) und kann daher analog behandelt werden.

<u>$D = 23$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$</u>: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben: $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1-b}{2\alpha+1-b} = \frac{1-b}{2}\left(1 + \frac{3-b}{(2-2b)\alpha-5-b}\right)$ mit $b^2 = b - 6$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log 2 + \log\left|1 + \frac{3-b}{(2-2b)\alpha-5-b}\right| = \log\frac{\sqrt{6}}{2} + \log 0.616355,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{\sqrt{6}}{2} + \log 0.616355\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

<u>$D = 31$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$</u>: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt dargestellt: $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1-b}{2\alpha+1-b} = \frac{1-b}{2}\left(1 + \frac{5-b}{(2-2b)\alpha-7-b}\right)$, da $b^2 = b - 8$ gilt. Dann folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log 2 + \log\left|1 + \frac{5-b}{(2-2b)\alpha-7-b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 2.6947,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\sqrt{2} + \log 2.6947\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -2$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

<u>$D = 35$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$</u>: In diesem Fall ist $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen darstellbar: $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-1-b}{2\alpha+1-b} = \frac{1-b}{2}\left(1 + \frac{6-b}{(2-2b)\alpha-8-b}\right)$ mit $b^2 = b - 9$. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log 2 + \log\left|1 + \frac{6-b}{(2-2b)\alpha-8-b}\right| = \log\frac{3}{2} + \log 2.36072,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{3}{2} + \log 2.36072\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -2$, untere Schranke 0.209239, obere Schranke 0.0443394 für $|y| \geq 7$. Widerspruch.

(xiii) $\{2\alpha + 2 - b, b\alpha + 2, (2-b)\alpha - b\}$ ($D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$ sowie $D = 23, 31, 35$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$)

(xiii.1) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha + 2 - b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha+2-b}{2\alpha^{(2)}+2-b} = -\alpha\frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2}$.

<u>$D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$</u>: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen schreiben: $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2} = \frac{2}{b}\left(1 + \frac{b-2}{2b\alpha+4}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|b| + \log\left|1 + \frac{b-2}{2b\alpha+4}\right| = \log\sqrt{2} + \log 1.3253,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.3253\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-1$, untere Schranke 0.6038, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

$D=23$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ wie folgt dargestellt:
$\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2} = \frac{2}{b}\left(1+\frac{b+2}{2b\alpha+4}\right)$ mit $b^2=b-6$. Es ergibt sich

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|b| + \log\left|1+\frac{b+2}{2b\alpha+4}\right| = \log\frac{2}{\sqrt{6}} + \log 1.62244,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{2}{\sqrt{6}} + \log 1.62244\right|.$$

Minimal für $C_j+1=1$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.

$D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen schreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2} = \frac{2}{b}\left(1+\frac{b+4}{2b\alpha+4}\right)$, da $b^2=b-8$ gilt. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|b| + \log\left|1+\frac{b+4}{2b\alpha+4}\right| = -\log\sqrt{2} + \log 0.3711,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 - \log\sqrt{2} + \log 0.3711\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

$D=35$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$: Hier ist $\tilde{\delta}_j$ wie folgt darstellbar:
$\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+2-b}{b\alpha+2} = \frac{2}{b}\left(1+\frac{b+5}{2b\alpha+4}\right)$ mit $b^2=b-9$. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|b| + \log\left|1+\frac{b+5}{2b\alpha+4}\right| = \log\frac{2}{3} + \log 0.4236,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{2}{3} + \log 0.4236\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.2092, obere Schranke 0.0443394 für $|y| \geq 7$. Widerspruch.

(xiii.2) $\beta^{(j+1)} = b\alpha+2$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha+2}{b\alpha^{(2)}+2} = \alpha\frac{b\alpha+2}{(2-b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+2}{(2-b)\alpha-b}$.
$D=7$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$: Da $|2\alpha+2-b| = |(2-b)\alpha-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xiii.1) und kann daher analog behandelt werden.
$D=23$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umschreiben:
$\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+2}{(2-b)\alpha-b} = \frac{b}{2-b}\left(1-\frac{b+2}{(b+6)\alpha+6-b}\right)$ mit $b^2=b-6$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| - \log|2-b| + \log\left|1-\frac{b+2}{(b+6)\alpha+6-b}\right| = \log\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \log 2.33227,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \log 2.33227\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

$D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$: In diesem Fall lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umschreiben: $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+2}{(2-b)\alpha-b} = \frac{b}{2-b}\left(1-\frac{b+4}{(b+8)\alpha+8-b}\right)$, da $b^2=b-8$ gilt. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| - \log|2-b| + \log\left|1-\frac{b+4}{(b+8)\alpha+8-b}\right| = \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} + \log 0.9235,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} + \log 0.9235\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.

$D=35$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen darstellen: $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha+2}{(2-b)\alpha-b} = \frac{b}{2-b}\left(1-\frac{b+5}{(b+9)\alpha+9-b}\right)$ mit $b^2=b-9$. Man bekommt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| - \log|2-b| + \log\left|1-\frac{b+5}{(b+9)\alpha+9-b}\right| = \log\frac{3}{\sqrt{11}} + \log 0.9452,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{3}{\sqrt{11}} + \log 0.9452\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.1567, obere Schranke 0.0443394 für $|y|\geq 7$. Widerspruch.

(xiii.3) $\beta^{(j+1)}=(2-b)\alpha-b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-b)\alpha-b}{(2-b)\alpha^{(2)}-b} = -\alpha\frac{(2-b)\alpha-b}{2\alpha+2-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha-b}{2\alpha+2-b}$.

$D=7$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$: Da $|2\alpha+2-b|=|(2-b)\alpha-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|=1$ und $\log|\tilde{\delta}_j|=0$ und so für $|y|\geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.4281| \leq 0.139898.$$

Für $C_j+1\neq 0$ erhält man einen Widerspruch. Für $C_j+1=0$ ergibt sich $\Lambda_j=0$, somit wird eine genauere Untersuchung notwendig.

$D=23$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden: $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha-b}{2\alpha+2-b} = \frac{2-b}{2}\left(1+\frac{b+2}{(4-2b)\alpha-2-3b}\right)$, da $b^2=b-6$ gilt. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-b| - \log 2 + \log\left|1+\frac{b+2}{(4-2b)\alpha-2-3b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 0.264273,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\sqrt{2} + \log 0.264273\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-2$, untere Schranke 0.1406, obere Schranke 0.0794977 für $|y|\geq 5$. Widerspruch.

$D = 31$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$: In diesem Fall kann $\tilde{\delta}_j$ wie folgt dargestellt werden: $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha-b}{2\alpha+2-b} = \frac{2-b}{2}\left(1 + \frac{b+4}{(4-2b)\alpha-4-3b}\right)$ mit $b^2 = b-8$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-b| - \log 2 + \log\left|1 + \frac{b+4}{(4-2b)\alpha-4-3b}\right| = \log\frac{\sqrt{10}}{2} + \log 2.9178,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{\sqrt{10}}{2} + \log 2.9178\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -3$, untere Schranke 0.1911, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

$D = 35$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$: Hier lässt sich $\tilde{\delta}_j$ wie folgt schreiben: $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha-b}{2\alpha+2-b} = \frac{2-b}{2}\left(1 + \frac{b+5}{(4-2b)\alpha-5-3b}\right)$ mit $b^2 = b-9$. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|2-b| - \log 2 + \log\left|1 + \frac{b+5}{(4-2b)\alpha-5-3b}\right| = \log\frac{\sqrt{11}}{2} + \log 2.4976,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 2.0893 + \log\frac{\sqrt{11}}{2} + \log 2.4976\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -2$, untere Schranke 0.0525, obere Schranke 0.0443394 für $|y| \geq 7$. Widerspruch.

(xiv) $\{2\alpha + 3 - b, (1-b)\alpha - 2, (3-b)\alpha + 1 - b\}$ ($D = 19$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{19}}{2}$)

(xiv.1) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha + 3 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha+3-b}{2\alpha^{(2)}+3-b} = \alpha\frac{2\alpha+3-b}{(1-b)\alpha-2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha+3-b}{(1-b)\alpha-2} = \frac{2}{1-b}\left(1 + \frac{2-3b}{(2-2b)\alpha-4}\right)$, da $b^2 = b-5$ gilt. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 2 - \log|1-b| + \log\left|1 + \frac{2-3b}{(2-2b)\alpha-4}\right| = \log\frac{2}{\sqrt{5}} + \log 1.20615,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.600919 + \log\frac{2}{\sqrt{5}} + \log 1.20615\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.0759, obere Schranke 0.0143336 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xiv.2) $\beta^{(j+1)} = (1-b)\alpha - 2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1-b)\alpha-2}{(1-b)\alpha^{(2)}-2} = -\alpha\frac{(1-b)\alpha-2}{(3-b)\alpha+1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1-b)\alpha-2}{(3-b)\alpha+1-b} = \frac{1-b}{3-b}\left(1 + \frac{2-3b}{(2+3b)\alpha+4+b}\right)$ mit $b^2 = b-5$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|1-b| - \log|3-b| + \log\left|1 + \frac{2-3b}{(2+3b)\alpha+4+b}\right| = \log\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} + \log 11.3749,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.600919 + \log\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} + \log 11.3749\right|.$$

Minimal für $C_j+1 = 4$, in diesem Fall wird $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird gesondert betrachtet.

(xiv.3) $\beta^{(j+1)} = (3-b)\alpha + 1 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(3-b)\alpha+1-b}{(3-b)\alpha^{(2)}+1-b} = -\alpha\frac{(3-b)\alpha+1-b}{2\alpha+3-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(3-b)\alpha+1-b}{2\alpha+3-b} = \frac{3-b}{2}\left(1 - \frac{2-3b}{(6-2b)\alpha+4-5b}\right)$ mit $b^2 = b-5$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|3-b| - \log 2 + \log\left|1 - \frac{2-3b}{(6-2b)\alpha+4-5b}\right| = \log\frac{\sqrt{11}}{2} + \log 0.0728871,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.600919 + \log\frac{\sqrt{11}}{2} + \log 0.0728871\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -4$, untere Schranke 0.0759, obere Schranke 0.0143336 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xv) $\{3\alpha+2-b, (1+b)\alpha+3, (2-b)\alpha-1-b\}$ ($D = 23, 31$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$)

(xv.1) $\beta^{(j+1)} = 3\alpha+2-b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{3\alpha+2-b}{3\alpha^{(2)}+2-b} = -\alpha\frac{3\alpha+2-b}{(1+b)\alpha+3}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{3\alpha+2-b}{(1+b)\alpha+3}$.
<u>$D = 23$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$</u>: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen geschrieben werden: $\tilde{\delta}_j = \frac{3\alpha+2-b}{(1+b)\alpha+3} = \frac{3}{1+b}\left(1 - \frac{1}{(3+3b)\alpha+9}\right)$ mit $b^2 = b-6$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 3 - \log|1+b| + \log\left|1 - \frac{1}{(3+3b)\alpha+9}\right| = \log\frac{3}{2\sqrt{2}} + \log 0.782799,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{3}{2\sqrt{2}} + \log 0.787299\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.186, obere Schranke 0.0794977 für $|y| \geq 5$. Widerspruch.
<u>$D = 31$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$</u>: Hier kann $\tilde{\delta}_j$ wie folgt dargestellt werden: $\tilde{\delta}_j = \frac{3\alpha+2-b}{(1+b)\alpha+3} = \frac{3}{1+b}\left(1 + \frac{1}{(3+3b)\alpha+9}\right)$, da $b^2 = b-8$ gilt. Daraus ergibt sich

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 3 - \log|1+b| + \log\left|1 + \frac{1}{(3+3b)\alpha+9}\right| = \log\frac{3}{\sqrt{10}} + \log 0.8915,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{3}{\sqrt{10}} + \log 0.8915\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.1675, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xv.2) $\beta^{(j+1)} = (1+b)\alpha+3 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1+b)\alpha+3}{(1+b)\alpha^{(2)}+3} = \alpha\frac{(1+b)\alpha+3}{(2-b)\alpha-1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(1+b)\alpha+3}{(2-b)\alpha-1-b}$.
Da $|(1+b)\alpha+3| = |(2-b)\alpha-1-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$ und so

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log|\alpha|| \leq S.$$

Die obere Schranke S wurde für jeden Wert t in (xv.1) extra berechnet. Für $C_j + 1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ bekommt man $\Lambda_j = 0$, und dieser Fall muss noch genauer betrachtet werden.

(xv.3) $\beta^{(j+1)} = (2-b)\alpha - 1 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2-b)\alpha-1-b}{(2-b)\alpha^{(2)}-1-b} = -\alpha\frac{(2-b)\alpha-1-b}{3\alpha+2-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2-b)\alpha-1-b}{3\alpha+2-b}$.
Da $|(1+b)\alpha+3| = |(2-b)\alpha-1-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xv.1) und kann daher analog behandelt werden.

(xvi) $\{5\alpha+3-b, (2+b)\alpha+5, (3-b)\alpha-2-b\}$ ($D = 23$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$)

(xvi.1) $\beta^{(j+1)} = 5\alpha+3-b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{5\alpha+3-b}{5\alpha^{(2)}+3-b} = -\alpha\frac{5\alpha+3-b}{(2+b)\alpha+5}$, sei
$\tilde{\delta}_j = \frac{5\alpha+3-b}{(2+b)\alpha+5} = \frac{5}{2+b}\left(1 - \frac{13}{(10+5b)\alpha+25}\right)$ mit $b^2 = b-6$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 5 - \log|2+b| + \log\left|1 - \frac{13}{(10+5b)\alpha+25}\right| = \log\frac{5}{2\sqrt{3}} + \log 0.0698106,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 0.655866 + \log\frac{5}{2\sqrt{3}} + \log 0.0698106\right|.$$

Minimal für $C_j+1 = -5$, untere Schranke 0.186, obere Schranke 0.0393074 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xvi.2) $\beta^{(j+1)} = (2+b)\alpha+5 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2+b)\alpha+5}{(2+b)\alpha^{(2)}+5} = \alpha\frac{(2+b)\alpha+5}{(3-b)\alpha-2-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2+b)\alpha+5}{(3-b)\alpha-2-b}$.
Da $|(2+b)\alpha+5| = |(3-b)\alpha-2-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Verwendet man die obere Schranke für $|\Lambda_j|$, die in (xvi.1) berechnet wurde, so erhält man für $C_j+1 \neq 0$ einen Widerspruch. Für $C_j+1 = 0$ folgt $\Lambda_j = 0$, wodurch noch eine etwas genauere Untersuchung notwendig wird.

(xvi.3) $\beta^{(j+1)} = (3-b)\alpha-2-b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(3-b)\alpha-2-b}{(3-b)\alpha^{(2)}-2-b} = -\alpha\frac{(3-b)\alpha-2-b}{5\alpha+3-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(3-b)\alpha-2-b}{5\alpha+3-b}$.
Da $|(2+b)\alpha+5| = |(3-b)\alpha-2-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xvi.1) und kann daher analog betrachtet werden.

(xvii) $\{5\alpha+4-3b, (1+3b)\alpha+5, (4-3b)\alpha-1-3b\}$ ($D = 31$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$)

(xvii.1) $\beta^{(j+1)} = 5\alpha+4-3b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{5\alpha+4-3b}{5\alpha^{(2)}+4-3b} = -\alpha\frac{5\alpha+4-3b}{(1+3b)\alpha+5}$,
$\tilde{\delta}_j = \frac{5\alpha+4-3b}{(1+3b)\alpha+5} = \frac{5}{1+3b}\left(1 + \frac{51}{(5+15b)\alpha+25}\right)$ mit $b^2 = b-8$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log 5 - \log|1+3b| + \log\left|1 + \frac{51}{(5+15b)\alpha+25}\right| = \log\frac{5}{2\sqrt{19}} + \log 0.0266,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 1.7742 + \log\frac{5}{2\sqrt{19}} + \log 0.0266\right|.$$

Minimal für $C_j+1 = 7$, untere Schranke 0.1675, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xvii.2) $\beta^{(j+1)} = (1+3b)\alpha+5 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(1+3b)\alpha+5}{(1+3b)\alpha^{(2)}+5} = \alpha\frac{(1+3b)\alpha+5}{(4-3b)\alpha-1-3b}, \tilde{\delta}_j = \frac{(1+3b)\alpha+5}{(4-3b)\alpha-1-3b}$.
Da $|(1+3b)\alpha+5| = |(4-3b)\alpha-1-3b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Unter Verwendung der oberen Schranke für $|\Lambda_j|$, die in (xvii.1) berechnet wurde, ergibt sich für $C_j+1 \neq 0$ ein Widerspruch. Für $C_j+1 = 0$ ist $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird später noch genauer untersucht.

(xvii.3) $\beta^{(j+1)} = (4-3b)\alpha-1-3b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(4-3b)\alpha-1-3b}{(4-3b)\alpha^{(2)}-1-3b} = -\alpha\frac{(4-3b)\alpha-1-3b}{5\alpha+4-3b}, \tilde{\delta}_j = \frac{(4-3b)\alpha-1-3b}{5\alpha+4-3b}$.
Da $|(1+3b)\alpha+5| = |(4-3b)\alpha-1-3b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xvii.1) und kann daher wie im Fall (xvii.1) behandelt werden.

(xviii) $\{\alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^2+\alpha+1\}$ ($D = 15, 19, 35, 39, 43, 47, 51, 55$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$)
Man erhält $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$ und so

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log|\alpha|| \le S.$$

Die obere Schranke S wird für jedes t mittels (3.4) extra berechnet. Für $C_j+1 \neq 0$ folgt ein Widerspruch. Für $C_j+1=0$ ist $\Lambda_j = 0$, sodass eine genauere Untersuchung dieses Falles notwendig wird.

(xix) $\{(\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2, (\alpha^2+\alpha+1)^2\}$ ($D = 19, 35$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$)
Man bekommt $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$ und so

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log|\alpha|| \le S.$$

Die obere S wird für jedes t unter Verwendung von (3.4) extra berechnet. Für $C_j+1 \neq 0$ bekommt man einen Widerspruch. Für $C_j+1=0$ ergibt sich $\Lambda_j = 0$, und man muss diesen Fall noch genauer untersuchen.

(xx) $\{(\alpha+1-b)^2, (b\alpha+1)^2, ((1-b)\alpha-b)^2\}$ ($D = 3$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$ sowie $D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(xx.1) $\beta^{(j+1)} = (\alpha+1-b)^2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(\alpha+1-b)^2}{(\alpha^{(2)}+1-b)^2} = (-\alpha\frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1})^2$, sei $\tilde{\delta}_j = (\frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1})^2$.
$\underline{D = 3 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}}$: Da $|\alpha+1-b| = |b\alpha+1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Verwendet man Lemma 3.7, so bekommt man für $|y| \ge 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 5.7367| \le 0.12554.$$

Für $C_j+1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j+1=0$ folgt $\Lambda_j = 0$. Dadurch wird eine genauere Untersuchung dieses Falles nötig.
$\underline{D = 7 \text{ und } t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}}$: Hier wird $\tilde{\delta}_j$ folgendermaßen umgeschrieben:
$\tilde{\delta}_j = \left(\frac{\alpha+1-b}{b\alpha+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{b\alpha+1}\right)\right)^2$ mit $b^2 = b-2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = 2\left(-\log|b| + \log\left|1+\frac{1}{b\alpha+1}\right|\right) = 2\left(-\log\sqrt{2} + \log 0.75456\right),$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.42811 + 2(-\log 2 + \log 0.75456)|.$$

Minimal für $C_j+1 = 1$, untere Schranke 0.024, obere Schranke 0.019646 für $|y| \ge 7$. Widerspruch.

(xx.2) $\beta^{(j+1)} = (b\alpha+1)^2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(b\alpha+1)^2}{(b\alpha^{(2)}+1)^2} = (\alpha\frac{b\alpha+1}{(1-b)\alpha-b})^2$, sei $\tilde{\delta}_j = (\frac{b\alpha+1}{(1-b)\alpha-b})^2$.
Da $|b\alpha+1| = |(1-b)\alpha-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Man bekommt

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 5.7367| \le S.$$

Die obere Schranke S wurde für jedes t einzeln in (xx.1) berechnet. Für $C_j+1 \neq 0$ folgt daraus ein Widerspruch. Für $C_j+1=0$ gilt $\Lambda_j=0$. Dieser Fall wird noch gesondert betrachtet.

(xx.3) $\beta^{(j+1)} = ((1-b)\alpha-b)^2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{((1-b)\alpha-b)^2}{((1-b)\alpha^{(2)}-b)^2} = (-\alpha\frac{(1-b)\alpha-b}{\alpha+1-b})^2$, sei $\tilde{\delta}_j = (\frac{(1-b)\alpha-b}{\alpha+1-b})^2$.
Da $|b\alpha+1| = |(1-b)\alpha-b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xx.1) und kann daher analog behandelt werden.

(xxi) $\{\alpha^2+\alpha+2, 2\alpha^2+\alpha+1, 2\alpha^2+3\alpha+2\}$ ($D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$)

(xxi.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2+\alpha+2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{\alpha^{(2)2}+\alpha^{(2)}+2} = \alpha^2\frac{\alpha^2+\alpha+2}{2\alpha^2+\alpha+1}$, sei
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{2\alpha^2+\alpha+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha+3}{2\alpha^2+\alpha+1}\right)$. Dann folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log\left|1+\frac{\alpha+3}{2\alpha^2+\alpha+1}\right| = -\log 2 + \log 0.4511,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 1.7742 - \log 2 + \log 0.4511|\,.$$

Minimal für $C_j+1=3$, untere Schranke 0.23096, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xxi.2) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha^2+\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha^2+\alpha+1}{2\alpha^{(2)2}+\alpha^{(2)}+1} = \alpha^2\frac{2\alpha^2+\alpha+1}{2\alpha^2+3\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha^2+\alpha+1}{2\alpha^2+3\alpha+2}$.
Da $|2\alpha^2+\alpha+1| = |2\alpha^2+3\alpha+2|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|=1$ und $\log|\tilde{\delta}_j|=0$.
Verwendet man die obere Schranke für $|\Lambda_j|$, welche in (xxi.1) berechnet wurde, so erhält man für $|y| \geq 6$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 1.77423| \leq 0.143915.$$

Für $C_j+1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j+1=0$ ist $\Lambda_j=0$. Dieser Fall wird später genauer untersucht.

(xxi.3) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha^2+3\alpha+2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha^2+3\alpha+2}{2\alpha^{(2)2}+3\alpha^{(2)}+2} = \alpha^2\frac{2\alpha^2+3\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha^2+3\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+2}$.
Es gilt $|2\alpha^2+\alpha+1| = |2\alpha^2+3\alpha+2|$. Darum ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxi.1) und kann daher analog behandelt werden.

(xxii) $\{\alpha^2+\alpha+4, 4\alpha^2+\alpha+1, 4\alpha^2+7\alpha+4\}$ ($D=35$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$)

(xxii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2+\alpha+4 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+\alpha+4}{\alpha^{(2)2}+\alpha^{(2)}+4} = \alpha^2\frac{\alpha^2+\alpha+4}{4\alpha^2+\alpha+1}$, sei
$\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+\alpha+4}{4\alpha^2+\alpha+1} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{3\alpha+15}{4\alpha^2+\alpha+1}\right)$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 4 + \log\left|1+\frac{3\alpha+15}{4\alpha^2+\alpha+1}\right| = -\log 4 + \log 0.09045,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 2.08931 - \log 4 + \log 0.09045|\,.$$

Minimal für $C_j+1=5$, untere Schranke 0.10505, obere Schranke 0.0768766 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.

(xxii.2) $\beta^{(j+1)} = 4\alpha^2+\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{4\alpha^2+\alpha+1}{4\alpha^{(2)2}+\alpha^{(2)}+1} = \alpha^2\frac{4\alpha^2+\alpha+1}{4\alpha^2+7\alpha+4}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{4\alpha^2+\alpha+1}{4\alpha^2+7\alpha+4}$.
Da $|4\alpha^2+\alpha+1| = |4\alpha^2+7\alpha+4|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Man verwendet die obere Schranke für $|\Lambda_j|$, die in (xxii.1) berechnet wurde und erhält damit für $C_j+1 \neq 0$ einen Widerspruch. Für $C_j+1 = 0$ gilt $\Lambda_j = 0$, sodass eine genauere Untersuchung dieses Falles notwendig wird.

(xxii.3) $\beta^{(j+1)} = 4\alpha^2+7\alpha+4 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{4\alpha^2+7\alpha+4}{4\alpha^{(2)2}+7\alpha^{(2)}+4} = \alpha^2\frac{4\alpha^2+7\alpha+4}{\alpha^2+\alpha+4}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{4\alpha^2+7\alpha+4}{\alpha^2+\alpha+4}$.
Da $|4\alpha^2+\alpha+1| = |4\alpha^2+7\alpha+4|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxii.1) und kann daher analog behandelt werden.

(xxiii) $\{\alpha^2+2\alpha+2, \alpha^2+1, 2\alpha^2+2\alpha+1\}$ ($D = 31, 35$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{D}}{2}$)

(xxiii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2+2\alpha+2 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^{(2)2}+2\alpha^{(2)}+2} = \alpha^2\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^2+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^2+1}$.
Da $|\alpha^2+2\alpha+2| = |\alpha^2+1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Man erhält für $|y| \geq 6$ (für $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$) bzw. für $|y| \geq 7$ (für $t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$)

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log|\alpha|| \leq S.$$

Für $C_j+1 \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j+1 = 0$ folgt $\Lambda_j = 0$, sodass dieser Fall noch genauer behandelt werden muss.

(xxiii.2) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^{(2)2}+1} = \alpha^2\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2+2\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\alpha-1}{2\alpha^2+2\alpha+1}\right)$.
Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log\left|1-\frac{2\alpha-1}{2\alpha^2+2\alpha+1}\right|.$$

$\underline{D = 31 \text{ und } t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}}$: $\qquad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 0.8948,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 1.77423 - \log 2 + \log 0.8948|.$$

Minimal für $C_j+1 = 1$, untere Schranke 0.231, obere Schranke 0.143915 für $|y| \geq 6$. Widerspruch.
$\underline{D = 35 \text{ und } t = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}}$: $\qquad \log|\tilde{\delta}_j| = -\log 2 + \log 0.9083,$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 2.0893 - \log 2 + \log 0.9083|.$$

Minimal für $C_j+1 = 1$, untere Schranke 0.0525, obere Schranke 0.0443394 für $|y| \geq 7$. Widerspruch.

(xxiii.3) $\beta^{(j+1)} = 2\alpha^2+2\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{2\alpha^{(2)2}+2\alpha^{(2)}+1} = \alpha^2\frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+2}$.
Da $|\alpha^2+2\alpha+2| = |\alpha^2+1|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxiii.2) und wird daher analog behandelt.

(xxiv) $\{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b, (2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1, (2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b\}$ ($D = 3$ und $t = -\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(xxiv.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2 + (3-4b)\alpha + 1 - 2b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b}{\alpha^{(2)2}+(3-4b)\alpha^{(2)}+1-2b} = \alpha^2 \frac{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b}{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b}{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1} = \frac{1}{2b-1}\left(1 - \frac{(2b-6)\alpha-2}{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b-1$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|2b-1| + \log\left|1 - \frac{(2b-6)\alpha-2}{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}\right| = -\log\sqrt{3} + \log 0.117,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.84732 - \log\sqrt{3} + \log 0.117\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 2$, es ergibt sich $\Lambda_j = 0$, sodass man diesen Fall später genauer untersuchen muss.

(xxiv.2) $\beta^{(j+1)} = (2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}{(2b-1)\alpha^{(2)2}+(4b-1)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2 \frac{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}{(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1}{(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b}$.
Da $|(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1| = |(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$. Für $|y| \geq 4$ gilt

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.84732| \leq 0.124119.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ folgt daraus ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ ist $\Lambda_j = 0$, dieser Fall wird später gesondert betrachtet.

(xxiv.3) $\beta^{(j+1)} = (2b-1)\alpha^2 + \alpha + 1 - 2b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b}{(2b-1)\alpha^{(2)2}+\alpha^{(2)}+1-2b} = -\alpha^2 \frac{(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b}{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b}{\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b}$.
Da $|(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1| = |(2b-1)\alpha^2+\alpha+1-2b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxiv.1) und kann daher analog behandelt werden.

(xxv) $\{\alpha^2 + (4-4b)\alpha - b, (3b-3)\alpha^2 + (4b-2)\alpha + 1, b\alpha^2 - (2b-4)\alpha + 3 - 3b\}$ ($D = 3$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(xxv.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2 + (4-4b)\alpha - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b}{\alpha^{(2)2}+(4-4b)\alpha^{(2)}-b} = \alpha^2 \frac{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b}{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b}{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1} = \frac{1}{3b-3}\left(1 + \frac{(8b+2)\alpha+2}{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b-1$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|3b-3| + \log\left|1 + \frac{(8b+2)\alpha+2}{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}\right| = -\log 3 + \log 0.4189,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.84732 - \log 3 + \log 0.4189|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, in diesem Fall ist $\Lambda_j = 0$, wodurch eine genauere Untersuchung dieses Falles notwendig wird.

(xxv.2) $\beta^{(j+1)} = (3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}{(3b-3)\alpha^{(2)2}+(4b-2)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2 \frac{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}{b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(3b-3)\alpha^2+(4b-2)\alpha+1}{b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b}$.
Da $|b\alpha^2 - (2b-4)\alpha + 3 - 3b| = |\alpha^2 + (4-4b)\alpha - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxv.1) und wird darum analog behandelt.

(xxv.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha^2 - (2b-4)\alpha + 3 - 3b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b}{b\alpha^{(2)2}-(2b-4)\alpha^{(2)}+3-3b} = -\alpha^2 \frac{b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b}{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b}{\alpha^2+(4-4b)\alpha-b}$.

Es gilt $|b\alpha^2-(2b-4)\alpha+3-3b| = |\alpha^2+(4-4b)\alpha-b|$, woraus $|\tilde{\delta}_j|=1$ und $\log|\tilde{\delta}_j|=0$ folgt. Man erhält für $|y|\geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.84732| \leq 0.124119.$$

Für $C_j+1\neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Für $C_j+1=0$ folgt $\Lambda_j=0$. Dadurch wird eine genauere Untersuchung dieses Falles erforderlich.

(xxvi) $\{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b, (5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1, (b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b\}$ ($D=3$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$)

(xxvi.1) $\beta^{(j+1)}=\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b}{\alpha^{(2)2}+(4-6b)\alpha^{(2)}-1-b} = \alpha^2\frac{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b}{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b}{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1} = \frac{1}{5b-4}\left(1+\frac{(8b+16)\alpha+8-6b}{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}\right)$, da $b^2=b-1$ gilt. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|5b-4|+\log\left|1+\frac{(8b+16)\alpha+8-6b}{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}\right| = -\log\sqrt{21}+\log 0.3096,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.84732-\log\sqrt{21}+\log 0.3096\right|.$$

Minimal für $C_j+1=2$, und es gilt $\Lambda_j=0$. Dieser Fall wird noch genauer betrachtet.

(xxvi.2) $\beta^{(j+1)}=(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}{(5b-4)\alpha^{(2)2}+(6b-2)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2\frac{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}{(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(5b-4)\alpha^2+(6b-2)\alpha+1}{(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b} = \frac{5b-4}{b+1}\left(1-\frac{(16b+4)\alpha+8+14b}{(6b-9)\alpha^2+(26b-4)\alpha+9+15b}\right)$ mit $b^2=b-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\log|\tilde{\delta}_j| &= \log|5b-4|-\log|b+1|+\log\left|1-\frac{(16b+4)\alpha+8+14b}{(6b-9)\alpha^2+(26b-4)\alpha+9+15b}\right| \\ &= \log\sqrt{7}+\log 2.8523,\end{aligned}$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.84732+\log\sqrt{7}+\log 2.8523\right|.$$

Minimal für $C_j+1=-2$, untere Schranke 0.67369, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

(xxvi.3) $\beta^{(j+1)}=(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b}{(b+1)\alpha^{(2)2}-(4b-6)\alpha^{(2)}+4-5b} =$ $= -\alpha^2\frac{(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b}{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(b+1)\alpha^2-(4b-6)\alpha+4-5b}{\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b} = (b+1)\left(1+\frac{(4b-4)\alpha+4-2b}{(b+1)\alpha^2+(10-8b)\alpha-3b}\right)$ mit $b^2=b-1$. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b+1|+\log\left|1+\frac{(4b-4)\alpha+4-2b}{(b+1)\alpha^2+(10-8b)\alpha-3b}\right| = \log\sqrt{3}+\log 1.1324,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.84732+\log\sqrt{3}+\log 1.1324\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.67369, obere Schranke 0.124119 für $|y|\geq 4$. Widerspruch.

(xxvii) $\{\alpha^2 + (2-2b)\alpha - b, (b-1)\alpha^2 + 2b\alpha + 1, b\alpha^2 + 2\alpha + 1 - b\}$ ($D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(xxvii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2 + (2-2b)\alpha - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}{\alpha^{(2)2}+(2-2b)\alpha^{(2)}-b} = \alpha^2 \frac{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1} = \frac{1}{b-1}\left(1 + \frac{2\alpha+1}{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b-1| + \log\left|1 + \frac{2\alpha+1}{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}\right| = -\log\sqrt{2} + \log 0.4125,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j+1)\log 3.4281 - \log\sqrt{2} + \log 0.4125\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, in diesem Fall ist $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall wird noch gesondert betrachtet.

(xxvii.2) $\beta^{(j+1)} = (b-1)\alpha^2 + 2b\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}{(b-1)\alpha^{(2)2}+2b\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2 \frac{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}{b\alpha^2+2\alpha+1-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(b-1)\alpha^2+2b\alpha+1}{b\alpha^2+2\alpha+1-b}$.
Da $|(b-1)\alpha^2 + 2b\alpha + 1| = |b\alpha^2 + 2\alpha + 1 - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j| = 1$ und $\log|\tilde{\delta}_j| = 0$.
Man erhält für $|y| \geq 4$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.4281| \leq 0.139898.$$

Für $C_j + 1 \neq 0$ folgt daraus ein Widerspruch. Für $C_j + 1 = 0$ ist $\Lambda_j = 0$, was eine genauere Untersuchung dieses Falles nötig macht.

(xxvii.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha^2 + 2\alpha + 1 - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha^2+2\alpha+1-b}{b\alpha^{(2)2}+2\alpha^{(2)}+1-b} = -\alpha^2 \frac{b\alpha^2+2\alpha+1-b}{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha^2+2\alpha+1-b}{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}$.
Da $|(b-1)\alpha^2 + 2b\alpha + 1| = |b\alpha^2 + 2\alpha + 1 - b|$ gilt, ist $|\tilde{\delta}_j|^{-1}$ gleich wie $\tilde{\delta}_j$ im Fall (xxvii.1). Daher kann dieser Fall analog behandelt werden.

(xxviii) $\{\alpha^2 + (3-2b)\alpha - b, (b-2)\alpha^2 + (2b-1)\alpha + 1, b\alpha^2 + 3\alpha + 2 - b\}$ ($D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(xxviii.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2 + (3-2b)\alpha - b : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b}{\alpha^{(2)2}+(3-2b)\alpha^{(2)}-b} = \alpha^2 \frac{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b}{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b}{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1} = \frac{1}{b-2}\left(1 + \frac{(3b-1)\alpha+1+b}{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}\right)$, da $b^2 = b - 2$ gilt. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b-2| + \log\left|1 + \frac{(3b-1)\alpha+1+b}{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}\right| = -\log 2 + \log 0.583411,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j+1)\log 3.4281 - \log 2 + \log 0.583411|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, in diesem Fall ergibt sich $\Lambda_j = 0$, wodurch eine genauere Untersuchung nötig wird.

(xxviii.2) $\beta^{(j+1)} = (b-2)\alpha^2 + (2b-1)\alpha + 1 : \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}{(b-2)\alpha^{(2)2}+(2b-1)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2 \frac{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}{b\alpha^2+3\alpha+2-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(b-2)\alpha^2+(2b-1)\alpha+1}{b\alpha^2+3\alpha+2-b} = \frac{b-2}{b}\left(1 + \frac{(2b-2)\alpha-2+2b}{(b+2)\alpha^2+(3b-6)\alpha+2-3b}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b-2| - \log|b| + \log\left|1 + \frac{(2b-2)\alpha-2+2b}{(b+2)\alpha^2+(3b-6)\alpha+2-3b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 1.5754,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.5754\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.4309, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(xxviii.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha^2 + 3\alpha + 2 - b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha^2+3\alpha+2-b}{b\alpha^{(2)2}+3\alpha^{(2)}+2-b} = -\alpha^2\frac{b\alpha^2+3\alpha+2-b}{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha^2+3\alpha+2-b}{\alpha^2+(3-2b)\alpha-b} = b\left(1 - \frac{(1+b)\alpha}{b\alpha^2+(b+4)\alpha+2-b}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Somit folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| + \log\left|1 - \frac{(1+b)\alpha}{b\alpha^2 + (b+4)\alpha + 2 - b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 1.088,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 1.088\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.4309, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(xxix) $\{\alpha^2 + (4-2b)\alpha - b, (b-3)\alpha^2 + (2b-2)\alpha + 1, b\alpha^2 + 4\alpha + 3 - b\}$ ($D = 7$ und $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$)

(xxix.1) $\beta^{(j+1)} = \alpha^2 + (4-2b)\alpha - b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}{\alpha^{(2)2}+(4-2b)\alpha^{(2)}-b} = \alpha^2\frac{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1} = \frac{1}{b-3}\left(1 + \frac{(6b-6)\alpha+1+2b}{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1}\right)$, da $b^2 = b - 2$ gilt. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = -\log|b-3| + \log\left|1 + \frac{(6b-6)\alpha + 1 + 2b}{(b-3)\alpha^2 + (2b-2)\alpha + 1}\right| = -\log 2\sqrt{2} + \log 0.8251,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 - \log 2\sqrt{2} + \log 0.8251\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 1$, dann gilt $\Lambda_j = 0$. Dieser Fall muss noch untersucht werden.

(xxix.2) $\beta^{(j+1)} = (b-3)\alpha^2 + (2b-2)\alpha + 1$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1}{(b-3)\alpha^{(2)2}+(2b-2)\alpha^{(2)}+1} = -\alpha^2\frac{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1}{b\alpha^2+4\alpha+3-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{(b-3)\alpha^2+(2b-2)\alpha+1}{b\alpha^2+4\alpha+3-b} = \frac{b-3}{b}\left(1 - \frac{(8-4b)\alpha+7-4b}{(2b+2)\alpha^2+(12-4b)\alpha+7-5b}\right)$ mit $b^2 = b - 2$. Dann gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b-3| - \log|b| + \log\left|1 - \frac{(8-4b)\alpha + 7 - 4b}{(2b+2)\alpha^2 + (12-4b)\alpha + 7 - 5b}\right| = \log 2 + \log 3.1352,$$

$$|\Lambda_j| = |(C_j + 1)\log 3.4281 + \log 2 + \log 3.1352|.$$

Minimal für $C_j + 1 = -1$, untere Schranke 0.6038, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(xxix.3) $\beta^{(j+1)} = b\alpha^2 + 4\alpha + 3 - b$: $\frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}} = \frac{b\alpha^2+4\alpha+3-b}{b\alpha^{(2)2}+4\alpha^{(2)}+3-b} = -\alpha^2\frac{b\alpha^2+4\alpha+3-b}{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}$, sei $\tilde{\delta}_j = \frac{b\alpha^2+4\alpha+3-b}{\alpha^2+(4-2b)\alpha-b} = b\left(1 - \frac{2b\alpha-1}{b\alpha^2+(2b+4)\alpha+2-b}\right)$, da $b^2 = b - 2$ gilt. Man erhält

$$\log|\tilde{\delta}_j| = \log|b| + \log\left|1 - \frac{2b\alpha - 1}{b\alpha^2 + (2b+4)\alpha + 2 - b}\right| = \log\sqrt{2} + \log 0.3866,$$

$$|\Lambda_j| = \left|(C_j + 1)\log 3.4281 + \log\sqrt{2} + \log 0.3866\right|.$$

Minimal für $C_j + 1 = 0$, untere Schranke 0.6038, obere Schranke 0.139898 für $|y| \geq 4$. Widerspruch.

(xxx) $\{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2, \alpha^2+b\alpha+1+b, 2\alpha^2-(b-2)\alpha+1\}$ ($D=31$ und $t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$)

(xxx.1) $\beta^{(j+1)}=(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2}{(b+1)\alpha^{(2)2}+(b+2)\alpha^{(2)}+2}=\alpha^2\frac{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2}{\alpha^2+b\alpha+1+b}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2}{\alpha^2+b\alpha+1+b}=(b+1)\left(1-\frac{(b-10)\alpha-9+3b}{(b+1)\alpha^2+(2b-8)\alpha-7+3b}\right)$ mit $b^2=b-8$. Es folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=\log|b+1|+\log\left|1-\frac{(b-10)\alpha-9+3b}{(b+1)\alpha^2+(2b-8)\alpha-7+3b}\right|=\log\sqrt{10}+\log 0.3984,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 1.7742+\log\sqrt{10}+\log 0.3984\right|.$$

Minimal für $C_j+1=0$, untere Schranke 0.231, obere Schranke 0.143915 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.

(xxx.2) $\beta^{(j+1)}=\alpha^2+b\alpha+1+b: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{\alpha^2+b\alpha+1+b}{\alpha^{(2)2}+b\alpha^{(2)}+1+b}=\alpha^2\frac{\alpha^2+b\alpha+1+b}{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{\alpha^2+b\alpha+1+b}{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{(3b-2)\alpha+1+2b}{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}\right)$ mit $b^2=b-8$. Es gilt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=-\log 2+\log\left|1+\frac{(3b-2)\alpha+1+2b}{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}\right|=-\log 2+\log 19.819,$$

$$|\Lambda_j|=|(C_j+1)\log 1.7742-\log 2+\log 19.819|.$$

Minimal für $C_j+1=-4$, und es gilt dann $\Lambda_j=0$, was eine genauere Betrachtung erfordert.

(xxx.3) $\beta^{(j+1)}=2\alpha^2-(b-2)\alpha+1: \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}=\frac{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}{2\alpha^{(2)2}-(b-2)\alpha^{(2)}+1}=\alpha^2\frac{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2}$, sei $\tilde{\delta}_j=\frac{2\alpha^2-(b-2)\alpha+1}{(b+1)\alpha^2+(b+2)\alpha+2}=\frac{2}{1+b}\left(1+\frac{(6-2b)\alpha-3+b}{(2+2b)\alpha^2+(4+2b)\alpha+4}\right)$ mit $b^2=b-8$. Daraus folgt

$$\log|\tilde{\delta}_j|=\log|2|-\log|1+b|+\log\left|1+\frac{(6-2b)\alpha-3+b}{(2+2b)\alpha^2+(4+2b)\alpha+4}\right|=\log\frac{2}{\sqrt{10}}+\log 0.1267,$$

$$|\Lambda_j|=\left|(C_j+1)\log 1.7742+\log\frac{2}{\sqrt{10}}+\log 0.1267\right|.$$

Minimal für $C_j+1=4$, untere Schranke 0.231, obere Schranke 0.143915 für $|y|\geq 6$. Widerspruch.

Kapitel 4

Lösungen der relativen Thue-Gleichung

4.1 Einleitung

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, dass die relative Thue-Gleichung (1.1) für $\Lambda_j \neq 0$ keine Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ besitzt, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\begin{cases} \bullet\ |y| \geq 4 \text{ (für } |t| \geq 6) \text{ bzw. } |y| \geq 7 \text{ (für } |t| < 6), \\ \bullet\ x \notin \{0, -y, ty\} \text{ und} \\ \bullet\ \gamma = x - \alpha y \text{ ist nicht zu einer Zahl aus } \mathbb{Z}_k \text{ assoziiert.} \end{cases}$$

In diesem Kapitel werden nun jene Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$, die diese Eigenschaften nicht erfüllen, daraufhin untersucht, ob sie einen Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung (1.1) leisten. Weiters wird der Spezialfall $\Lambda_j = 0$ untersucht.

4.2 Der Fall $\Lambda_j = 0$

Für diesen Fall lassen sich zwei Kategorien unterscheiden. Die "allgemeine" Kategorie umfasst jene β, die für eine unendliche Familie von Parametern t den Wert $\Lambda_j = 0$ ergeben, während die "spezielle" Kategorie jene β enthält, für die nur endlich viele Parameter t zu $\Lambda_j = 0$ führen. Die allgemeine Kategorie ist schwieriger zu behandeln und wird daher zuerst betrachtet. In diesen Fällen kann gezeigt werden, dass es für das Lösen der Thue-Gleichung (1.1) genügt, eine endliche Menge von t zu untersuchen. In Abschnitt 4.2.4 wird dann die spezielle Kategorie behandelt. Dazu betrachtet man zuerst alle β der Form $\beta = u + v\alpha$ und dann jene der Form $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$.

4.2.1 Eine Rekursion für die allgemeine Kategorie

Man betrachtet die folgenden Fälle:

	Diskriminante	t	β
Fall 1	alle D	alle t	$\alpha+2$
Fall 2	$D=3$	alle t	$\alpha+1-b$
Fall 3		alle t	$\alpha+b$
Fall 4		alle t	$\alpha+1+b$
Fall 5		alle t	$\alpha+2-b$
Fall 6	$D=7$	alle t	$b\alpha+1$

Aufgrund von [3, Lemma 4.5] genügt es, Lösungen (x,y) zu suchen, die

$$\gamma^{(3)} = |x-\alpha^{(3)}y| = \min_{j\in\{1,2,3\}} \gamma^{(j)}, \tag{4.1}$$

erfüllen, d.h. $j=3$ unter der Annahme $|t|\geq 6$ sowie $|y|\geq 4$. Jene Fälle mit $|t|<6$ werden später untersucht.

$\Lambda_j=\Lambda_3$ lässt sich wie in (3.8) darstellen. Setzt man nun für

$$\gamma^{(j+1)} = \mu\beta^{(j+1)}(\alpha^{(j+1)})^{b_1}(\alpha^{(j+1)}+1)^{b_2},$$

so ergibt sich für Λ_3 der folgende Ausdruck:

$$\Lambda_3 = \log\left|\frac{\beta}{\beta^{(2)}}\frac{\alpha^{b_1}(\alpha^{(3)}-\alpha^{(2)})(\alpha+1)^{b_2}}{(\alpha^{(2)})^{b_1}(\alpha^{(3)}-\alpha)(\alpha^{(2)}+1)^{b_2}}\right|.$$

Mit $\alpha^{(2)}=-\frac{\alpha+1}{\alpha}$ und $\alpha^{(3)}=-\frac{1}{\alpha+1}$ erhält man

$$\Lambda_3 = \log\left|\frac{\beta}{\beta^{(2)}}\alpha^{2b_1+b_2-1}(\alpha+1)^{-b_1+b_2}\right|. \tag{4.2}$$

Die Fälle 1 bis 6 lassen sich alle in der Form $\beta=u+v\alpha$ mit $u,v\in\mathbb{Z}_k$ darstellen, und es gilt $\frac{\beta}{\beta^{(2)}}=\frac{u+v\alpha}{u+v\alpha^{(2)}}=\alpha\frac{u+v\alpha}{(u-v)\alpha-v}$. Setzt man diesen Ausdruck in (4.2) ein, so ergibt sich

$$\Lambda_3 = \log\left|\frac{u+v\alpha}{(u-v)\alpha-v}\right| + (2b_1+b_2)\log|\alpha| + (b_2-b_1)\log|\alpha+1|.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass für diese 6 Fälle $|u+v\alpha|=|(u-v)\alpha-v|$ gilt. Mithilfe dieser Formel, sowie $|\alpha|=|\alpha+1|$ für $\Re\alpha=-\frac{1}{2}$, bekommt man

$$\Lambda_3 = (b_1+2b_2)\log|\alpha|.$$

Ist $\Lambda_3=0$, so folgt daraus $b_1=-2b_2$. Setzt man $b_2=-m$, so ergibt sich, dass für $\Lambda_3=0$

$$\gamma=\gamma_m=\mu\beta\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m \quad (m\in\mathbb{Z}) \tag{4.3}$$

sein muss. γ_m kann jedenfalls auch als $\gamma_m=x_1(m)+x_2(m)\alpha+x_3(m)\alpha^2$ mit $x_i(m)\in\mathbb{Z}_k$ geschrieben werden. Nun werden alle m gesucht, für die $\gamma_m=x-\alpha y$, $x,y\in\mathbb{Z}_k$ gilt, d.h. es muss $x_3(m)=0$ sein. Dazu stellt man eine Rekursion für $x_3(m)$ auf. Es gilt

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+1} = -\alpha^2+(t+1)\alpha+1$$

und daraus folgt

$$\gamma_m = (-\alpha^2 + (t+1)\alpha + 1)^m (u + v\alpha + 0\alpha^2) = x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2,$$

woraus sich

$$\gamma_{m+1} = (-\alpha^2 + (t+1)\alpha + 1)(x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2)$$

ergibt. Mithilfe von $\alpha^3 = (t-1)\alpha^2 + (t+2)\alpha + 1$ erhält man

$$\begin{aligned}\gamma_{m+1} = {} & x_1(m) - x_2(m) + 2x_3(m) + \\ & + \alpha((t+1)x_1(m) + (-1-t)x_2(m) + (2t+3)x_3(m)) + \\ & + \alpha^2(-x_1(m) + 2x_2(m) + (t-3)x_3(m))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \\ x_3(m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ t+1 & -1-t & 2t+3 \\ -1 & 2 & t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \\ x_3(m) \end{pmatrix}$$

mit dem Startwert

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man bekommt also das System von Rekursionen

$$\begin{aligned} I: & a_m = a_{m-1} - b_{m-1} + 2c_{m-1} \\ II: & b_m = (t+1)a_{m-1} - (t+1)b_{m-1} + (2t+3)c_{m-1} \\ III: & c_m = -a_{m-1} + 2b_{m-1} + (t-3)c_{m-1}, \end{aligned}$$

wobei

$$a_m := x_1(m), b_m := x_2(m), c_m := x_3(m).$$

Multipliziert man I mit $t+1$ und subtrahiert man die daraus erhaltene Gleichung von II, so ergibt sich

$$b_m = (t+1)a_m + c_{m-1}. \tag{4.4}$$

Durch Substitution von b_m in III mithilfe (4.4) ergibt sich

$$a_m = \frac{1}{2t+1}c_{m+1} - \frac{t-3}{2t+1}c_m - \frac{2}{2t+1}c_{m-1}. \tag{4.5}$$

(4.4) zusammen mit (4.5) liefert

$$b_m = \frac{t+1}{2t+1}c_{m+1} - \frac{t^2-2t-3}{2t+1}c_m - \frac{1}{2t+1}c_{m-1}. \tag{4.6}$$

Nun setzt man (4.5) und (4.6) in I ein und erhält damit für $c_m = x_3(m)$

$$c_m + 3c_{m-1} - (t^2+t+4)c_{m-2} + c_{m-3} = 0 \tag{4.7}$$

mit

$$c_0 = 0, c_1 = 2v - u, c_2 = tu + 4u - 7v,$$

gültig für alle $m \in \mathbb{Z}$. Man schreibt nun $L = -(t^2 + t + 4) = |t|^2 - 4$ ($\Re t = -\frac{1}{2}$!) und

$$p_m := \begin{cases} \frac{x_3(m)}{\mu(2t+1)}, & \text{für } \beta = \alpha + 2, \\ \frac{x_3(m)}{\mu(2u-v)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sodass man schließlich die Rekursion

$$p_m + 3p_{m-1} + Lp_{m-2} + p_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.8}$$

mit

$$p_0 = 0, p_1 = \{0, 1\}, p_2 = p_2(c) = \left\{1, \frac{(t+4)u - 7v}{2v - u}\right\} \in \mathbb{Z}$$

erhält. Für L gilt $L \in \mathbb{Z}$ bzw. $L \in \mathbb{N}$ für $|t| \geq 2$, da $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}$ bzw. $|t|^2 = \frac{1+c^2D}{4}$ mit $c^2 \equiv 1 \pmod 4$ und $D \equiv 3 \pmod 4$. Die Rekursion (4.7) für c_m gilt auch für negative m, was sich auf die Rekursion (4.8) überträgt. Nun sei $q_m = p_{-m}$, dann erhält man die folgende Rekursion

$$q_m + Lq_{m-1} + 3q_{m-2} + q_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.9}$$

mit

$$q_0 = 0, q_1 = q_1(c) = \left\{-1, -\frac{(t+1)u - v}{2v - u}\right\} \in \mathbb{Z}, q_2 = q_2(c) = \left\{L, \frac{(Lt + L + 1)u - (L+2)v}{2v - u}\right\} \in \mathbb{Z}.$$

Der erste Wert von p_1, p_2 bzw. q_1, q_2 gilt für $\beta = \alpha + 2$.

Man kann nun mithilfe dieser Rekursion zeigen, dass für $L \geq 3$, d.h. $|t| \geq \sqrt{7}$, γ_m mit negativem m keine Lösungen der Thue-Gleichung liefern kann. Dazu betrachtet man die Folge Q_m, die für Fall 3 und 4 durch $Q_m = (-1)^{m+1}q_m$ und in den übrigen Fällen durch $Q_m = (-1)^m q_m$ definiert ist. Für $L > 3$ gilt $Q_m > 0$ für alle $m \geq 1$. $Q_0 = 0$ und Q_1, Q_2 sind in allen Fällen > 0. Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass Q_m monoton wachsend ist: Sei $Q_{m-1} \geq Q_{m-2} \geq ... \geq Q_0 \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q_m &= LQ_{m-1} - 3Q_{m-2} + Q_{m-3} \\ &\geq LQ_{m-1} - 3Q_{m-1} + Q_{m-3} \\ &\geq Q_{m-1} + Q_{m-3} \\ &\geq Q_{m-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Im Fall $L = 3$ ist die Rekursion für q_m von der Form

$$q_m + 3q_{m-1} + 3q_{m-2} + q_{m-3} = 0, m \geq 3,$$

aus der man die explizite Darstellung

$$q_m = A(-1)^m + Bm(-1)^m + Cm^2(-1)^m, m \geq 3$$

gewinnt. Setzt man nun die Startwerte $q_0 = 0, q_1, q_2 = q_2(c)$ ein, so ergibt sich

$$q_m(3, c) = (-1)^m \left(\frac{q_2(c) + 2q_1}{2}m^2 - \frac{q_2(c) + 4q_1}{2}m\right)$$

Man betrachtet auch in diesem Fall $Q_m = (-1)^m q_m$ bzw. $Q_m = (-1)^{m+1} q_m$ und kann analog zu (4.10) zeigen, dass $Q_m > 0$ für $m \geq 1$ gilt. Das heißt also, γ_m mit negativem m kann nur für sehr kleine t eine Lösung der Thue-Gleichung (1.1) liefern. Die Fälle 2 bis 6 treten jedoch für so kleine t gar nicht auf (siehe Tabelle in Korollar 2.18), also ist nur Fall 1 für alle t mit $|t| \leq \sqrt{6}$ zu untersuchen.

Die Lösung von (4.8) ist eine Folge von Polynomen

$$p_m = p_m(L, c)$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Für den Fall $L = 3$ ergibt sich für p_m die folgende Rekursion

$$p_m + 3p_{m-1} + 3p_{m-2} + p_{m-3} = 0, m \geq 3$$

mit der Lösung

$$p_m = D(-1)^m + Em(-1)^m + Fm^2(-1)^m, m \geq 3.$$

Durch Einsetzen der Startwerte $p_0 = 0, p_1, p_2 = p_2(c)$ erhält man

$$p_m(3, c) = (-1)^m \left(\frac{p_2(c) + 2p_1}{2} m^2 - \frac{p_2(c) + 4p_1}{2} m \right).$$

Aus $L \equiv 3 \bmod (L-3)$ und der Tatsache, dass $p_m(L, c)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, folgt

$$p_m(L, c) \equiv p_m(3, c) \bmod (L-3), \tag{4.11}$$

und man erhält das folgende Lemma.

Lemma 4.1 *Sei $p_m = p_m(L, c)$ wie in (4.8) definiert. Dann ergibt sich aus γ_m genau dann eine Lösung der Thue-Gleichung* (1.1), *wenn $p_m(L, c) = 0$ gilt. Weiters muss in diesem Fall für $L - 3 = |t|^2 - 7$*

$$|t|^2 - 7 \;\Big|\; \frac{p_2(c) + 2p_1}{2} m^2 - \frac{p_2(c) + 4p_1}{2} m$$

gelten.

4.2.2 Einschränkung der zu untersuchenden Fälle mithilfe der Rekursion

Unter Verwendung der Bedingung aus Lemma 4.1 lässt sich eine untere Schranke für alle positiven m, die eine Lösung der Thue-Gleichung liefern können, berechnen.

- Fall 1: $\beta = \alpha + 2$ und beliebiges D. Dann gilt $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ und $|t|^2 - 7 \mid \frac{m(m-1)}{2}$ und daher

$$m = 0 \quad \text{oder} \quad m = 1 \quad \text{oder} \quad (m \geq 2 \text{ und } m \geq 1.4121020211|t|) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \tag{4.12}$$

- Fall 2: $\beta = \alpha + 1 - b$ und $D = 3$. Es gilt $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{c-7}{2}$ mit $c \geq 5$ und deshalb $|t|^2 - 7 = \frac{3c^2-27}{4} \mid \frac{c-3}{4} m^2 - \frac{c+1}{4} m$. Es ist also entweder $m = 0$, $m = \frac{c+1}{c-3} = 1 + \frac{4}{c-3}$ oder $\frac{3c^2-27}{4} \leq \frac{c-3}{4} m^2 - \frac{c+1}{4} m$. Im zweiten Fall müsste dann $c - 3 | 4$ und somit $c \in \{5, 7\}$ gelten, woraus dann $m = 3$ bzw. $m = 2$ folgt. Aus dem dritten Fall folgt für $m \geq 3$

$3c \leq m^2 - m$ bzw. $m^2 \geq 3c+3$ und $m^4 \geq 9c^2+3 = 12|t|^2$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$. Man erhält $m \geq \sqrt{2}\sqrt[4]{3}|t|^{1/2}$. Für Fall 2 ergibt sich damit insgesamt:

$$\begin{aligned} &m = 0 \quad \text{oder} \quad (m = 2 \text{ und } c = 7) \quad \text{oder} \\ &(m \geq 3 \text{ und } m \geq 1.8612097182|t|^{1/2}) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \end{aligned} \tag{4.13}$$

- Fall 3: $\beta = \alpha + b$ und $D = 3$. Dann gilt $p_1 = 1$, $p_2 = -\frac{c+7}{2}$, $c \neq 3$ und daraus $|t|^2 - 7 = \frac{3c^2-27}{4} \mid -\frac{c+3}{4}m^2 + \frac{c-1}{4}m$. Es ist also entweder $m = 0$, $m = \frac{c-1}{c+3} = 1 - \frac{4}{c+3}$ oder $\frac{3c^2-27}{4} \leq \frac{c+3}{4}m^2 - \frac{c-1}{4}m$. Im zweiten Fall müsste dann $c+3|4$ erfüllt sein, woraus sich keine gültigen c bzw. m ergeben. Aus dem dritten Fall folgt für $m \geq 1$ $3(c-3) \leq m^2 - \frac{c-1}{c+3}m \leq m^2$ bzw. $m \geq \sqrt{3}\sqrt{c-3}$. Für c gilt $c = \sqrt{\frac{4|t|^2-1}{3}} \geq \frac{2|t|}{\sqrt{3}} - 1$, sowie $\sqrt{c-3} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}|t|^{1/2} - 1$ für $|t| \geq 48$ und somit $m \geq \sqrt{2}\sqrt[4]{3}|t|^{1/2} - \sqrt{3}$. Für Fall 3 erhält man damit insgesamt:

$$m = 0 \quad \text{oder} \quad (m \geq 1 \text{ und } m \geq 2^{1/2}3^{1/4}|t|^{1/2} - \sqrt{3} \geq 1.6112097|t|^{1/2}) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \tag{4.14}$$

- Fall 4: $\beta = \alpha + 1 + b$ und $D = 3$. Dann gilt $p_1 = 1$, $p_2 = -\frac{3c+7}{2}$, $c \geq 5$ und daraus $|t|^2 - 7 = \frac{3c^2-27}{4} \mid -\frac{3c+3}{4}m^2 + \frac{3c-1}{4}m$. Es ist also entweder $m = 0$, $m = \frac{3c-1}{3c+3} = 1 - \frac{4}{3c+3}$ oder $\frac{3c^2-27}{4} \leq \frac{3c+3}{4}m^2 - \frac{3c-1}{4}m$. Im zweiten Fall müsste $3c+3|4$ gelten. Dies liefert keine gültigen c bzw. m. Aus dem dritten Fall ergibt sich für $m > 3$, dass $\frac{c^2-9}{c+1} \leq m^2 - m + \frac{4}{3(c+1)} \leq m^2 - \frac{7}{9}m$ und damit $m^4 \geq \frac{4}{3}|t|^2$. Für $m = 3$ gilt $3c^2 - 27 \leq 9(3c+3) - 3(3c-1)$, daraus erhält man $c \leq 7$, woraus sich auch in diesem Fall $m^4 \geq \frac{4}{3}|t|^2$ bzw. $m \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}|t|^{1/2}$ schließen lässt. Für Fall 4 erhält man damit insgesamt:

$$m = 0 \quad \text{oder} \quad (m \geq 4 \text{ und } m \geq 2^{1/2}3^{-1/4}|t|^{1/2} \geq 1.07456993182|t|^{1/2}) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \tag{4.15}$$

- Fall 5: $\beta = \alpha + 2 - b$ und $D = 3$. Es gilt $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{3c-7}{2}$, $c \neq 3$ und daraus $|t|^2 - 7 = \frac{3c^2-27}{4} \mid \frac{3c-3}{4}m^2 - \frac{3c+1}{4}m$. Es ist also entweder $m = 0$, $m = \frac{3c+1}{3c-3} = 1 + \frac{4}{3c-3}$ oder $\frac{3c^2-27}{4} \leq \frac{3c-3}{4}m^2 - \frac{3c+1}{4}m$. Im zweiten Fall müsste $3c-3|4$ erfüllt sein, woraus sich keine gültigen c bzw. m ergeben. Aus dem dritten Fall folgt für $m \geq 3$ $c \leq m^2 - m \leq m^2$ und damit $m^4 \geq \frac{4}{3}|t|^2$ bzw. $m \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}|t|^{1/2}$. Für Fall 5 erhält man damit insgesamt:

$$m = 0 \quad \text{oder} \quad (m \geq 4 \text{ und } m \geq 2^{1/2}3^{-1/4}|t|^{1/2} \geq 1.07456993182|t|^{1/2}) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \tag{4.16}$$

- Fall 6: $\beta = b\alpha + 1$ und $D = 7$. Dann gilt $p_1 = 1$, $p_2 = -\frac{c-7}{2}$ und daraus $|t|^2 - 7 = \frac{7c^2-27}{4} \mid \frac{c-3}{4}m^2 - \frac{c+1}{4}m$. Es ist also entweder $m = 0$, $m = \frac{c+1}{c-3} = 1 + \frac{4}{c-3}$ oder $\frac{7c^2-27}{4} \leq \frac{c-3}{4}m^2 - \frac{c+1}{4}m$. Im zweiten Fall müsste dann $c-3|4$ und somit $c \in \{5, 7\}$ gelten, woraus dann $m = 3$ bzw. $m = 2$ folgt. Aus dem dritten Fall folgt für $m \geq 3$ $7c \leq m^2 - m$ bzw. $m^2 \geq 7c+3$ und $m^4 \geq 49c^2 + 7 = 28|t|^2$. Man erhält $m \geq \sqrt{2}\sqrt[4]{7}|t|^{1/2}$. Für Fall 6 ergibt sich damit insgesamt:

$$\begin{aligned} &m = 0 \quad \text{oder} \quad (m = 2 \text{ und } c = 7) \quad \text{oder} \\ &(m \geq 3 \text{ und } m \geq 2^{1/2}7^{1/4}|t|^{1/2} \geq 2.30032663379|t|^{1/2}) \quad \text{für} \quad |t| \geq 48. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Alle auftretenden Fälle mit $m = 0$, d.h. $\gamma = \mu(u + v\alpha)$, sind Fälle, in denen $|y| < 4$ gilt, was ein Widerspruch zur Annahme $|y| \geq 4$ in diesem Kapitel ist.

Fall 1 mit $m = 1$ liefert $\gamma = \mu(\alpha + 2)\frac{\alpha^2}{\alpha+1} = 1 + (t + 1)\alpha$, und somit die Lösung $(1, -1 - t)$ der Thue-Gleichung (1.1) (Lösung [D.2] in Satz 4.4).

Fall 2 mit $m = 2$ und $c = 7$, d.h. $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$, ergibt $\gamma = \mu(\alpha + 1 - b)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^2$ und damit die Lösung $(5(1 - b), -(19 + 14b))$ der Thue-Gleichung (1.1) (Lösung [3.5] in Satz 4.4).

Fall 6 mit $m = 2$ und $c = 7$, d.h. $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{7}}{2}$, liefert $\gamma = \mu(b\alpha + 1)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^2$, was die Lösung $(-12, -35 + 82b)$ der Thue-Gleichung (1.1) (Lösung [7.2] in Satz 4.4) ergibt.

Nun werden die obigen Abschätzungen für m sowie die Abschätzung in [3, Satz 1] dazu verwendet, um die möglichen Werte von betragsmäßig großen t, für die γ_m eine Lösung der Thue-Gleichung (1.1) ergeben könnte, auf eine endliche Menge zu reduzieren.

Es sei nun also $m \geq 2$ und

$$\gamma = \gamma_m = \mu(u + v\alpha)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}\right)^m = x - \alpha y. \tag{4.18}$$

Nun versucht man eine obere Schranke für $|x - \alpha^{(3)}y|$ zu finden. Dazu betrachtet man

$$\Lambda_3 = \log\left|\frac{\gamma}{\gamma^{(2)}}\right| - \log\left|\frac{\alpha^{(3)} - \alpha}{\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}}\right|.$$

Ist $\Lambda_3 = 0$, so folgt daraus

$$\log\left|\frac{\gamma}{\gamma^{(2)}}\right| = \log\left|\frac{\alpha^{(3)} - \alpha}{\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}}\right| \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{x - \alpha y}{x - \alpha^{(2)}y}\right| = \left|\frac{\alpha^{(3)} - \alpha}{\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}}\right| = |\alpha|$$

und somit

$$|x - \alpha^{(2)}y| = \frac{1}{|\alpha|}|x - \alpha y| = \frac{1}{|\alpha|}|\gamma|.$$

Für $|N(\gamma_m)|$ gilt, da $|u + v\alpha| = |(u - v)\alpha - v|$ sowie $|\alpha| = |\alpha + 1|$ erfüllt sind,

$$|N(\gamma_m)| = \frac{|u + v\alpha|^2}{|\alpha|^2}|u - v + u\alpha| = |x - \alpha y||x - \alpha^{(2)}y||x - \alpha^{(3)}y|.$$

Daraus folgt

$$|x - \alpha^{(3)}y| = \frac{|u - v + u\alpha|}{|\alpha|^{2m+1}} \leq \frac{2}{|\alpha|^{2m}} \tag{4.19}$$

für $|t| \geq 6$ für Fall 1 bis Fall 6 ($\beta = u + v\alpha$). Weiters gilt mit $\rho = \frac{x/y - \alpha^{(3)}}{\alpha - \alpha^{(3)}}$,

$$\gamma = x - \alpha y = y(\alpha - \alpha^{(3)})(1 + \rho).$$

Verwendet man $|\alpha - \alpha^{(3)}| = \frac{|\alpha|^2 - 1}{|\alpha|}$, so ergibt sich

$$|y| = \frac{|u + v\alpha||\alpha|}{(|\alpha|^2 - 1)|1 + \rho|}|\alpha|^m \leq \frac{|u| + |v||\alpha|}{|\alpha| - 1}\frac{1}{|1 + \rho|}|\alpha|^m. \tag{4.20}$$

Es gilt

$$\frac{1}{|\alpha - \alpha^{(3)}|} = \frac{|\alpha|}{|\alpha|^2 - 1} \leq \frac{1}{|\alpha| - 1} \leq \frac{1}{0.99912221198|t|}, \tag{4.21}$$

wobei sich die zweite Ungleichung, die für $|t| \geq 48$ gültig ist, aus der Darstellung von α in Potenzen von t in (2.3) ergibt. Kombiniert man (4.21) mit Korollar 3.3, so erhält man

$$\left|\frac{1}{1+\rho}\right| \leq 1.00121012929$$

für $|y| \geq 4$, $|t| \geq 48$. Daraus ergeben sich dann die folgenden oberen Schranken für $|y|$ für $|t| \geq 48$.

- Fälle 1 bis 5:
$$|y| \leq 1.065174501|\alpha|^m. \tag{4.22}$$

- Fall 6:
$$|y| \leq 1.467399495|\alpha|^m. \tag{4.23}$$

Es kann nun [3, Satz 1] angewendet werden. Dieser Satz besagt, dass

$$\left|\alpha^{(3)} - \frac{x}{y}\right| > \frac{1}{746|t||y|^{\kappa+1}} \tag{4.24}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}_k$ mit

$$|y| \geq 0.0773|t| \tag{4.25}$$

gültig ist, wobei

$$\kappa \leq 1 + \frac{2.13}{\log|t|} + \frac{6.8}{\log^2|t|} \tag{4.26}$$

gilt (wegen (4.20) gilt (4.25) für $m \geq 1$ und $|t| \geq 6$). Die beiden Ungleichungen (4.19) und (4.24) liefern

$$\frac{1}{746|t||y|^{\kappa}} < \left|x - \alpha^{(3)}y\right| \leq \frac{2}{|\alpha|^{2m}}$$

so dass $|\alpha|^{2m} < 1492|t||y|^{\kappa}$ gilt. Verwendet man (4.22), (4.23) und die Darstellung von α in Potenzen von t, (2.3), so folgt daraus

$$|\alpha|^{(2-\kappa)m-1} < \begin{cases} 1493.31082(1.06517501)^{\kappa} & \text{in den Fällen 1 bis 5,} \\ 1493.31082(1.46739949)^{\kappa} & \text{im Fall 6.} \end{cases} \tag{4.27}$$

Jetzt können die unteren Schranken für m aus (4.12) bis (4.17), (4.26) sowie wiederum (2.3) verwendet werden, um die folgenden Ungleichungen für $|t|$ zu finden (andernfalls würde (4.27) zu einem Widerspruch führen).

Lemma 4.2 *Seien die Fälle 1 bis 6 wie in der Tabelle von Seite 73 gegeben. Dann genügt es, in diesen 6 Fällen für die Lösung der Thue-Gleichung* (1.1) *die folgenden endlichen Mengen von t zu untersuchen.*

- *Fall 1: $|t| \leq 54$, d.h., $c^2 D < 11663$.*

- *Fall 2:* $|t| \leq 81$, *d.h.*, $c \leq 93$.
- *Fall 3:* $|t| \leq 86$, *d.h.*, $c \leq 99$.
- *Fall 4:* $|t| \leq 108$, *d.h.*, $c \leq 123$.
- *Fall 5:* $|t| \leq 108$, *d.h.*, $c \leq 123$.
- *Fall 6:* $|t| \leq 76$, *d.h.*, $c \leq 57$.

4.2.3 Lösungen der Thue-Gleichung für die allgemeine Kategorie

Aus Lemma 4.2 folgt also, dass für die allgemeine Kategorie nur endlich viele Fälle mit positivem m betrachtet werden müssen. Um diese endlich vielen Fälle behandeln zu können, wird das Computer Algebra System KASH3 [5] verwendet. Dazu müssen die relativen Thue-Gleichungen in entsprechende rationale Gleichungen umgewandelt werden. Man verwendet die folgende Darstellung:

$$x - \alpha^{(3)} y = (u + \alpha^{(3)} v) \left(\frac{\alpha^{(3)2}}{\alpha^{(3)} + 1} \right)^m = \left(u - \frac{v}{\alpha + 1} \right) \left(\frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^m \tag{4.28}$$

und daraus

$$x(\alpha + 1) + y = (u - v + u\alpha) \frac{1}{(\alpha(\alpha + 1))^m} = \frac{u - v + u\alpha}{|\alpha|^{2m}} (-1)^m, \tag{4.29}$$

da für $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$ $\alpha(\alpha+1) = -|\alpha|^2$ gilt. Die Transformation auf eine reelle Gleichung geht dann folgendermaßen vor sich:

- Fall 1: Es gilt

  $$x\alpha + x + y = \frac{2\alpha + 1}{|\alpha|^{2m}} (-1)^m \in i\mathbb{R}$$

  und daher

  $$0 = 2\Re(x\alpha + x + y) = x\alpha + x + y + \bar{x}\bar{\alpha} + \bar{x} + \bar{y} = (x - \bar{x})\alpha + (x + y + \bar{y}) \cdot 1.$$

  Daraus folgt $x - \bar{x} = 0$ und $x + y + \bar{y} = 0$. Man kann also zeigen, dass $x \in \mathbb{Z}$ und $\Re y = -\frac{x}{2}$ gelten muss, so dass man

  $$y = -\frac{x}{2} + i\sqrt{D}\frac{p}{2} = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2} \right) \frac{p}{c} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

  erhält. Die relative Thue-Gleichung (1.1) wird zu

  $$F(x, y) = \frac{2t + 1}{8c} (D(p^3 + xp^2 c) + 9xp^2 + x^3 c) = \pm(2t + 1).$$

  Die Einheit μ auf der rechten Seite der Gleichung muss ± 1 sein, da die linke Seite der Gleichung reell ist. Man erhält somit die reelle Gleichung

  $$D(p^3 + xp^2 c) + 9xp^2 + x^3 c = \pm 8c,$$

  welche mithilfe von KASH3 gelöst werden kann.

- Fall 2: Es gilt
$$x\alpha + x + y = (1-b)\frac{\alpha+1-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
und damit
$$\frac{1}{1-b}(x\alpha + x + y) = \frac{\alpha+1-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus folgt analog zu Fall 1 $\tilde{x} := bx \in \mathbb{Z}$ und $\Re(by) = -\frac{bx}{2}$, und man erhält
$$y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{bc}.$$
Hieraus ergibt sich aus der Thue-Gleichung (1.1) die reelle Gleichung
$$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}p^2 + \tilde{x}^3c = \pm 4(c-3).$$

- Fall 3: Hier gilt
$$x\alpha + x + y = b\frac{\alpha+b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
sowie
$$\frac{1}{b}(x\alpha + x + y) = \frac{\alpha+b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus folgt, wiederum analog zu Fall 1, $\tilde{x} := (1-b)x \in \mathbb{Z}$ und $\Re((1-b)y) = -\frac{(1-b)x}{2}$, und man erhält
$$y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{(1-b)c}.$$
Es ergibt sich aus der Thue-Gleichung (1.1) die reelle Gleichung
$$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}p^2 + \tilde{x}^3c = \pm 4(c+3).$$

- Fall 4: Man bekommt
$$x\alpha + x + y = \frac{1+b}{3}\frac{3\alpha+1+b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
und somit
$$\frac{3}{1+b}(x\alpha + x + y) = \frac{3\alpha+1+b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich, ebenfalls analog zu Fall 1, mithilfe von $\frac{3}{1+b} = 2-b$, $\tilde{x} := (2-b)x \in \mathbb{Z}$ und $\Re((2-b)y) = -\frac{(2-b)x}{2}$, und man bekommt
$$y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{(2-b)c}.$$
Man erhält aus der Thue-Gleichung (1.1) die reelle Gleichung
$$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}p^2 + \tilde{x}^3c = \pm 12(3c+7).$$

- Fall 5: Es gilt
$$x\alpha + x + y = \frac{2-b}{3}\frac{3\alpha+2-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
und somit
$$\frac{3}{2-b}(x\alpha + x + y) = \frac{3\alpha+2-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich analog zu Fall 1 $\tilde{x} := (1+b)x \in \mathbb{Z}$ und $\Re((1+b)y) = -\frac{(1+b)x}{2}$ und somit
$$y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{(1+b)c}.$$
Man erhält aus der Thue-Gleichung (1.1) die reelle Gleichung
$$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}p^2 + \tilde{x}^3c = \pm 12(3c-7).$$

- Fall 6: Es gilt
$$x\alpha + x + y = \frac{\alpha+1-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich wie in Fall 1 $x \in \mathbb{Z}$ und
$$y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Man erhält dann aus der Thue-Gleichung (1.1) die reelle Gleichung
$$7(p^3 + xp^2c) + 9xp^2 + x^3c = \pm 8(c-2).$$

Man betrachtet nun noch jene t, die bisher bei der Untersuchung der obigen 6 Fälle nicht beachtet wurden. Das sind jene Fälle, wo $L < 3$ ist, d.h. $|t| \leq \sqrt{6}$ bzw. jene Fälle, wo $L > 3$ ist, aber $|t| < 6$ gilt.

$L < 3$ tritt nur im Fall 1 auf. Dabei handelt es sich um $t \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{19}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}\}$. Für diese t lässt sich mit $P_m = (-1)^m p_m$ zeigen, dass $P_m > 0$ für $m \geq 2$ gilt: $P_0 = P_1 = 0$ und $P_2 = 1 > 0$. Nun zeigt man mithilfe vollständiger Induktion, dass P_m monoton wachsend ist: Sei $P_{m-1} \geq P_{m-2} \geq ... \geq P_0 \geq 0$. Dann gilt für $L \leq 2$
$$\begin{aligned} P_m &= 3P_{m-1} - LP_{m-2} + P_{m-3} \\ &\geq 3P_{m-1} - LP_{m-1} + P_{m-3} \\ &= (3-L)P_{m-1} + P_{m-3} \\ &\geq P_{m-1}. \end{aligned}$$

Man erhält also, dass sich für positive m nur für $m \in \{0,1\}$ Lösungen der Thue-Gleichung ergeben können. Diese beiden Möglichkeiten wurden etwas weiter oben bereits betrachtet. Um alle negativen m behandeln zu können, verwendet man wieder KASH3. Man erhält in diesem Fall die Darstellung
$$x - \alpha^{(3)}y = (u + \alpha^{(3)}v)\left(\frac{{\alpha^{(3)}}^2}{\alpha^{(3)}+1}\right)^{-m} = \left(u - \frac{v}{\alpha+1}\right)(\alpha(\alpha+1))^m \tag{4.30}$$

analog zu (4.28) und daraus

$$x(\alpha+1)+y=(u\alpha+u-v)(\alpha(\alpha+1))^m=(u\alpha+u-v)|\alpha|^{2m}(-1)^m. \tag{4.31}$$

Mithilfe analoger Betrachtungen zu oben ergibt sich daraus wieder die selbe reelle Thue-Gleichung wie für den Fall $L>3$.

$L>3$, aber $|t|<6$, kommt nur bei Fall 2 und 3 mit $t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$ sowie Fall 6 mit $t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$ vor. Hier ist das Vorgehen analog zu den entsprechenden Fällen mit $|t|\geq 6$. Man setzt wieder $Q_m=(-1)^m q_m>0$ (Fall 2 und Fall 6) bzw. $Q_m=(-1)^{m+1}q_m>0$ (Fall 3) für $m\geq 1$ und erhält somit ebenfalls, dass es für negative m keine Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) geben kann. Die positiven m behandelt man mithilfe von KASH3, wobei wiederum die Transformation auf eine reelle Thue-Gleichung durchgeführt wird. Diese reellen Gleichungen sind die selben wie für $|t|\geq 6$.

4.2.4 Die spezielle Kategorie

Nun betrachtet man jene Einzelfälle mit $|t|<6$, die $\Lambda_j=0$ ergeben. Dabei handelt es sich um die folgenden Fälle.

	Diskriminante	t	β
Fall 7	$D=3$	$-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$	$(1-3b)\alpha-1$
Fall 8			$(\alpha+1-b)^2$
Fall 9			$\alpha^2+(3-4b)\alpha+1-2b$
Fall 10			$(2b-1)\alpha^2+(4b-1)\alpha+1$
Fall 11			$b\alpha^2+(4-2b)\alpha+3-3b$
Fall 12			$\alpha^2+(4-6b)\alpha-1-b$
Fall 13		$-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}$	$(\alpha+1-b)^2$
Fall 14	$D=7$	$-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$	$2\alpha+1-b$
Fall 15			$(2-b)\alpha-b$
Fall 16			$\alpha^2+(2-2b)\alpha-b$
Fall 17			$\alpha^2+(3-2b)\alpha-b$
Fall 18			$\alpha^2+(4-2b)\alpha-b$
Fall 19			$(b\alpha+1)^2$
Fall 20	$D=11$	$-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$	$b\alpha+1$
Fall 21		$-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{11}}{2}$	$b\alpha+1$
Fall 22	$D=15$	$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$	$\alpha^2+\alpha+1$
Fall 24	$D=19$	$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$	$\alpha^2+\alpha+1$
Fall 25			$(\alpha^2+\alpha+1)^2$
Fall 26	$D=23$	$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$	$(1+b)\alpha+3$
Fall 27			$(2+b)\alpha+5$

	Diskriminante	t	β
Fall 28	$D = 31$	$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$	$(1+b)\alpha + 3$
Fall 29			$(1+3b)\alpha + 5$
Fall 30			$2\alpha^2 + \alpha + 1$
Fall 31			$\alpha^2 + 2\alpha + 2$
Fall 32			$\alpha^2 + b\alpha + 1 + b$
Fall 33	$D = 35$	$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$	$4\alpha^2 + \alpha + 1$
Fall 34			$\alpha^2 + 2\alpha + 2$
Fall 35			$\alpha^2 + \alpha + 1$
Fall 36			$(\alpha^2 + \alpha + 1)^2$
Fall 37	$D = 39, 43, 47, 51, 55$	$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$	$\alpha^2 + \alpha + 1$

"Lineare" β

Hierbei sind die Fälle 7, 14, 15, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 29 von der Form $\beta = u + v\alpha$ und können daher analog zu den Fällen 1 bis 6 aus der allgemeinen Kategorie behandelt werden. In den Fällen, wo $L > 3$ gilt, kann man mit $Q_m = (-1)^m q_m > 0$ für $m \geq 1$ zeigen, dass die negativen m keine Lösung der Thue-Gleichung liefern können. Es müssen daher nur alle positiven m untersucht werden. Für die Fälle, in denen $L < 3$ gilt, ergibt sich mit $P_m = (-1)^{m+1} p_m > 0$, dass alle $m \geq 2$ keinen Beitrag zur Lösungsmenge liefern können. In diesen Fällen müssen also $m = 0, 1$ und alle negativen m untersucht werden. Man transformiert für diese m die Thue-Gleichung (1.1) auf eine reelle Gleichung, indem man (4.29) verwendet.

- Fall 7:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{\alpha + 2 - 3b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R},$$
daraus
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Reelle Gleichung:
$$3(p^3 + 5xp^2) + 9xp^2 + 5x^3 = \pm 32.$$

- Fall 14:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = (1-b)\frac{\alpha + 1 - b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
und somit
$$\frac{1}{1-b}(x\alpha + x + y) = \frac{\alpha + 1 - b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich, da $\frac{1}{1-b} = \frac{b}{2}$ gilt,
$$\tilde{x} := \frac{b}{2}x \in \mathbb{Z}, \quad \Re\left(\frac{b}{2}y\right) = -\frac{\frac{b}{2}x}{2} \text{ bzw. } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{2p}{bc}.$$
Reelle Gleichung:
$$7(p^3 + 3\tilde{x}p^2) + 9\tilde{x}p^2 + 3\tilde{x}^3 = \pm 2.$$

- Fall 15:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = -b\frac{\alpha + 1 - b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$
und somit
$$\frac{1}{b}(x\alpha + x + y) = \frac{\alpha + 1 - b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^{m+1} \in i\mathbb{R}.$$
Daraus folgt
$$\tilde{x} := \frac{1-b}{2}x \in \mathbb{Z}, \quad \Re\left(\frac{1-b}{2}y\right) = -\frac{\frac{1-b}{2}x}{2} \text{ bzw. } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{2p}{(1-b)c}.$$
Reelle Gleichung:
$$7(p^3 + 3\tilde{x}p^2) + 9\tilde{x}p^2 + 3\tilde{x}^3 = \pm 2.$$

- Fall 20, 21, 23: Diese drei Fälle sind analog zu Fall 6 mit $L > 3$, und man erhält dann die reellen Gleichungen
$$11(p^3 + 3xp^2) + 9xp^2 + 3x^3 = \pm 16$$
(für Fall 20),
$$11(p^3 + 5xp^2) + 9xp^2 + 5x^3 = \pm 40$$
(für Fall 21) sowie
$$15(p^3 + 3xp^2) + 9xp^2 + 3x^3 = \pm 24$$
(für Fall 23).

- Fall 26: $L < 3$. Für $m = 0$ erhält man $\gamma_0 = \mu((1+b)\alpha + 3)$, dies entspricht $x = 3, y = -(1+b)$, was ein Widerspruch zur Annahme $|y| \geq 4$ in diesem Kapitel ist. Für $m = 1$ erhält man $\gamma_1 = \mu((2b-1)\alpha^2 + (6+b)\alpha + 2 - b)$. Man kann nachrechnen, dass diese Zahl assoziiert zu $\gamma_1 = \mu(3\alpha + 2 - b)$ ist, was wiederum einen Widerspruch zu $|y| \geq 4$ ergibt. Für negative m bekommt man
$$x\alpha + x + y = (3\alpha + 2 - b)|\alpha|^{2m}(-1)^m \in i\mathbb{R}$$
und somit
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Reelle Gleichung:
$$23(p^3 + xp^2) + 9xp^2 + x^3 = \pm 8.$$

- Fall 27: $L < 3$. Für $m = 0$ erhält man $\gamma_0 = \mu((2+b)\alpha + 5)$, dies entspricht $x = 5, y = -(2+b)$, was ein Widerspruch zur Annahme $|y| \geq 4$ in diesem Kapitel ist. Für $m = 1$ erhält man $\gamma_1 = \mu((2b-1)\alpha^2 + (6+2b)\alpha + 3 - b)$. Es lässt sich nachrechnen, dass diese Zahl assoziiert zu $\gamma_1 = \mu(5\alpha + 3 - b)$ ist, dies entspricht $x = 3 - b, y = -5$ bzw. Lösung [23.3] in Satz 4.4 (durch Anwendung von Lemma 4.3). Für negative m ergibt sich
$$x\alpha + x + y = (5\alpha + 3 - b)|\alpha|^{2m}(-1)^m \in i\mathbb{R}$$
und daraus
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Reelle Gleichung:
$$23(p^3 + xp^2) + 9xp^2 + x^3 = \pm 8.$$

- Fall 28:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{3\alpha + 2 - b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Reelle Gleichung:
$$31(p^3 + xp^2) + 9xp^2 + x^3 = \pm 8.$$

- Fall 29:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{5\alpha + 4 - 3b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in i\mathbb{R}.$$
Daraus ergibt sich wiederum
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } y = -\frac{x}{2} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{c}.$$
Reelle Gleichung:
$$31(p^3 + xp^2) + 9xp^2 + x^3 = \pm 8.$$

"Quadratische" β

Alle weiteren Fälle sind von der Form $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$ und werden daher gesondert betrachtet. Setzt man diesen Ausdruck in (4.2) ein und verwendet

$$\frac{\beta}{\beta^{(2)}} = \frac{u + v\alpha + w\alpha^2}{u + v\alpha^{(2)} + w\alpha^{(2)^2}} = \alpha^2 \frac{u + v\alpha + w\alpha^2}{w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2},$$

so ergibt sich

$$\Lambda_3 = \log\left|\frac{u + v\alpha + w\alpha^2}{w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2}\right| + (2b_1 + b_2 + 1)\log|\alpha| + (b_2 - b_1)\log|\alpha + 1|.$$

Hier müssen nun zwei verschiedene Möglichkeiten unterschieden werden:

1. $|u + v\alpha + w\alpha^2| = |w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2|$,
2. $|u + v\alpha + w\alpha^2| \neq |w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2|$.

Zuerst wird die 1. Möglichkeit betrachtet, die 2. Möglichkeit wird dann für jeden Fall, wo sie auftritt, extra untersucht. Im 1. Fall bekommt man mit $|\alpha| = |\alpha + 1|$ für $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\Lambda_3 = (b_1 + 2b_2 + 1)\log|\alpha|.$$

Ist $\Lambda_3 = 0$, so folgt daraus $b_1 = -2b_2 - 1$. Setzt man $b_2 = -m$, so ergibt sich, dass für $\Lambda_3 = 0$

$$\gamma = \gamma_m = \mu\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}\right)^m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

bzw. mit $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$ und $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - (t-1)\alpha - (t+2)$

$$\gamma_m = \mu(v-(t+2)u+((1-t)u+w)\alpha+u\alpha^2)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m = x_1(m)+x_2(m)\alpha+x_3(m)\alpha^2 \quad (m \in \mathbb{Z}), \tag{4.32}$$

gelten muss, woraus sich

$$\gamma_{m+1} = (-\alpha^2 + (t+1)\alpha + 1)(x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2)$$

ergibt. Man erhält somit die gleiche Rekursion wie im linearen Fall, die Startwerte sind jedoch anders. Es ergeben sich die Rekursionen

$$p_m + 3p_{m-1} + Lp_{m-2} + p_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.33}$$

mit $p_0 = u, p_1 = u - v + 2w, p_2 = -(t+2)u + (t+4)v - 7w$ sowie für $q_m = p_{-m}$

$$q_m + Lq_{m-1} + 3q_{m-2} + q_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.34}$$

mit $q_0 = u, q_1 = (t-L-1)u-(t+1)v+w, q_2 = (L^2+L-Lt-4)u+(L+Lt+1)v-(L+2)w$. Auch hier wird zur Bestimmung der Lösungsmenge von (1.1) KASH3 verwendet, und die relativen Thue-Gleichungen müssen in entsprechende reelle Gleichungen umgewandelt werden. Aus (4.32) erhält man:

$$\begin{aligned} x - \alpha^{(3)}y &= (v - (t+2)u + ((1-t)u + w)\alpha^{(3)} + u{\alpha^{(3)}}^2)\left(\frac{{\alpha^{(3)}}^2}{\alpha^{(3)}+1}\right)^m \\ &= \left(v - (t+2)u - ((1-t)u + w)\frac{1}{\alpha+1} + u\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m \\ &= \left(v - (t+2)u - ((1-t)u + w)\frac{1}{\alpha+1} + \frac{(2+t\alpha-\alpha^2)u}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m, \end{aligned} \tag{4.35}$$

da $\frac{1}{\alpha+1} = 2 + t\alpha - \alpha^2$ gilt, und daraus

$$x(\alpha+1)+y = (v-u-w+(v-2u)\alpha-u\alpha^2)\frac{1}{(\alpha(\alpha+1))^m} = \frac{v-u-w+(v-2u)\alpha-u\alpha^2}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m, \tag{4.36}$$

da für $\Re\alpha = -\frac{1}{2}\ \alpha(\alpha+1) = -|\alpha|^2$ gilt. Man betrachtet nun die einzelnen Fälle.
In den Fällen, wo $L > 3$ gilt, kann man wiederum mit $Q_m = (-1)^m q_m > 0$ für $m \geq 1$ zeigen, dass die negativen m keine Lösung der Thue-Gleichung liefern können. Es müssen daher nur alle positiven m untersucht werden. Es treten hier jedoch Fälle auf, wo $q_m \in \mathbb{Z}_k$ ist. In diesen Fällen lässt sich jedoch q_m so schreiben, dass $q_m = z \cdot \tilde{q}_m$ mit $z \in \mathbb{Z}_k$ und $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$ gilt und durch geeignete Wahl von $\tilde{Q}_m$ mit $\tilde{Q}_m = (-1)^m\tilde{q}_m$ oder $\tilde{Q}_m = (-1)^{m+1}\tilde{q}_m$ erhält man dann $\tilde{Q}_m > 0$ für $m \geq 1$, sodass die negativen m keinen Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung liefern.
Für die Fälle, wo $L < 3$ gilt, ergibt sich mit $P_m = (-1)^{m+1}p_m > 0$ für $m \geq 2$, dass alle $m \geq 2$ keinen Beitrag zur Lösungsmenge liefern können. In diesen Fällen müssen also $m = 0, 1$ und alle negativen m untersucht werden. Für $m = 0$ ergibt sich immer ein γ mit quadratischem Anteil α^2, das sich nicht auf die Form $\gamma = x - \alpha y$ bringen lässt und somit keine Lösung der Thue-Gleichung (1.1) liefern kann.
In all diesen Fällen transformiert man die Thue-Gleichung (1.1) auf eine reelle Gleichung, indem man (4.36) verwendet.

- Fall 8, 13: Man verwendet hier $(\alpha+1-b)^2 = \alpha^2+(2-2b)\alpha-b$, um die obigen Überlegungen anwenden zu können.
  $L>3$, $q_m \in \mathbb{Z}_k$, $q_m = b\tilde{q}_m$ mit $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{Q}_m = (-1)^{m+1}\tilde{q}_m > 0$ für $m \geq 1$. Man bekommt
  $$x\alpha + x + y = b\frac{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m,$$
  sodass
  $$\frac{1}{b}(x\alpha+x+y) = \frac{\alpha^2+(2-2b)\alpha-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
  Es gilt also wegen $\frac{1}{b} = 1-b$
  $$\begin{aligned}0 &= 2\Im((1-b)x\alpha+(1-b)(x+y)) = (1-b)x\alpha+(1-b)(x+y)-\overline{(1-b)}\bar{x}\bar{\alpha}-\overline{(1-b)}(\bar{x}+\bar{y})\\ &= ((1-b)x+\overline{(1-b)}\bar{x})\alpha+((1-b)(x+y)-\overline{(1-b)}\bar{y})\cdot 1.\end{aligned}$$
  Daraus folgt $(1-b)x+\overline{(1-b)}\bar{x}=0$ und $(1-b)(x+y)-\overline{(1-b)}\bar{y}=0$. Man kann also zeigen, dass $(1-b)x \in i\mathbb{R}$ und $\Im((1-b)y) = i\frac{(1-b)x}{2}$ gilt, sodass sich
  $$y = \frac{p}{2(1-b)} - \frac{x}{2}$$
  ergibt. Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{3}}{3}$ sowie $\tilde{p} := \frac{p}{1-b}$, so gilt $\tilde{x}, \tilde{p} \in \mathbb{Z}$, und es ergibt sich
  $$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x}^2 - \tilde{p}^3 = \pm 24$$
  (für Fall 8) sowie
  $$63\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 21\tilde{p}^2\tilde{x}^2 - \tilde{p}^3 = \pm 96$$
  (für Fall 13).

- Fall 10:
  $$L>3, \quad x\alpha+x+y = \frac{-\alpha^2+(4b-3)\alpha-1+2b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
  Man erhält
  $$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2}-\frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$
  Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{3}}{3}$, so ist $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
  Reelle Gleichung:
  $$45\tilde{x}^3 - 27p\tilde{x}^2 + 15p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 32.$$

- Fall 11: $L>3$, $q_m \in \mathbb{Z}_k$, $q_m = (b-1)\tilde{q}_m$ mit $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{Q}_m = (-1)^{m+1}\tilde{q}_m > 0$ für $m \geq 1$.
  $$x\alpha+x+y = (b-1)\frac{3\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m,$$
  sodass
  $$\frac{1}{b-1}(x\alpha+x+y) = \frac{3\alpha^2+(4-2b)\alpha-b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
  Es gilt also
  $$\frac{1}{1-b}x = bx \in i\mathbb{R}, \quad \Im(by) = i\frac{bx}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2b}-\frac{x}{2}.$$

Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{3}}{3}$ sowie $\tilde{p} := \frac{p}{b}$, so gilt $\tilde{x}, \tilde{p} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x}^2 - \tilde{p}^3 = \pm 40.$$

- Fall 19: Hier verwendet man $(b\alpha + 1)^2 = (b-2)\alpha^2 + 2b\alpha + 1$.

$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{-\alpha^2 - (2-2b)\alpha + 1 + b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{7}}{7}$ und bekommt damit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$147\tilde{x}^3 - 63p\tilde{x}^2 + 21p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 56.$$

- Fall 22, 24, 35, 37: In den Fällen 22 und 24 ist $L < 3$. Für $m = 1$ erhält man in beiden Fällen ein γ, das zu $\alpha^2 + \alpha + 1$ assoziiert ist. Es ergibt sich also kein γ von der Form $\gamma = x - \alpha y$ und somit kein Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung (1.1). Für negative m bekommt man

$$x\alpha + x + y = -(\alpha^2 + \alpha + 1)|\alpha|^{2m}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{D}}{D}$ und bekommt damit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichungen:

$$225\tilde{x}^3 - 135p\tilde{x}^2 + 15p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 24$$

(für Fall 22) bzw.

$$361\tilde{x}^3 - 171p\tilde{x}^2 + 19p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 16$$

(für Fall 24).

Für die anderen Fälle gilt

$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{-(\alpha^2 + \alpha + 1)}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Es gilt analog zu oben

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{D}}{D}$ und bekommt damit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ sowie

$$1225\tilde{x}^3 - 315p\tilde{x}^2 + 35p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 16$$

(für Fall 35) bzw.

$$D^2\tilde{x}^3 - 9Dp\tilde{x}^2 + Dp^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 8(t^2 + t + 7)$$

mit $D = 39, 43, 47, 51, 55$ (für Fall 37).

- Fall 25, 36: Hier benützt man $(\alpha^2+\alpha+1)^2 = (t^2+t+4)\alpha^2 + (t^2+3t+5)\alpha + t + 2$, um die obigen Überlegungen anwenden zu können.
  In diesen beiden Fällen gilt $p_m \in \mathbb{Z}_k$ bzw. $q_m \in \mathbb{Z}_k$, es ist hier jedoch nicht möglich, p_m bzw. q_m in der Form $p_m = z \cdot \tilde{p}_m$ bzw. $q_m = z \cdot \tilde{q}_m$ zu wählen, sodass $z \in \mathbb{Z}_k$ und $\tilde{p}_m \in \mathbb{Z}$ bzw. $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$ gilt. Man muss hier etwas anders vorgehen:
  Im Fall 25 ist $L < 3$ und $p_m \in \mathbb{Z}_k$. Man setzt $p_m = r_m + i\sqrt{19}s_m$ und bekommt dann die beiden Rekursionen

$$r_m + 3r_{m-1} + Lr_{m-2} + r_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.37}$$

$$s_m + 3s_{m-1} + Ls_{m-2} + s_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.38}$$

  mit den Startwerten $r_0 = \frac{3}{2}, r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{7}{2}$ bzw. $s_0 = \frac{1}{2}, s_1 = -\frac{1}{2}, s_2 = \frac{3}{2}$ und kann dann analog zu oben zeigen, dass $R_m = (-1)^{m+1}r_m > 0$ und $S_m = (-1)^m s_m > 0$ für $m \geq 2$ gilt, sodass alle positiven $m \geq 2$ keinen Beitrag zur Lösungsmenge liefern. Für $m = 1$ bekommt man ein γ, das zu $(\alpha^2+\alpha+1)^2$ assoziiert ist und darum keinen Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung (1.1) liefert. Für die negativen m gilt

$$x\alpha + x + y = -((t^2+t+4)\alpha^2 + (t^2+3t+5)\alpha + t + 2)|\alpha|^{2m}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

  Dann gilt

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

  Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{19}}{19}$ und erhält somit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
  Reelle Gleichung:

$$361\tilde{x}^3 - 171p\tilde{x}^2 + 19p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 32.$$

  Für Fall 36 gilt $L > 3$ und $q_m \in \mathbb{Z}_k$. Man setzt $q_m = x_m + i\sqrt{35}y_m$ und bekommt dann die beiden Rekursionen

$$x_m + Lx_{m-1} + 3x_{m-2} + x_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.39}$$

$$y_m + Ly_{m-1} + 3y_{m-2} + y_{m-3} = 0, m \geq 3 \tag{4.40}$$

  mit den Startwerten $x_0 = \frac{3}{2}, x_1 = -\frac{7}{2}, x_2 = \frac{33}{2}$ bzw. $y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{3}{2}$ und kann dann analog zu oben zeigen, dass $X_m = (-1)^m x_m > 0$ und $Y_m = (-1)^m y_m > 0$ für $m \geq 1$ gilt, sodass alle negativen m keinen Beitrag zur Lösungsmenge liefern.
  Für positive m ergibt sich

$$x\alpha + x + y = \frac{-((t^2+t+4)\alpha^2 + (t^2+3t+5)\alpha + t + 2)}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

  Es gilt analog zu oben

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

  Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{35}}{35}$ und bekommt damit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ sowie

$$1225\tilde{x}^3 - 315p\tilde{x}^2 + 35p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 32.$$

- Fall 30:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{-(\alpha^2 + \alpha + 2)}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
Man kann analog zum vorhergehenden Fall zeigen, dass
$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$
gilt. Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{31}}{31}$, so ist $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:
$$961\tilde{x}^3 - 279p\tilde{x}^2 + 31p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 24.$$

- Fall 31, 34:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{-(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
Somit gilt
$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$
Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{D}}{D}$, so ist $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichungen:
$$961\tilde{x}^3 - 279p\tilde{x}^2 + 31p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 24$$
(für Fall 31) sowie
$$1225\tilde{x}^3 - 315p\tilde{x}^2 + 35p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 40$$
(für Fall 34).

- Fall 33:
$$L > 3, \quad x\alpha + x + y = \frac{-(\alpha^2 + \alpha + 4)}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$
Hier gilt
$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$
Man setzt nun $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{35}}{35}$, damit $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ gilt.
Reelle Gleichung:
$$1225\tilde{x}^3 - 315p\tilde{x}^2 + 35p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 40.$$

Nun betrachtet man noch jene Einzelfälle, in denen
$$|u + v\alpha + w\alpha^2| \neq |w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2|,$$
d.h.
$$\log\left|\frac{u + v\alpha + w\alpha^2}{w + (2w - v)\alpha + (w - v + u)\alpha^2}\right| \neq 0$$
gilt.

- Fall 9: In diesem Fall gilt $\log\left|\frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2}\right| = -2\log|\alpha|$, sodass sich

$$\Lambda_3 = -2\log|\alpha| + (2b_1+b_2+1)\log|\alpha| + (b_2-b_1)\log|\alpha+1| = (b_1+2b_2-1)\log|\alpha|$$

ergibt. Ist $\Lambda_3 = 0$, so folgt daraus $b_1 = -2b_2+1$. Setzt man $b_2 = -m$, so ergibt sich, dass für $\Lambda_3 = 0$

$$\gamma = \gamma_m = \mu\beta\alpha\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

bzw. mit $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$

$$\gamma_m = \mu(w+(u+(t+2)w)\alpha+(v+(t-1)w)\alpha^2)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m = x_1(m)+x_2(m)\alpha+x_3(m)\alpha^2 \tag{4.41}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ gelten muss. Man erhält also wieder die bereits bekannten Rekursionen für p_m und q_m, jedoch mit anderen Startwerten. Auch hier wird zur Bestimmung der Lösungsmenge von (1.1) KASH3 verwendet, und die Thue-Gleichung muss in eine entsprechende reelle Gleichung transformiert werden. Aus (4.41) erhält man:

$$\begin{aligned} x-\alpha^{(3)}y &= (w+(u+(t+2)w)\alpha^{(3)}+(v+(t-1)w){\alpha^{(3)}}^2)\left(\frac{{\alpha^{(3)}}^2}{\alpha^{(3)}+1}\right)^m \\ &= \left(w-(u+(t+2)w)\frac{1}{\alpha+1}+(v+(t-1)w)\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m \\ &= \left(w-(u+(t+2)w)\frac{1}{\alpha+1}+\frac{(2+t\alpha-\alpha^2)(v+(t-1)w)}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m, \end{aligned} \tag{4.42}$$

da $\frac{1}{\alpha+1} = 2+t\alpha-\alpha^2$ gilt, und deshalb

$$\begin{aligned} x(\alpha+1)+y &= (2v-u+(t-3)w+(tv+(t^2-t+1)w)\alpha-(v+(t-1)w)\alpha^2)\frac{1}{(\alpha(\alpha+1))^m} \\ &= \frac{2v-u+(t-3)w+(tv+(t^2-t+1)w)\alpha-(v+(t-1)w)\alpha^2}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m, \end{aligned} \tag{4.43}$$

da für $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$ $\alpha(\alpha+1) = -|\alpha|^2$ gilt. Es gilt $L > 3$, $q_m \in \mathbb{Z}_k$, $q_m = (1-b)\tilde{q}_m$ mit $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{Q}_m = (-1)^{m+1}\tilde{q}_m > 0$ für $m \geq 1$, sowie

$$x\alpha + x + y = (1-b)\frac{\alpha^2 + \frac{t^2+2t-4bt+1}{4b-t-2}\alpha + \frac{t-6b+2}{4b-t-2}}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$

bzw.

$$\frac{1}{1-b}(x\alpha+x+y) = \frac{\alpha^2 + \frac{t^2+2t-4bt+1}{4b-t-2}\alpha + \frac{t-6b+2}{4b-t-2}}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Man kann nun analog zu oben zeigen, dass

$$\frac{1}{1-b}x = -bx \in i\mathbb{R}, \quad \Im(by) = i\frac{bx}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2b} - \frac{x}{2}$$

folgt. Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{3}}{3}$ sowie $\tilde{p} := \frac{p}{b}$, so gilt $\tilde{x}, \tilde{p} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x}^2 - \tilde{p}^3 = \pm 32.$$

- Fall 12: Hier gilt analog zu Fall 9 $\log \left| \frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2} \right| = -2\log|\alpha|$ sowie $L > 3$ und $q_m \in \mathbb{Z}_k$. Um eine reelle Gleichung zu bekommen, verwendet man (4.43), und es ergibt sich $L > 3$, $q_m \in \mathbb{Z}_k$, $q_m = b\tilde{q}_m$ mit $\tilde{q}_m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{Q}_m = (-1)^{m+1}\tilde{q}_m > 0$ für $m \geq 1$ und

$$x\alpha + x + y = b\frac{\alpha^2 + \frac{t^2+3t-6bt+1}{6b-t-3}\alpha + \frac{t-11b+6}{6b-t-3}}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m$$

sowie

$$\frac{1}{b}(x\alpha + x + y) = \frac{\alpha^2 + \frac{t^2+3t-6bt+1}{6b-t-3}\alpha + \frac{t-11b+6}{6b-t-3}}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also

$$\frac{1}{b}x = (1-b)x \in i\mathbb{R}, \quad \Im((1-b)y) = i\frac{(1-b)x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2(1-b)} - \frac{x}{2}.$$

Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{3}}{3}$ sowie $\tilde{p} := \frac{p}{1-b}$, so ist $\tilde{x}, \tilde{p} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x}^2 - \tilde{p}^3 = \pm 64.$$

- Fall 16: Hier gilt $\log \left| \frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2} \right| = -\log|\alpha|$, sodass man

$$\Lambda_3 = -\log|\alpha| + (2b_1 + b_2 + 1)\log|\alpha| + (b_2 - b_1)\log|\alpha+1| = (b_1 + 2b_2)\log|\alpha|$$

bekommt. Ist $\Lambda_3 = 0$, so folgt daraus $b_1 = -2b_2$. Setzt man nun $b_2 = -m$, so erhält man für $\Lambda_3 = 0$

$$\gamma = \gamma_m = \mu\beta\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

bzw. mit $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$

$$\gamma_m = \mu(u + v\alpha + w\alpha^2)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m = x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2 \quad (m \in \mathbb{Z}). \tag{4.44}$$

Man erhält also wiederum die bereits bekannten Rekursionen für p_m und q_m mit anderen Startwerten. Auch hier wird zur Bestimmung der Lösungsmenge von (1.1) KASH3 verwendet, und die Thue-Gleichung wird in eine entsprechende reelle Gleichung transformiert. Aus (4.44) ergibt sich:

$$\begin{aligned} x - \alpha^{(3)}y &= (u + v\alpha^{(3)} + w{\alpha^{(3)}}^2)\left(\frac{{\alpha^{(3)}}^2}{\alpha^{(3)}+1}\right)^m \\ &= \left(u - v\frac{1}{\alpha+1} + w\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m \\ &= \left(u - v\frac{1}{\alpha+1} + \frac{(2+t\alpha-\alpha^2)w}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)^m, \end{aligned} \tag{4.45}$$

da $\frac{1}{\alpha+1} = 2 + t\alpha - \alpha^2$ gilt, und daraus

$$\begin{aligned} x(\alpha+1) + y &= (u - v + 2w + (u + tw)\alpha - w\alpha^2)\frac{1}{(\alpha(\alpha+1))^m} \\ &= \frac{u - v + 2w + (u + tw)\alpha - w\alpha^2}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m, \end{aligned} \tag{4.46}$$

da für $\Re\alpha = -\frac{1}{2}$ $\alpha(\alpha+1) = -|\alpha|^2$ gilt. Es gilt in diesem Fall $L > 3$. Um alle positiven m zu untersuchen, transformiert man die Thue-Gleichung (1.1) auf eine reelle Gleichung. Dazu verwendet man (4.46) und bekommt so

$$x\alpha + x + y = \frac{-\alpha^2 + (t - b)\alpha + b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Man kann nun analog zu oben zeigen, dass

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

gilt. Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{7}}{7}$, so bekommt man $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$147\tilde{x}^3 - 63p\tilde{x}^2 + 21p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 24.$$

- Fall 17: Hier gilt so wie im Fall 16 $\log\left|\frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2}\right| = -\log|\alpha|$, sodass sich die obigen Formeln auch in diesem Fall verwenden lassen. Es gilt in diesem Fall $L > 3$. Mithilfe (4.46) ergibt sich

$$x\alpha + x + y = \frac{-\alpha^2 + (t - b)\alpha - 1 + b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}$$

und somit

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{7}}{7}$, so gilt $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$147\tilde{x}^3 - 63p\tilde{x}^2 + 21p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 40.$$

- Fall 18: Hier gilt ebenfalls $\log\left|\frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2}\right| = -\log|\alpha|$, sodass die Überlegungen aus Fall 16 gültig bleiben. Ebenso ist $L > 3$. Um eine reelle Gleichung zu bekommen, verwendet man (4.46) und erhält so

$$x\alpha + x + y = \frac{-\alpha^2 + (t - b)\alpha - 2 + b}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Man setzt $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{7}}{7}$, sodass $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ gilt.
Reelle Gleichung:

$$147\tilde{x}^3 - 63p\tilde{x}^2 + 21p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 56.$$

- Fall 32: In diesem Fall gilt $\log\left|\frac{u+v\alpha+w\alpha^2}{w+(2w-v)\alpha+(w-v+u)\alpha^2}\right| = 4\log|\alpha|$, und man bekommt

$$\Lambda_3 = 4\log|\alpha| + (2b_1+b_2+1)\log|\alpha| + (b_2-b_1)\log|\alpha+1| = (b_1+2b_2+5)\log|\alpha|.$$

Für $\Lambda_3 = 0$ folgt daraus $b_1 = -2b_2 - 5$. Setzt man nun $b_2 = -m$, so erhält man für $\Lambda_3 = 0$

$$\gamma = \gamma_m = \mu\frac{\beta}{\alpha^5}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

bzw. mit $\beta = u + v\alpha + w\alpha^2$ und $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - (t-1)\alpha - (t+2)$

$$\begin{aligned}\gamma_m = \mu(&-56u - 77tu - 53t^2u - 23t^3u - 6t^4u - t^5u + 25v + 28tv + 16t^2v + 5t^3v + t^4v \\ &- 11w - 10tw - 4t^2w - t^3w + (14u - 7tu - 16t^2u - 12t^3u - 4t^4u - t^5u - 6v + 4tv \\ &+ 7t^2v + 3t^3v + t^4v + 3w - 3tw - 2t^2w - t^3w)\alpha + (25u + 28tu + 16t^2u + 5t^3u + t^4u \\ &- 11v - 10tv - 4t^2v - t^3v + 5w + 3tw + t^2w)\alpha^2)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right)^m \\ &= x_1(m) + x_2(m)\alpha + x_3(m)\alpha^2 \quad (m \in \mathbb{Z}).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Man erhält also die bereits bekannten Rekursionen für p_m und q_m mit anderen Startwerten. Zur Bestimmung der Lösungsmenge von (1.1) wird wieder KASH3 verwendet, was eine Transformation der Thue-Gleichung auf eine entsprechende reelle Gleichung notwendig macht. Aus (4.47) ergibt sich:

$$\begin{aligned}x - \alpha^{(3)}y = (&-56u - 77tu - 53t^2u - 23t^3u - 6t^4u - t^5u + 25v + 28tv + 16t^2v + 5t^3v \\ &+ t^4v - 11w - 10tw - 4t^2w - t^3w + (14u - 7tu - 16t^2u - 12t^3u - 4t^4u \\ &- t^5u - 6v + 4tv + 7t^2v + 3t^3v + t^4v + 3w - 3tw - 2t^2w - t^3w)\alpha^{(3)} \\ &+ (25u + 28tu + 16t^2u + 5t^3u + t^4u - 11v - 10tv - 4t^2v - t^3v + 5w \\ &+ 3tw + t^2w){\alpha^{(3)}}^2)\left(\frac{{\alpha^{(3)}}^2}{\alpha^{(3)}+1}\right)^m.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Geht man analog wie bei allen anderen Fällen vor, so erhält man

$$\begin{aligned}x(\alpha+1) + y = &\frac{-20u - 14tu - 5t^2u - t^3u + 9v + 4tv + t^2v - 4w - tw}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \\ &+ \frac{(-56u - 52tu - 25t^2u - 7t^3u - t^4u + 25v + 17tv + 6t^2v + t^3v)\alpha}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \\ &+ \frac{(-11w - 5tw - t^2w)\alpha}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \\ &+ \frac{(-25u - 28tu - 16t^2u - 5t^3u - t^4u + 11v + 10tv + 4t^2v + t^3v)\alpha^2}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m \\ &+ \frac{(-5w - 3tw - t^2w)\alpha^2}{|\alpha|^{2m}}(-1)^m.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Es gilt in diesem Fall $L > 3$. Um eine reelle Gleichung zu bekommen, verwendet man (4.49) und bekommt so, dass $x\alpha + x + y \in \mathbb{R}$ gilt. Man kann nun analog zu oben zeigen, dass

$$x \in i\mathbb{R}, \quad \Im y = i\frac{x}{2} \text{ bzw. } y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

gilt. Setzt man $\tilde{x} := -\frac{xi\sqrt{31}}{31}$, so bekommt man $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
Reelle Gleichung:

$$961\tilde{x}^3 - 279p\tilde{x}^2 + 31p^2\tilde{x}^2 - p^3 = \pm 24.$$

Man erhält somit die folgende Liste für alle $\beta = \beta^{(j+1)}$, die $\Lambda_j = 0$ ergeben.

für alle D			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}$ mit $c^2 D < 11663$	$\alpha + 2$	$2t + 1$	$D(p^3 + xp^2c) + 9x^2p + x^3c = \pm 8c \ \langle 1 \rangle$

$D = 3$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$ mit $c \leq 93$	$\alpha + 1 - b$	$-\frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}^2p + \tilde{x}^3c = \pm 4(c-3)$ mit $\tilde{x} = bx \ \langle 2 \rangle$
$t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$ mit $c \leq 99$	$\alpha + b$	$-\frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}^2p + \tilde{x}^3c = \pm 4(c+3)$ mit $\tilde{x} = (1-b)x \ \langle 3 \rangle$
$t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$ mit $c \leq 123$	$\alpha + 1 + b$	$(2t+1)\frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}$	$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}^2p + \tilde{x}^3c = \pm 12(3c+7)$ mit $\tilde{x} = (2-b)x \ \langle 4 \rangle$
$t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$ mit $c \leq 123$	$\alpha + 2 - b$	$(2t+1)\frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}$	$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}^2p + \tilde{x}^3c = \pm 12(3c-7)$ mit $\tilde{x} = (1+b)x \ \langle 5 \rangle$
$-\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$	$(1-3b)\alpha - 1$	$-4i\sqrt{3}$	$3(p^3 + 5xp^2) + 9x^2p + 5x^3 = \pm 32 \ \langle 7 \rangle$
	$(\alpha + 1 - b)^2$	-3	$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x} - \tilde{p}^3 = \pm 24$ mit $\tilde{p} = \frac{p}{1-b}, \tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 8 \rangle$
	$\alpha^2 + (3-4b)\alpha + {}$ $+1 - 2b$	-4	$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x} - \tilde{p}^3 = \pm 32$ mit $\tilde{p} = \frac{p}{b}, \tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 9 \rangle$
	$(2b-1)\alpha^2 + {}$ $+(4b-1)\alpha + 1$	-4	$45\tilde{x}^3 - 27p\tilde{x}^2 + 15p^2\tilde{x} - p^3 = \pm 32$ mit $\tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 10 \rangle$
	$b\alpha^2 + (4-2b)\alpha + {}$ $+3 - 3b$	5	$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x} - \tilde{p}^3 = \pm 40$ mit $\tilde{p} = \frac{p}{b}, \tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 11 \rangle$
	$\alpha^2 + (4-6b)\alpha - {}$ $-1 - b$	8	$45\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 15\tilde{p}^2\tilde{x} - \tilde{p}^3 = \pm 64$ mit $\tilde{p} = \frac{p}{1-b}, \tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 12 \rangle$
$-\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$	$(\alpha + 1 - b)^2$	-12	$63\tilde{x}^3 - 27\tilde{p}\tilde{x}^2 + 21\tilde{p}^2\tilde{x} - \tilde{p}^3 = \pm 96$ mit $\tilde{p} = \frac{p}{1-b}, \tilde{x} = -\frac{xi\sqrt{3}}{3} \ \langle 13 \rangle$

$D=7$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{7}}{2}$ mit $c \le 57$	$b\alpha+1$	$2t+1-$ $-2i\sqrt{7}$	$7(p^3+xp^2c)+9x^2p+x^3c=$ $=\pm 8(c-2)$ $\langle 6\rangle$
$-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$	$2\alpha+1-b$	$-\frac{7}{2}-\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$7(p^3+3\tilde{x}p^2)+9\tilde{x}^2p+3\tilde{x}^3=\pm 2$ mit $\tilde{x}=\frac{b}{2}x$ $\langle 14\rangle$
	$(2-b)\alpha-b$	$-\frac{7}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$7(p^3+3\tilde{x}p^2)+9\tilde{x}^2p+3\tilde{x}^3=\pm 2$ mit $\tilde{x}=\frac{1-b}{2}x$ $\langle 15\rangle$
	$\alpha^2+(2-2b)\alpha-b$	-3	$147\tilde{x}^3-63p\tilde{x}^2+21p^2\tilde{x}-p^3=\pm 24$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{7}}{7}$ $\langle 16\rangle$
	$\alpha^2+(3-2b)\alpha-b$	-5	$147\tilde{x}^3-63p\tilde{x}^2+21p^2\tilde{x}-p^3=\pm 40$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{7}}{7}$ $\langle 17\rangle$
	$\alpha^2+(4-2b)\alpha-b$	-7	$147\tilde{x}^3-63p\tilde{x}^2+21p^2\tilde{x}-p^3=\pm 56$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{7}}{7}$ $\langle 18\rangle$
	$(b\alpha+1)^2$	-7	$147\tilde{x}^3-63p\tilde{x}^2+21p^2\tilde{x}-p^3=\pm 56$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{7}}{7}$ $\langle 19\rangle$

$D=11$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$	$b\alpha+1$	$2i\sqrt{11}$	$11(p^3+3xp^2)+9x^2p+3x^3=\pm 16$ $\langle 20\rangle$
$-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{11}}{2}$	$b\alpha+1$	$5i\sqrt{11}$	$11(p^3+5xp^2)+9x^2p+5x^3=\pm 40$ $\langle 21\rangle$

$D=15$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$	$\alpha^2+\alpha+1$	3	$225\tilde{x}^3-135p\tilde{x}^2+15p^2\tilde{x}-p^3=\pm 24$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{15}}{15}$ $\langle 22\rangle$
$-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{15}}{2}$	$b\alpha+1$	$3i\sqrt{15}$	$15(p^3+5xp^2)+9x^2p+3x^3=\pm 24$ $\langle 23\rangle$

$D=19$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$	$\alpha^2+\alpha+1$	2	$361^2\tilde{x}^3-171p\tilde{x}^2+19p^2\tilde{x}-p^3=\pm 16$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{19}}{19}$ $\langle 24\rangle$
	$(\alpha^2+\alpha+1)^2$	4	$361^2\tilde{x}^3-171p\tilde{x}^2+19p^2\tilde{x}-p^3=\pm 32$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{19}}{19}$ $\langle 25\rangle$

$D=23$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}$	$(1+b)\alpha+3$	$-i\sqrt{23}$	$23(p^3+xp^2)+9x^2p+x^3=\pm 8$ $\langle 26\rangle$
	$(2+b)\alpha+5$	$-i\sqrt{23}$	$23(p^3+xp^2)+9x^2p+x^3=\pm 8$ $\langle 27\rangle$

$D = 31$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{31}}{2}$	$(1+b)\alpha+3$	$i\sqrt{31}$	$31(p^3+xp^2)+9x^2p+x^3=\pm 8$ ⟨28⟩
	$(1+3b)\alpha+5$	$i\sqrt{31}$	$31(p^3+xp^2)+9x^2p+x^3=\pm 8$ ⟨29⟩
	$2\alpha^2+\alpha+1$	-3	$961\tilde{x}^3-279p\tilde{x}^2+31p^2\tilde{x}-p^3=\pm 24$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{31}}{31}$ ⟨30⟩
	$\alpha^2+2\alpha+2$	-3	$961\tilde{x}^3-279p\tilde{x}^2+31p^2\tilde{x}-p^3=\pm 24$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{31}}{31}$ ⟨31⟩
	$\alpha^2+b\alpha+1+b$	-3	$961\tilde{x}^3-279p\tilde{x}^2+31p^2\tilde{x}-p^3=\pm 24$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{31}}{31}$ ⟨32⟩

$D = 35$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{35}}{2}$	$4\alpha^2+\alpha+1$	-5	$1225\tilde{x}^3-315p\tilde{x}^2+35p^2\tilde{x}-p^3=\pm 40$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{35}}{35}$ ⟨33⟩
	$\alpha^2+2\alpha+2$	-5	$1225\tilde{x}^3-315p\tilde{x}^2+35p^2\tilde{x}-p^3=\pm 40$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{35}}{35}$ ⟨34⟩
	$\alpha^2+\alpha+1$	-2	$1225\tilde{x}^3-315p\tilde{x}^2+35p^2\tilde{x}-p^3=\pm 16$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{35}}{35}$ ⟨35⟩
	$(\alpha^2+\alpha+1)^2$	4	$1225\tilde{x}^3-315p\tilde{x}^2+35p^2\tilde{x}-p^3=\pm 32$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{35}}{35}$ ⟨36⟩

$D = 39, 43, 47, 51, 55$			
t	β	$N_{k(\alpha)/k}(\beta)$	Zugehörige Gleichung
$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{D}}{2}$	$\alpha^2+\alpha+1$	t^2+t+7	$D^2\tilde{x}^3-9Dp\tilde{x}^2+Dp^2\tilde{x}-p^3=\pm 8(t^2+t+7)$ mit $\tilde{x}=-\frac{xi\sqrt{D}}{D}$ ⟨37⟩

Gibt man diese Gleichungen in KASH3 ein, so ergeben sich die folgenden Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) in Satz 4.4 (Beschreibung des Programmes siehe Anhang A.4.2).

Gleichung ⟨1⟩: [D.1], [D.2], [D.3], [11.1], [15.1], [15.2], [19.1], [23.1], [23.2], [23.3], [31.1], [31.2], [51.1]
Gleichung ⟨2⟩: [3.3], [3.5], [3.16]
Gleichung ⟨3⟩: [3.4], [3.10], [3.17]
Gleichung ⟨4⟩: [3.1], [3.18]
Gleichung ⟨5⟩: [3.2], [3.9], [3.19]
Gleichung ⟨6⟩: [7.1], [7.2]
Gleichung ⟨7⟩: [3.4], [3.10]
Gleichung ⟨9⟩: [3.2], [3.9]
Gleichung ⟨10⟩: [3.2], [3.9]
Gleichung ⟨12⟩: [3.15]
Gleichung ⟨20⟩: [11.2]
Gleichung ⟨21⟩: [D.1], [D.2], [11.1]

Gleichung $\langle 23 \rangle$: [D.1]
Gleichung $\langle 26 \rangle$: [D.1], [D.2], [23.1], [23.2], [23.3]
Gleichung $\langle 27 \rangle$: [D.1], [D.2], [23.1], [23.2], [23.3]
Gleichung $\langle 28 \rangle$: [D.1], [D.2], [31.1], [31.2]
Gleichung $\langle 29 \rangle$: [D.1], [D.2], [31.1], [31.2]
Gleichung $\langle 37 \rangle$: [43.1]

Die restlichen Gleichungen liefern keine Lösungen der Thue-Gleichung.

4.3 Der Fall $\Lambda_j \neq 0$

Nun werden jene Werte $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$, die nicht den Eigenschaften (3.11) genügen und für die $\Lambda_j \neq 0$ gilt, auf ihren Beitrag zur Lösungsmenge der Thue-Gleichung (1.1) untersucht.

4.3.1 Behandlung der kleinen y

Man betrachtet nun alle betragsmäßig kleinen $y \in \mathbb{Z}_k$.
Sei zuerst $|t| \geq 6$ und $|y| < 4$. Unter Verwendung von (3.7) erhält man aus (3.6)

$$\left| x - \lfloor \alpha^{(j)} \rfloor y \right| \leq \frac{2.9482}{|y|} + |\{\alpha^{(j)}\}||y|.$$

Mithilfe der Entwicklung (2.3) ergibt sich für die Bruchteile von $\alpha^{(j)}$ für $|t| \geq 6$

$$|\{\alpha\}| \leq 0.383694, \quad |\{\alpha^{(2)}\}| \leq 0.178761, \quad |\{\alpha^{(3)}\}| \leq 0.202854.$$

Daraus erhält man die folgenden Abschätzungen für $\left| x - \lfloor \alpha^{(j)} \rfloor y \right|$:

$$\begin{aligned} \left| x - \lfloor \alpha \rfloor y \right| &\leq \frac{2.9482}{|y|} + 0.383694|y|, \\ \left| x - \lfloor \alpha^{(2)} \rfloor y \right| &\leq \frac{2.9482}{|y|} + 0.178761|y|, \\ \left| x - \lfloor \alpha^{(3)} \rfloor y \right| &\leq \frac{2.9482}{|y|} + 0.202854|y|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Korollar 3.5 erhält man für $|t| \geq 6 : |y| \geq 2.01456 \geq 2$, und so ergibt sich mithilfe der obigen Ungleichungen für $2 \leq |y| < 4$:

$$|x - \lfloor \alpha \rfloor y| \leq 3.00888, \quad \left| x - \lfloor \alpha^{(2)} \rfloor y \right| \leq 2.18914, \quad \left| x - \lfloor \alpha^{(3)} \rfloor y \right| \leq 2.28552.$$

Nun werden alle x und y, welche die obigen Ungleichungen erfüllen, berechnet und in die Thue-Gleichung (1.1) eingesetzt. Die rechte Seite ℓ der Thue-Gleichung nimmt dabei alle Werte aus der Spalte $N_{k(\alpha)/k}(\gamma)$ in Korollar 2.18 an, da dies die einzigen Fälle sind, wo die Ungleichung $|F_t(x, y)| = |\ell| = |N_{k(\alpha)/k}(x - \alpha y)| \leq |2t + 1|$ gilt. Die Gleichung (1.1) wird für alle möglichen Werte x, y und ℓ nach t gelöst und anschließend wird überprüft, ob die Bedingungen $t \in \mathbb{Z}_k$ und $\Re t = -\frac{1}{2}$ erfüllt sind. Diese Überprüfung erfolgt mittels `Mathematica`® (siehe Anhang A.4.3). Ein solches Vorgehen liefert die folgenden Lösungspaare (x, y) von

$F_t(x,y) = \ell$ mit $|y| < 4$ und $|t| \geq 6$:

$\underline{D \equiv 3 \pmod 4}$: $[D.1]$ $(x,y) = (-1,-1)$ für $\ell = 2t+1$ für alle t.

<u>D=3:</u> Zusätzlich zu $[D.1]$ ergeben sich die Lösungen:
[3.1] $(x,y) = (1+b,-1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) - \frac{7}{2}$ für alle $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{ki\sqrt{3}}{2}, k \in \{1,5,7,9,11,13,15\}$,
[3.2] $(x,y) = (-b,-1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) + \frac{7}{2}$ für alle $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
[3.3] $(x,y) = (-(1-b),1)$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für alle $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
[3.4] $(x,y) = (-b,1)$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für alle $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
[3.6] $(x,y) = (b,2-b)$ für $\ell = 5 - 6i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$,
[3.7] $(x,y) = (-(1-b),2)$ für $\ell = 5 + 6i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$.

<u>D=7:</u> Zusätzlich zu $[D.1]$ erhält man die Lösungen:
[7.1] $(x,y) = (1,-b)$ für $\ell = 2t+1-2i\sqrt{7}$ für alle $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$,
[7.3] $(x,y) = (1,-(1+b))$ für $\ell = 11 + 2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}$,
[7.4] $(x,y) = (-1,-(1-b))$ für $\ell = 11 - 2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}$.

<u>D=11:</u> Zusätzlich zu $[D.1]$ bekommt man die Lösung:
[11.1] $(x,y) = (1,-b)$ für $\ell = 2t+1$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{11}}{2}$.

Sei nun $|t| < 6$ und $|y| < 7$. Mithilfe (3.4) erhält man

$$|x| - |\alpha^{(j)}||y| \leq |x - \alpha^{(j)}y| \leq \left(\frac{(3\sqrt{3})^2|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2}\right)^{1/6} \frac{1}{|y|}$$

und daraus

$$|x| \leq \left(\frac{(3\sqrt{3})^2|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2}\right)^{1/6} \frac{1}{|y|} + \max_{j \in \{1,2,3\}} |\alpha^{(j)}||y|.$$

Für jedes t mit $|t| < 6$ werden die Nullstellen $\alpha^{(j)}$, $j \in \{1,2,3\}$ berechnet. Um eine obere Schranke für x zu berechnen, setzt man dann diese Werte für jedes einzelne t in die obige Ungleichung ein. Nun kann die Thue-Gleichung (1.1) für alle x, y, die die Ungleichungen erfüllen und alle ℓ aus Korollar 2.18 (Spalte $N_{k(\alpha)/k}(\gamma)$) abhängig von t gelöst werden. Dann wird überprüft, ob $t \in \mathbb{Z}_k$ und $\Re t = -\frac{1}{2}$ gilt (siehe Anhang A.4.3).

Dadurch erhält man die folgenden Lösungspaare (x,y) von $F_t(x,y) = \ell$ mit $|y| < 7$ und $|t| < 6$:

$\underline{D \equiv 3 \pmod 4}$:
$[D.1]$ $(x,y) = (-1,-1)$ für $\ell = 2t+1$ für alle t,
$[D.2]$ $(x,y) = (-t,-1)$ für $\ell = 2t+1$ für alle t.

<u>D=3:</u> Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ ergeben sich die Lösungen:
[3.2] $(x,y) = (-b,-1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) + \frac{7}{2} = -4$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,

[3.3] $(x,y) = (-(1-b),1)$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.4] $(x,y) = (-b,1)$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 4i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.8] $(x,y) = (2+3b,1-b)$ für $\ell = 7i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.9] $(x,y) = (-(7-6b),1+b)$ für $\ell = -4$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.10] $(x,y) = (-(1+2b),-(1-b))$ für $\ell = 4i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.11] $(x,y) = (-(1+b),-(1-b))$ für $\ell = 2+3i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.12] $(x,y) = (-(1+b),2b)$ für $\ell = 2-3i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.13] $(x,y) = (-(1+3b),-(1-b))$ für $\ell = 4+3i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.14] $(x,y) = (2+2b,1-b)$ für $\ell = 4-3i\sqrt{3}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$.

D=7: Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ erhält man die Lösungen:
[7.1] $(x,y) = (1,-b)$ für $\ell = 2t+1-2i\sqrt{7} = i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.5] $(x,y) = (1,-(1+b))$ für $\ell = 4+i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.6] $(x,y) = (-1,-(1-b))$ für $\ell = 4-i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.7] $(x,y) = (1,1-2b)$ für $\ell = 1+2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.8] $(x,y) = (-1,2b)$ für $\ell = 1-2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.9] $(x,y) = (2,-(1+b))$ für $\ell = \frac{7}{2} + \frac{5i\sqrt{7}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.10] $(x,y) = (-2,b)$ für $\ell = \frac{7}{2} - \frac{5i\sqrt{7}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.11] $(x,y) = (5-b,-b)$ für $\ell = -7$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$,
[7.12] $(x,y) = (3+2b,1-b)$ für $\ell = -7$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{7}}{2}$.

D=11: Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ ergeben sich die Lösungen:
[11.2] $(x,y) = (1,-b)$ für $\ell = 2i\sqrt{11}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}$,
[11.3] $(x,y) = (1,-(1+b))$ für $\ell = 7+2i\sqrt{11}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{11}}{2}$,
[11.4] $(x,y) = (2,2-b)$ für $\ell = 2t+1 = i\sqrt{11}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}$,
[11.5] $(x,y) = (2,-(3+b))$ für $\ell = 2t+1 = i\sqrt{11}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}$.

D=15: Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ bekommt man die Lösungen:
[15.1] $(x,y) = (1,-b)$ für $\ell = 2t+1 = 3i\sqrt{15}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{15}}{2}$,
[15.2] $(x,y) = (3+b,4-b)$ für $\ell = 2t+1 = i\sqrt{15}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}$.

D=19: Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ ergeben sich die Lösungen:
[19.2] $(x,y) = (2,1-b)$ für $\ell = 3$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{19}}{2}$,
[19.3] $(x,y) = (-2,2+b)$ für $\ell = 3$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{19}}{2}$.

D=23: Zusätzlich zu $[D.1]$, $[D.2]$ erlangt man die Lösungen:
[23.2] $(x,y) = (-3,1+b)$ für $\ell = 2t+1 = i\sqrt{23}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$,
[23.3] $(x,y) = (-5,2+b)$ für $\ell = 2t+1 = i\sqrt{23}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$,
[23.4] $(x,y) = (2,1-b)$ für $\ell = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$,

[23.5] $(x, y) = (-2, 1 + b)$ für $\ell = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$,
[23.6] $(x, y) = (2, -b)$ für $\ell = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$,
[23.7] $(x, y) = (-2, 2 + b)$ für $\ell = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$.

D=31: Zusätzlich zu [D.1], [D.2] gewinnt man die Lösungen:
[31.1] $(x, y) = (3, -(1 + b))$ für $\ell = 2t + 1 = i\sqrt{31}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$,
[31.2] $(x, y) = (5, -(1 + 3b))$ für $\ell = 2t + 1 = i\sqrt{31}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$,
[31.3] $(x, y) = (2, -b)$ für $\ell = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$,
[31.4] $(x, y) = (-2, 1 + b)$ für $\ell = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{31}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$.

D=35: Zusätzlich zu [D.1], [D.2] ergeben sich die Lösungen:
[35.1] $(x, y) = (2, -(1 + b))$ für $\ell = 2t + 1 = i\sqrt{35}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$,
[35.2] $(x, y) = (2, -b)$ für $\ell = 2t + 1 = i\sqrt{35}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$.

4.3.2 Ausnahmefälle $x \in \{0, -y, ty\}$

Im dritten Kapitel wurden für alle t mit $|t| \geq 6$ die Werte $x = 0$, $x = -y$ und $x = ty$ ausgenommen, damit der Ausdruck $|x - \lfloor\alpha^{(j)}\rfloor y|$ nicht verschwindet. Nun werden diese speziellen Werte untersucht.

Im Fall $\boldsymbol{x = 0}$ wird die Thue-Gleichung (1.1) zu $F_t(0, y) = -y^3 = \ell$. Um diese Gleichung zu lösen, müssen die dritte Wurzeln von $-\ell$ berechnet werden. Da die Wurzeln Elemente aus $\mathbb{Z}_k$ sein müssen, können nicht alle Werte ℓ aus der Tabelle von Korollar 2.18 (Spalte $N_{k(\alpha)/k}(\gamma)$) verwendet werden. Die Liste aller möglichen ℓ und t kann mithilfe eines `Mathematica`®-Programmes ermittelt werden. Dieses Programm berechnet für eine Liste von t mit $\Re t = -\frac{1}{2}$ und $\Im t > 0$ die dritten Wurzeln y aller $\pm\ell$ aus Korollar 2.18 und überprüft, ob y ein Element aus $\mathbb{Z}_k$ für ein spezielles t mit $|t| \geq 6$ ist (siehe Anhang A.4.4). Man erhält die folgenden Paare (x, y) von Lösungen:

$D \equiv 3 \pmod 4$:
[D.3] $(x, y) = (0, -(2k + 1)(1 - 2b))$ für $\ell = 2t + 1$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}, c = D(2k + 1)^3, k \geq 0$.

D=3: Zusätzlich zu [D.3] ergeben sich die Lösungen:
[3.16] $(x, y) = (0, -k(1 - 2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 + 3, k \geq 1$,
[3.17] $(x, y) = (0, -k(1 - 2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 - 3, k \geq 2$,
[3.18] $(x, y) = (0, 3k + 2)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t + 1) - \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3-7}{3}, k \geq 1$,
[3.19] $(x, y) = (0, 3k + 1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t + 1) + \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3+7}{3}, k \geq 1$.

D=7: Zusätzlich zu [D.3] bekommt man die Lösung:
[7.13] $(x, y) = (0, -(2k + 1)(1 - 2b))$ für $\ell = 2t + 1 - 2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{7}}{2}, c = 7(2k + 1)^3$, $k \geq 0$.

Im Fall $\boldsymbol{x = -y}$ wird die Thue-Gleichung (1.1) zu

$$\begin{aligned} F_t(-y,y) = (-y)^3 - (t-1)(-y)^2 y - (t+2)(-y)y^2 - y^3 = \\ -y^3 - (t-1)y^3 + (t+2)y^3 - y^3 = y^3 = \ell \end{aligned}$$

Das Lösen der Thue-Gleichung in diesem Fall ist analog zum Lösen der Thue-Gleichung im Fall $x = 0$, und man erhält die folgenden Lösungspaare (x, y):

<u>$D \equiv 3 \pmod 4$:</u>
[D.3] $(x, y) = (0, -(2k+1)(1-2b))$ für $\ell = 2t+1$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}, c = D(2k+1)^3, k \geq 0$.

<u>D=3:</u> Zusätzlich zu [D.3] ergeben sich die Lösungen:
[3.16] $(x, y) = (0, -k(1-2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 + 3, k \geq 1$,
[3.17] $(x, y) = (0, -k(1-2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 - 3, k \geq 2$,
[3.18] $(x, y) = (0, 3k+2)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) - \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3-7}{3}, k \geq 1$,
[3.19] $(x, y) = (0, 3k+1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) + \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3+7}{3}, k \geq 1$.

<u>D=7:</u> Zusätzlich zu [D.3] gewinnt man die Lösung:
[7.13] $(x, y) = (0, -(2k+1)(1-2b))$ für $\ell = 2t+1-2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{7}}{2}, c = 7(2k+1)^3$, $k \geq 0$.

Im Fall $\boldsymbol{x = ty}$ wird die Thue-Gleichung (1.1) zu

$$F_t(ty, y) = (ty)^3 - (t-1)(ty)^2 y - (t+2)tyy^2 - y^3 = -(2t+1)y^3 = \ell.$$

Um diese Gleichung zu lösen, müssen die dritten Wurzeln von $-\frac{\ell}{2t+1}$ berechnet werden. Diese Wurzeln y müssen Elemente aus $\mathbb{Z}_k$ sein. Berechnet man für alle möglichen rechten Seiten ℓ der Thue-Gleichung (1.1) die dritten Wurzeln $-\frac{\ell}{2t+1}$, so ergibt sich nur dann $y \in \mathbb{Z}_k$, wenn $\ell = \pm(2t+1)$ gilt. In diesem Fall wird $y^3 = \pm 1$ gelöst, man berechnet also die dritten Einheitswurzeln (siehe Anhang A.4.4). Für $x = ty$ erhält man die Lösung
[D.2] $(x, y) = (-t, -1)$ für $\ell = 2t+1$ für alle D und t.

4.3.3 $\gamma = x - \alpha y$ assoziiert zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$

Zum Abschluss wird noch der Fall betrachtet, wenn γ zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist. Seien $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ und $\gamma^{(3)}$ wie in (3.2) definiert. Ist $\gamma = \gamma^{(1)}$ zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert, so sind $\gamma^{(2)}$ und $\gamma^{(3)}$ zur selben ganzen Zahl assoziiert, und man kann $N_{k(\alpha)/k}(x - \alpha y) = F_t(x, y) = \ell$ als $\gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)} \cdot \gamma^{(3)} = \ell = \mu r^3$ mit $|\mu| = 1$ und $r \in \mathbb{Z}_k$ schreiben. Dividiert man diese Gleichung durch r^3, dann ergibt sich $\frac{\gamma^{(1)}}{r} \cdot \frac{\gamma^{(2)}}{r} \cdot \frac{\gamma^{(3)}}{r} = \mu$ bzw.

$$\hat{x}^3 - (t-1)\hat{x}^2\hat{y} - (t+2)\hat{x}\hat{y}^2 - \hat{y}^3 = \mu. \tag{4.50}$$

Diese Thue-Gleichung wurde in [1], [2], [3] sowie [4] betrachtet. In Tabelle 1 von [3, Satz 2] sowie in der Übersicht [4] sind alle Lösungen $(\hat{x}, \hat{y})$ von (4.50) aufgelistet. Setzt man $x = \hat{x}r$ und $y = \hat{y}r$, so erhält man für $\Re t = -\frac{1}{2}$ alle Lösungen von (1.1). Da die dritte Wurzel von ℓ

berechnet werden muss und diese Wurzel r ein Element aus $\mathbb{Z}_k$ sein muss, gibt es nur Lösungen für spezielle ℓ abhängig von D und t (vgl. die Spezialfälle $x = 0, x = -y$). Die Liste der Lösungen kann mithilfe eines `Mathematica`®-Programmes erhalten werden. Das Programm berechnet für eine Liste t mit $\Re t = -\frac{1}{2}$ und $\Im t > 0$ die dritte Wurzel r von ℓ, multipliziert jedes $\hat{x}$ und $\hat{y}$ mit r und überprüft, ob diese Werte für ein spezielles t aus $\mathbb{Z}_k$ sind (siehe Anhang A.4.5). Dadurch erhält man die folgenden Lösungen (x, y):

$D \equiv 3 \pmod 4$:
[D.3] $(x, y) = (0, -(2k+1)(1-2b))$ für $\ell = 2t+1$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}, c = D(2k+1)^3, k \geq 0$.

D=3: Zusätzlich zu [D.3] ergeben sich die Lösungen:
[3.15] $(x, y) = (0, -2)$ für $\ell = 8$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$,
[3.16] $(x, y) = (0, -k(1-2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 + 3, k \geq 1$,
[3.17] $(x, y) = (0, -k(1-2b))$ für $\ell = \frac{2t+1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = 6k^3 - 3, k \geq 2$,
[3.18] $(x, y) = (0, 3k+2)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) - \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3-7}{3}, k \geq 1$,
[3.19] $(x, y) = (0, 3k+1)$ für $\ell = \frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1) + \frac{7}{2}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}, c = \frac{2(3k+2)^3+7}{3}, k \geq 1$.

D=7: Zusätzlich zu [D.3] erhält man die Lösung:
[7.13] $(x, y) = (0, -(2k+1)(1-2b))$ für $\ell = 2t+1-2i\sqrt{7}$ für $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{7}}{2}, c = 7(2k+1)^3$, $k \geq 0$.

4.4 Lösungen der Thue-Gleichung für alle t mit $\Re t = -\frac{1}{2}$

Lemma 4.3 *Sei (x, y) eine Lösung von $F_t(x, y) = \ell$. Dann sind $(-(x+y), x)$ und $(y, -(x+y))$ ebenfalls Lösungen von $F_t(x, y) = \ell$ und $(-x, -y)$ ist eine Lösung von $F_t(x, y) = -\ell$. Im Fall $D = 3$ sind $(-bx, -by)$ und $(-(1-b)x, -(1-b)y)$ ebenfalls Lösungen von $F_t(x, y) = \ell$.*

Beweis Durch Einsetzen in die Thue-Gleichung. Die letzte Behauptung folgt mithilfe von $b^2 = b - 1$ für $b = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ebenfalls durch Einsetzen. □

Kombiniert man die vorigen Abschnitte, so erhält man folgenden Satz über die Lösungen der Thue-Gleichung (1.1).

Satz 4.4 *Sei $D \equiv 3$ (mod 4) quadratfrei, $k := \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $\mathbb{Z}_k$ der zugehörige Ganzheitsring und $t, \ell \in \mathbb{Z}_k$ mit $t \notin \mathbb{Z}$ und $|\ell| \leq |2t+1|$. Weiters sei $b = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{D}}{2}$. Für $\Re t = -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $t \neq -\frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ sind die einzigen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$, abgesehen von jenen zusätzlichen Lösungen, die gemäß Lemma 4.3 existieren, der Familie von relativen Thue-Gleichungen*

$$F_t(x, y) := x^3 - (t-1)x^2y - (t+2)xy^2 - y^3 = \ell$$

in den folgenden Tabellen abhängig von der Diskriminante D aufgelistet.

Tabelle 1 (für alle D)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
$[D.1]$	-1	-1	$2t+1$	*für alle* D *and* t
$[D.2]$	1	$-1-t$	$-2t-1$	*für alle* D *and* t
$[D.3]$	0	$-(2k+1)(1-2b)$	$2t+1$	*für alle* D *and* $t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{D}}{2}$, $c=D(2k+1)^3$, $k\geq 0$

Tabelle 2 $(D=3)$				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[3.1]	$1+b$	-1	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)-\frac{7}{2}$	*für alle* $t\neq-\frac{1}{2}+\frac{ki\sqrt{3}}{2}$, $k\in\{1,5,7,9,11,13,15\}$
[3.2]	$-b$	-1	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)+\frac{7}{2}$	*für alle* $t\neq-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$
[3.3]	$-(1-b)$	1	$\frac{2t+1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	*für alle* $t\neq-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$
[3.4]	$-b$	1	$\frac{2t+1}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	*für alle* $t\neq-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$
[3.5]	$5-5b$	$-(19+14b)$	$2i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}$
[3.6]	b	$2-b$	$5-6i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}$
[3.7]	$-(1-b)$	2	$5+6i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{3}}{2}$
[3.8]	$2+3b$	$1-b$	$7i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.9]	$-(7-6b)$	$1+b$	-4	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.10]	$-(1+2b)$	$-(1-b)$	$4i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.11]	$-(1+b)$	$-(1-b)$	$2+3i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.12]	$-(1+b)$	$2b$	$2-3i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.13]	$-(1+3b)$	$-(1-b)$	$4+3i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.14]	$2+2b$	$1-b$	$4-3i\sqrt{3}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.15]	0	-2	8	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{3}}{2}$
[3.16]	0	$-k(1-2b)$	$\frac{2t+1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{3}}{2}$, $c=6k^3+3, k\geq 1$
[3.17]	0	$-k(1-2b)$	$\frac{2t+1}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{3}}{2}$, $c=6k^3-3, k\geq 2$
[3.18]	0	$3k+2$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)-\frac{7}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{3}}{2}$, $c=\frac{2(3k+2)^3-7}{3}, k\geq 1$
[3.19]	0	$3k+1$	$\frac{i\sqrt{3}}{2}(2t+1)+\frac{7}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{3}}{2}$, $c=\frac{2(3k+1)^3+7}{3}, k\geq 1$

Tabelle 3 ($D = 7$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[7.1]	1	$-b$	$2t+1-2i\sqrt{7}$	*für alle* $t \neq -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2}$
[7.2]	-12	$-(35-82b)$	$5i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{7i\sqrt{7}}{2}$
[7.3]	1	$-(1+b)$	$11+2i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$
[7.4]	-1	$-(1-b)$	$11-2i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$
[7.5]	1	$-(1+b)$	$4+i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.6]	-1	$-(1-b)$	$4-i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.7]	1	$1-2b$	$1+2i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.8]	-1	$2b$	$1-2i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.9]	2	$-(1+b)$	$\frac{7}{2}+\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.10]	-2	b	$\frac{7}{2}-\frac{5i\sqrt{7}}{2}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.11] [7.12]	$5-b$ $3+2b$	$-b$ $1-b$	-7	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{7}}{2}$
[7.13]	0	$-(2k+1)(1-2b)$	$2t+1-2i\sqrt{7}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{ci\sqrt{7}}{2}$, $c=7(2k+1)^3+2$, $k \geq 0$

Tabelle 4 ($D = 11$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[11.1]	1	$-b$	$5i\sqrt{11}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{5i\sqrt{11}}{2}$
[11.2]	1	$-b$	$2i\sqrt{11}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$
[11.3]	1	$-(1+b)$	$7+2i\sqrt{11}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{11}}{2}$
[11.4] [11.5]	2 2	$2-b$ $-(3+b)$	$i\sqrt{11}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{11}}{2}$

Tabelle 5 ($D = 15$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[15.1]	1	$-b$	$3i\sqrt{15}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{3i\sqrt{15}}{2}$
[15.2]	$3+b$	$4-b$	$i\sqrt{15}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}$

Tabelle 6 ($D = 19$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[19.1]	-85	$36+13b$	$i\sqrt{19}$	$t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$
[19.2] [19.3]	2 -2	$1-b$ $2+b$	3	$t=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{19}}{2}$

Tabelle 7 ($D = 23$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[23.1]	17	$-(7+3b)$	$i\sqrt{23}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$
[23.2]	-3	$1+b$		
[23.3]	-5	$2+b$		
[23.4]	2	$1-b$	$\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$
[23.5]	-2	$1+b$		
[23.6]	2	$-b$	$\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{2}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}$
[23.7]	-2	$2+b$		

Tabelle 8 ($D = 31$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[31.1]	3	$-(1+b)$	$i\sqrt{31}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$
[31.2]	5	$-(1+3b)$		
[31.3]	2	$-b$	$\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$
[31.4]	-2	$1+b$	$\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{31}}{2}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{31}}{2}$

Tabelle 9 ($D = 35$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[35.1]	2	$-(1+b)$	$i\sqrt{35}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{35}}{2}$
[35.2]	2	$-b$		

Tabelle 10 ($D = 43$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[43.1]	$2b-1$	$17-b$	-4	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{43}}{2}$

Tabelle 11 ($D = 51$)				
	x	y	ℓ	*Einschränkungen gültig für t*
[51.1]	32	$-(3+26b)$	$i\sqrt{51}$	$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{51}}{2}$

4.5 Abschließende Bemerkungen

In dieser Arbeit wurde die Thue-Gleichung (1.1) nur für den Spezialfall $\Re t = -\frac{1}{2}$ gelöst. Um die Gleichung nun auch für allgemeine Parameter t lösen zu können, müsste man die folgende, etwas komplexere Linearform in Logarithmen untersuchen:

$$|\Lambda_j| = |\log|\delta_j| + A_j \log|\alpha| + B_j \log|\alpha + 1|| \,.$$

Mithilfe der Resultate dieser Arbeit lässt sich zwar die Thue-Gleichung für allgemeine t nicht lösen, es ist jedoch möglich, eine Aussage über jene ℓ zu treffen, die als rechte Seite der Thue-Gleichung (1.1) in Frage kommen. Wie bereits in Kapitel 1 beschrieben, ist das Lösen der

Thue-Gleichung (1.1) äquivalent zum Berechnen aller Elemente mit einer Norm $\leq |2t+1|$. Diese Elemente mit kleiner Norm wurden in Kapitel 2 für allgemeine t berechnet, sodass man sagen kann, dass für alle t mit $\Im t > 0$ die Werte aus der Spalte $N_{k(\alpha)/k}(\gamma)$ in Satz 2.15 die einzig möglichen rechten Seiten ℓ der Thue-Gleichung (1.1) sind, so dass Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ existieren. Diese Werte sind genau die Werte, die die Ungleichung $|F_t(x, y)| = |\ell| = |N_{k(\alpha)/k}(x - \alpha y)| \leq |2t+1|$ erfüllen. Man kann also die Menge aller möglichen ℓ, die bei der Lösung der Thue-Gleichung (1.1) betrachtet werden müssen, auf eine endliche, nicht allzu große Menge von verschiedenen Werten einschränken.

Anhang A

Programme

A.1 Einleitung

Dieser Anhang enthält eine Sammlung der Programme, die dazu verwendet wurden, um die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu berechnen. Verwendet wurde dabei `Mathematica`® 5.1, mit Ausnahme des Programmes in Abschnitt A.4.2, das in KASH3 geschrieben wurde. Dort, wo sich Programmteile wiederholen und nur einige kleine Änderungen, z.B. durch eine andere Diskriminante, nötig werden, ist nur jeweils ein einzelner Fall als Bespiel angegeben, die restlichen Fälle lassen sich durch Austauschen einzelner Zahlen im Programm einfach konstruieren.

In A.2 findet man alle Programme, die dazu benötigt werden, um alle Elemente mit kleiner Norm für $|t| \geq 6$ zu berechnen, in A.3 die entsprechenden Programme für $|t| < 6$. In A.4 sind alle Programme zusammengefasst, die bei der Berechnung der Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) verwendet wurden.

A.2 Programme zur Berechnung der Elemente kleiner Norm mit beliebigem $\Re t$ und $|t| \geq 6$

In Abschnitt A.2.1 werden obere Schranken für $|v|, |w|$ berechnet, in Abschnitt A.2.2 bzw. A.2.3 wird eine obere Grenze für R und $\hat{R}$ berechnet. Diese Grenzen werden dann in Abschnitt A.2.4 verwendet, um jene $\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)}$ zu berechnen, für die die Norm kleiner oder gleich $|2t + 1|$ ist und für die u, v, w innerhalb dieser Schranken liegen. Die Berechnung dieser Werte erfolgt abhängig von $|t|$. Da diese Rechnung nur einmal pro Programmdurchlauf (und zwar vor dem Programmstart) erfolgt, wird sie gesondert vom Hauptprogramm A.2.4 durchgeführt. In Abschnitt A.2.5 werden dann jene Fälle betrachtet, für die das Hauptprogramm nicht entscheiden konnte, ob die Norm größer oder kleiner $|2t + 1|$ ist.

A.2.1 Berechnung der Schranken für $|v|, |w|$

Für die Schranken von v und w verwendet man die Formel

$$|v|, |w| \leq (2|t|)^{\frac{1}{3}} C(\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{\Delta}{|\tilde{m}|} \tag{A.1}$$

mit

$$\frac{\Delta}{|\tilde{m}|} = \frac{1}{|\alpha - \alpha^{(2)}||(\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|} + \frac{1}{|\alpha - \alpha^{(3)}||(\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|} + \frac{1}{|\alpha - \alpha^{(2)}||(\alpha - \alpha^{(3)}|}$$

und

$$C(\alpha) = |\alpha - 1 - \alpha^{(3)}|$$

(siehe (2.6) bzw. zur Herleitung dieser Formeln Abschnitt 2.3). Diese Schranke für $|v|$ bzw. $|w|$ muss in das Programm zur Berechnung der Elemente mit kleiner Norm eingegeben werden.

```
a1223:=1/(-1-a1 a2/t^7-a2^2/t^7-a1 a3/t^7-a2 a3/t^7-a1/t^6.5-6 a2/t^6.5-
  -5 a3/t^6.5-5/t^6-a1/t^5.5-a3/t^5.5-4/t^5-3 a2/t^4.5-3 a3/t^4.5-4/t^4-
  -a1/t^3.5-2 a2/t^3.5-a3/t^3.5-3/t^3-a2/t^2.5-a3/t^2.5-1/t^2-4/t+t))
```
$(*1/(|\alpha - \alpha^{(2)}| \cdot |\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|)*)$

```
a1323:=1/(-a1 a2/t^7-a1 a3/t^7-a2 a3/t^7-a3^2/t^7-a1/t^6.5-4 a2/t^6.5-
  -3 a3/t^6.5-4/t^6-a1/t^5.5-2 a2/t^5.5-3 a3/t^5.5-2/t^5-3 a2/t^4.5-
  -3 a3/t^4.5-5/t^4-a1/t^3.5-a3/t^3.5-1/t^3-a2/t^2.5-a3/t^2.5-3/t^2-4/t+t)
```
$(*1/(|\alpha - \alpha^{(3)}| \cdot |\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|)*)$

```
a1213:=1/(-6-a1^2/t^7-a1 a2/t^7-a1 a3/t^7-a2 a3/t^7-9 a1/t^6.5-
  -4 a2/t^6.5-5 a3/t^6.5-20/t^6-3 a1/t^5.5-2 a2/t^5.5-a3/t^5.5-14/t^5-
  -6 a1/t^4.5-3 a2/t^4.5-3 a3/t^4.5-25/t^4-a1/t^3.5-a3/t^3.5-13/t^3-
  -2 a1/t^2.5-a2/t^2.5-a3/t^2.5-2/t^2-t+t^2)
```
$(*1/(|\alpha - \alpha^{(2)}| \cdot |\alpha - \alpha^{(3)}|)*)$

```
deltam := a1223 + a1323 + a1213
```
$(*\Delta/|\tilde{m}|*)$

```
cal:=1+a1/t^3.5+a3/t^3.5+4/t^3+2/t^2+3/t+t
```
$(*C(\alpha) = |\alpha - 1 - \alpha^{(3)}|*)$

```
v=deltam cal^(2/3)(2t)^(1/3)/.{a1->4.6,a2->1.5,a3->2,t->6}
```
$(*|v|, |w| \leq (2|t|)^{1/3} C(\alpha)^{2/3} \frac{\Delta}{|\tilde{m}|}*)$

A.2.2 Berechnung von R und $\hat{R}$

Um eine Schranke für $|u|$ zu erhalten, werden die Werte R und $\hat{R}$ ermittelt. Erfüllt $R^2 = \frac{l}{M}$ mit $M = \max(|v|, |w|)$ die Ungleichung

$$R^2(d - R) > |2t + 1|, \tag{A.2}$$

dann gilt, dass $|N(u + v\alpha + w\alpha^{(2)})| > |2t + 1|$ ist, und somit kann der Wert $\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)}$ verworfen werden. Daher betrachtet man nur jene Werte u, für die $|u - r_i| < R$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt.
Für $d = \max_{i,j} |r_i - r_j|$ mit

$$r_1 := -v\alpha - w\alpha^{(2)}, \quad r_2 := -v\alpha^{(2)} - w\alpha^{(3)}, \quad r_3 := -v\alpha^{(3)} - w\alpha$$

berechnet man eine untere Schranke abhängig davon, ob $|v| = \max(|v|, |w|)$ oder $|w| = \max(|v|, |w|)$ gilt (siehe (2.9)). Diese Schranke wird dann in die Ungleichung (A.2) eingesetzt, und es ergibt sich damit der Wert R. Für $\hat{R}$ erhält man einen Wert mithilfe der Formel

$$\hat{R} := R + M \max |r_i - p_i|,$$

wobei

$$p_1 := -vt + w, \quad p_2 := v, \quad r_3 := -wt$$

und $|u - p_i| < \hat{R}$ gilt (siehe (2.11)).
Dieser Wert für $\hat{R}$ muss in das Programm zur Berechnung der Elemente mit kleiner Norm eingegeben werden. Zur genaueren Betrachtung der Werte R und $\hat{R}$ siehe Abschnitt 2.4.

Beispiel: $|v| = 2, |w| < |v|$, d.h. $M = 2$, $d \geq |r_1 - r_2| \geq |v|(|t| - L_6(2 + (*) + 2(**) + (***))$, wobei $(*), (**), (***)$ für die L_6-Terme in der Entwicklung (2.8) von $\alpha, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ stehen.

```
n:=(2t)/t/.t->6
st:=0.383694                      (*L6-Term von α, verkürzte Entwicklung*)
zwst:=0.178761                    (*L6-Term von α^(2), verkürzte Entwicklung*)
drst:=0.202854                    (*L6-Term von α^(3), verkürzte Entwicklung*)
k:=2+st+2 zwst+drst               (*gesamter L6-Term*)
Solve[l(1-k/t)-l^1.5/(m^1.5 t)==n/.{t->6,m->2},l]
                  (*R^2(d-R) > |2t| ≥ |2t+1| mit M = max(|v|,|w|)*)
R=Sqrt[l/m]+m(st+drst)/.{l->5.93,m->2}      (*R̂ = √R + M max|r_i - p_i|*)
```

A.2.3 Verfeinerte Berechnung von R und $\hat{R}$

Dieses Programm wird nur verwendet, wenn das obige Programm keine reelle Lösung liefert. Der Wert für $\hat{R}$ wird dann in das Programm zur Berechnung der Elemente mit kleiner Norm eingegeben.

Beispiel: $|w| = 1, |v| = \sqrt{2}$, d.h. $M = \sqrt{2}$, $d \geq |r_1 - r_2| \geq |v||t| - |v| - |w| - |v|L_6((*) + (**)) - |w|L_6((**) + (***))$, wobei $(*), (**), (***)$ für die L_6-Terme in der Entwicklung (2.3) von $\alpha, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ stehen.

```
st:=4.6/6^3.5                     (*L6-Term von α, lange Entwicklung*)
zwst:=1.5/6^3.5                   (*L6-Term von α^(2), lange Entwicklung*)
drst:=2/6^3.5                     (*L6-Term von α^(3), lange Entwicklung*)
k:=1+Sqrt[2]+Sqrt[2]st+(Sqrt[2]+1)zwst+drst      (*gesamter L6-Term*)
Solve[(1/Sqrt[2])(Sqrt[2]-(3 Sqrt[2]+2)/t^2-(Sqrt[2]+1)/t^3-
  -3 Sqrt[2]/t^4-k/t)-(1/Sqrt[2])^1.5/t==12/6/.t->6,l]
                  (*R^2(d-R) > |2t| ≥ |2t+1| mit M = max(|v|,|w|)*)
R=Sqrt[l/Sqrt[2]]+Sqrt[2](2/t+1/t^2+3/t^3+st)+(1/t+zwst)/.{t->6,l->6.7}
                                            (*R̂ = √R + M max|r_i - p_i|*)
```

A.2.4 Berechnung der Elemente mit kleiner Norm

Dieses Programm wurde aus Abschnitt 6 von [6] übernommen. An dieser Stelle erfolgt nun der Vollständigkeit halber ebenfalls eine Beschreibung des Programmes.
Es müssen endlich viele Ungleichungen der Form $|N(u+v\alpha+w\alpha^{(2)})| \leq |2t+1|$ untersucht werden. Dazu werden zuerst alle Variablen, die Listen für die Diskriminanten sowie die möglichen v, w, ξ-Werte definiert.

`alpha =.; alphap =.; alphapp =.;` $(*\alpha, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}*)$

`a =.; t =.; c =.; d =.; WD =.; DD =.; u =.; v =.; w =.; xc =.; xWD =.; c1 =.; c2 =.;`

`rootp:={-v alpha-w alphap,-v alphap-w alphapp,-v alphapp-w alpha};`
$(*p1 = -vt + w, p2 = v, p3 = -wt*)$

`subsalpha:={alpha->t,alphap->-1,alphapp->0};` (*Ganzteile der $\alpha^{(i)}$*)

`Assume:=Element[a,b,c,c1,c2,d,WD,u,v,w,Reals]`

$\mathtt{NN} := \mathtt{u}^3 + \mathtt{v}^3 + \mathtt{w}^3 + (\mathtt{t}-1)\mathtt{u}^2\mathtt{v} + (\mathtt{t}-1)\mathtt{u}^2\mathtt{w} + 3\mathtt{vw}^2 - (\mathtt{t}^2+\mathtt{t}+4)\mathtt{v}^2\mathtt{w} - (\mathtt{t}+2)\mathtt{uv}^2 - (\mathtt{t}+2)\mathtt{uw}^2 + (\mathtt{t}^2-\mathtt{t}+3)\mathtt{uvw}$ (*Norm*)

$\mathtt{vwVolleListe} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \mathtt{bs}, -\mathtt{bs}, 1+\mathtt{bs}, 1-\mathtt{bs}, -1+\mathtt{bs}, -1-\mathtt{bs}, 2+\mathtt{bs}, 2-\mathtt{bs}, -2+\mathtt{bs}, -2-\mathtt{bs}, -3+\mathtt{bs}, 3-\mathtt{bs}, -3-\mathtt{bs}, 3+\mathtt{bs}, -4+\mathtt{bs}, 4-\mathtt{bs}, 4+\mathtt{bs}, -4-\mathtt{bs}, 2\mathtt{bs}, -2\mathtt{bs}, 1+2\mathtt{bs}, 1-2\mathtt{bs}, -1+2\mathtt{bs}, -1-2\mathtt{bs}, 2+2\mathtt{bs}, 2-2\mathtt{bs}, -2+2\mathtt{bs}, -2-2\mathtt{bs}, -3+2\mathtt{bs}, 3-2\mathtt{bs}, -3-2\mathtt{bs}, 3+2\mathtt{bs}, -4+2\mathtt{bs}, 4-2\mathtt{bs}, 3\mathtt{bs}, -3\mathtt{bs}, 1+3\mathtt{bs}, 1-3\mathtt{bs}, -1+3\mathtt{bs}, -1-3\mathtt{bs}, 2+3\mathtt{bs}, 2-3\mathtt{bs}, -2+3\mathtt{bs}, -2-3\mathtt{bs}, -3+3\mathtt{bs}, 3-3\mathtt{bs}, -4+3\mathtt{bs}, 4-3\mathtt{bs}, 4\mathtt{bs}, -4\mathtt{bs}, 1+4\mathtt{bs}, 1-4\mathtt{bs}, -1+4\mathtt{bs}, -1-4\mathtt{bs}, 2-4\mathtt{bs}, -2+4\mathtt{bs}, -3+4\mathtt{bs}, 3-4\mathtt{bs}, -4+4\mathtt{bs}, 4-4\mathtt{bs}\}$
(*Liste von Elementen aus $\mathbb{Z}_k$, aus denen dann die v, w und ξ bestimmt werden*)

```
PlusMinus[y_]:=(If[Re[y]==0,If[Im[y]>=0,Return[True],Return[False]],
 If[Re[y]>0,Return[True],Return[False]]];)
```
(*True, wenn $\Re y = 0$ und $\Im y \geq 0$ oder $\Re y > 0$*)

`DiscrList=`$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 67, 71\}$;
(*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

Nun wird jede Diskriminante einzeln betrachtet.
Sei $t = c_1 + c_2 b$. Für dieses t gelten die Bedingungen: $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und $\Im t > 0$, und somit $c_2 \geq 1$ und $c_1 \leq \frac{(-c_2-1)}{2}$ bzw. $c_1 \leq -\frac{1}{2}$ (abhängig von der Diskriminante).

```
For[Discr=1,Discr≤Length[DiscrList],Discr++,
  DD=DiscrList[[Discr]];
  If[Mod[DD,4]== 3,EQ=True,EQ=False];
  WD=Sqrt[DD];
  If[EQ,
   bs:=(1+WD I)/2;
   Bedingung=(xc2>=1 && xc1<=(-xc2-1)/2),
   bs:=WD I;
   Bedingung=(xc2>=1 && xc1<=-1/2)];
```
(*Unterschiedliche Betrachtung,*)
(*je nachdem, ob $D \equiv 3(4)$ oder $D \not\equiv 3(4)$*)
$(*D \equiv 3(4) : b = (1+i\sqrt{D})/2, *)$
$(*D \not\equiv 3(4) : b = i\sqrt{D}*)$
(*Bedingungen: $\Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$*)

Berechnung von u und v, die innerhalb der oben berechneten Schranken liegen:

```
  ErgebnisListe={};
```

```
  Print[``***********************************************''];
  Print[``***********************************************''];
  Print[`` t='', t];
  Print[``***********************************************''];
  Print[``***********************************************''];
  vListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<4.16955 &];
                         (*Auswahl aller v und w, für die |v|,|w| < 4.16955 gilt*)
  wListe=vListe;
  Switch[DD,                                      (*Auswahl aller ξ mit |ξ| < 4.11*)
   1,xiListe:={0,1,2,3,4,1+bs,2+bs,2-bs,3+bs,3-bs,2+2bs,2-2bs,3+2bs,3-2bs},
   3,xiListe:={0,1,2,3,4,1+bs,2+bs,3+bs,3-bs,4-bs,2+2bs},   (*D = 1 und D = 3 :
Die ξ, die durch*)
   _,xiListe:=Select[Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<4.11 &],
    PlusMinus[#] &];    (*Multiplikation vorhandener Werte mit den Einheiten*)
  ];                                          (*entstehen, werden weggelassen*)
  Print[``v-list='',vListe];
  Print[``w-list='',wListe];
  Print[``xi-list='',xiListe];
  Print[``******************************************''];
```

Dann versucht das Programm zu entscheiden, ob für die einzelnen u, v und w folgende Ungleichungen, die von den Parametern c_1 und c_2 von t abhängen, erfüllt sind:

- Normungleichung
$$|N(u + v\alpha + w\alpha^{(2)})| \leq |2t + 1|, \tag{A.3}$$
- Ungleichung für t
$$|t| \geq 6 \quad (|t| < 6 \text{ siehe später}).$$

Außerdem müssen noch die Anforderungen an c_1 und c_2 erfüllt sein. Es können nun drei verschiedene Fälle auftreten:

- Das Programm findet heraus, dass die Ungleichung (A.3) für gegebene Werte von u, v, w nicht erfüllt ist. In diesem Fall werden die Werte u, v, w verworfen.
- Das Programm erkennt, dass die Ungleichung (A.3) für gegebene Werte von u, v, w erfüllt ist. In diesem Fall werden die Werte u, v, w gespeichert.
- Das Programm kann nicht entscheiden, ob die Ungleichung (A.3) für gegebene Werte von u, v, w erfüllt ist oder nicht. In diesem Fall erfolgt dann eine Aufspaltung abhängig von der Größe von c_1 und c_2. Dadurch erhält man endlich viele Unterfälle. Das Programm versucht nun, in diesen Unterfällen eine Entscheidung über die Richtigkeit der Ungleichung (A.3) zu treffen. Gelingt dies für einen Fall nicht, so muss dieser Fall gesondert betrachtet werden (siehe weiter unten).
  Jene Fälle, die das Programm als "nicht falsch" bewertet, d.h. alle Elemente, für die die Ungleichung erfüllt ist, sowie alle Elemente, für die das Programm bzgl. der Norm keine Aussage treffen kann, werden in eine Liste geschrieben.

```
For[l1=1,l1<=Length[vListe],l1++,
 Print[``Progress: Step '',l1,`` of '',Length[vListe],
 ``.''];
 For[l2=1,l2<=Length[wListe],l2++,
  For[j=1,j<=3,j++,
   For[i=1,i<=Length[xiListe],i++,
    NN2a:=NN/.u->rootp[[j]]+xiListe[[i]];    (*Berechnung der Norm jeweils*)
    NN2:=NN2a/.{v->vListe[[l1]],w->wListe[[l2]]};     (*mit Werten aus den*)
                              einzelnen Listen, t wird durch $c_1 + c_2 b$ ersetzt,*)
    NN3:=NN2/.subsalpha;                     (*und man erhält dadurch die Norm,*)
    NN4:=NN3/.t->c1+bs c2;                           (*abhängig von c1 und c2*)
    Repart:=ComplexExpand[Re[NN4]];                    (*Aufspaltung der Norm*)
    Impart:=ComplexExpand[Im[NN4]];            (*in Real- und Imaginärteil*)
    If[EQ,
     C3:=FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2c1+c2+1)^2+c2^2DD,
                              (*Vereinfachung von $|N| \leq |2t+1|$ unter den*)
      Bedingung && (c1+c2/2)^2+DD c2^2/4>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];
                              (*Bedingungen $|t| \geq 6, \Re t \leq -\frac{1}{2}, \Im t > 0$*)
     If[Not[C3===True] && Not[C3===False],        (*Ist C3 weder wahr noch*)
      C4=FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2c1+c2+1)^2+c2^2DD,
       c1<=-10 && c2>=10 && Bedingung[[2]] &&    (*falsch, so erfolgt eine*)
       (c1+c2/2)^2+DD c2^2/4>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];
      For[ll=1,ll<10,ll++,          (*Aufspaltung und besonders große bzw.*)
       For[mm=-9,mm<=(-ll-1)/2,mm++,             (*besonders kleine Werte*)
        If[(mm+ll/2)^2+DD ll^2/4>=36,          (*werden extra angeschaut*)
         C4=C4||FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2c1+c2+1)^2+c2^2DD,
          c1==mm && c2==ll/.xc1->c1/.xc2->c2];
        ];
       ];
       C4=C4||FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2c1+c2+1)^2+c2^2DD,
        c1<=-10 && c2==ll && Bedingung[[2]]
        && (c1+c2/2)^2+DD c2^2/4>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];
      ];
      If[C4===False,C3=False];      (*Erhält man auch dann weder True noch*)
     ],          (*False, so wird die Ungleichung zur weiteren Betrachtung*)
     C3 := FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2 c1+1)^2+(2 c2)^2DD,
      Bedingung && c1^2+DD c2^2>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];       (*ausgegeben*)
     If[Not[C3===True] && Not[C3===False],    (*Vereinfachung für $D \not\equiv 3(4)$*)
      C4=FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2 c1+1)^2+(2 c2)^2DD,
       c2>=10 && Bedingung[[2]] && c1^2+DD c2^2>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];
      For[ll=1,ll<10,ll++,
       C4=C4||FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=(2 c1+1)^2+(2 c2)^2DD,
        c2==ll && Bedingung[[2]] && c1^2+DD c2^2>=36/.xc1->c1/.xc2->c2];
       If[C4 === False, C3 = False];
      ]
     ]
    ]
```

```
      If[(C3!=False)||(Length[C3]>0),
       Enthalten=Flatten[Position[ErgebnisListe,{vListe[[l1]],
        wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3}]];
       If[Enthalten=={},
        ErgebnisListe=Append[ErgebnisListe,{{vListe[[l1]],
         wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3},{{DD }}}],
        ErgebnisListe=ReplacePart[ErgebnisListe,{{vListe[[l1]],
         wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3},
         Append[ErgebnisListe[[Enthalten[[1]],2]],{DD}]},
         Enthalten[[1]]]                          (*In eine Liste werden*)
       ]                                  (*jene Elemente hineingeschrieben,*)
      ]                                 (*für die die Ungleichung erfüllt ist.*)
     ]                                (*Die Liste enthält die zugehörigen v,w,ξ,*)
    ]                                 (*den Real- und den Imaginärteil der Norm.*)
   ]
  ];
```

Sind nun zwei Elemente dieser Liste zueinander assoziiert, so genügt es, eines der beiden Elemente zu betrachten. Um die Assoziiertheit leichter festzustellen zu können, verwandelt man jedes der Elemente der Liste mithilfe des folgenden Algorithmus in ein Tripel von Normalformen.

Gegeben: $\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)}$
Gesucht: Drei Normalformen f_1, f_2, f_3 für β
Ersetze t in β durch $\alpha + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + 1$.
For j=1,2,3 do
Ersetze β durch f_j.
Ersetze in f_j $\alpha, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ durch $\alpha^{(j)}$ mit $\alpha^{(2)} = -\frac{\alpha+1}{\alpha}$ und $\alpha^{(3)} = -\frac{1}{\alpha+1}$.
Stelle f_j in Potenzen von $\alpha^{(j)}$ dar.
Dividiere f_j durch die kleinste im Ausdruck vorkommende Potenz von $\alpha^{(j)}$.
Stelle f_j in Potenzen von $\alpha^{(j)} + 1$ dar.
Dividiere f_j durch die kleinste im Ausdruck vorkommende Potenz von $\alpha^{(j)} + 1$.
end for

Durch Anwendung dieses Algorithmus erhält man dann eine Liste von Normalform-Tripeln, die abhängig von D und den zugehörigen Einheiten in $\mathbb{Z}_k$ untersucht werden müssen.

- $D = 1$: Falls es zwei Tripel (f_1, f_2, f_3) und (g_1, g_2, g_3) gibt, sodass $g_i = ef_i$ mit $e \in \{\pm 1, \pm b\}$ gilt, dann kann eines der beiden Tripel entfernt werden.
- $D = 3$: Falls es zwei Tripel (f_1, f_2, f_3) und (g_1, g_2, g_3) gibt, sodass $g_i = ef_i$ mit $e \in \{\pm 1, \pm b, \pm(1-b)\}$ gilt, dann kann eines der beiden Tripel entfernt werden.
- $D \neq 1, 3$: Falls es zwei Tripel (f_1, f_2, f_3) und (g_1, g_2, g_3) gibt, sodass $g_i = \pm f_i$ gilt, dann kann eines der beiden Tripel entfernt werden.

Dadurch erhält man eine reduzierte Liste von Tripeln abhängig von D. Aus dieser Liste schließt man alle Elemente von $\mathbb{Z}_k$ aus und verwendet nur jeweils ein Element der verbleibenden Tripel.

```
  LS={};          (*Suche der zueinander assoziierten Elemente aus der Liste*)
  LN={};
```

```
troots=rootp;    (∗Dazu wird jedes Element zu drei Normalformen assoziiert∗)
For[ee=1,ee<Length[ErgebnisListe],ee++,
 el=Flatten[ErgebnisListe[[ee]]];
 vv=el[[1]];
 ww=el[[2]];
 rootnr=el[[3]];
 pp=troots[[rootnr]]/.{v->vv,w->ww};
 xi=el[[4]];

 Anum=pp+xi+vv alpha+ww alphap;                       (∗β = u + vα + wα^(2)∗)
 num2=Simplify[Anum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];             (∗t wird durch∗)
 num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.       (∗α + α^(2) + α^(3) + 1,∗)
  alphapp->-1/(alpha+1)];                  (∗α^(2), α^(3) durch Terme in α ersetzt∗)
 num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
 X=Series[num4,{alpha,0,10}];        (∗Reihenentwicklung in Potenzen von α∗)
 If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,  (∗Division durch die niedrigste vorkommende∗)
  num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];     (∗Potenz in α∗)
 num6=Expand[num5];
 Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];    (∗Reihenentwicklung in Potenzen von α + 1∗)
 If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,  (∗Division durch die niedrigste vorkommende∗)
  num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha],b==bs]];   (∗Potenz in∗)
 Anum8=Expand[num7];                                                 (∗α + 1∗)

 Bnum=pp+xi+vv alphap+ww alphapp;                  (∗β = u + vα^(2) + wα^(3)∗)
 num2=Simplify[Bnum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];     (∗weitere Vorgangsweise
                                                                   wie oben∗)
 num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.
  alphapp->-1/(alpha+1)];
 num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
 X=Series[num4,{alpha,0,10}];
 If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,
  num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];
 num6=Expand[num5];
 Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];
 If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,
  num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha],b==bs]];
 Bnum8=Expand[num7];

 Cnum=pp+xi+vv alphapp+ww alpha;                       (∗β = u + vα^(3) + wα∗)
 num2=Simplify[Cnum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];     (∗weitere Vorgangsweise
                                                                   wie oben∗)
 num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.
  alphapp->-1/(alpha+1)];
 num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
 X=Series[num4,{alpha,0,10}];
 If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,
  num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];
 num6=Expand[num5];
```

```
Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];
If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,
 num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha],b==bs]];
Cnum8=Expand[num7];

A8Liste=Anum8;

Anum8=Expand[Anum8/.b->bs];   (*In den drei Normalformen wird ``b'' durch*)
Bnum8=Expand[Bnum8/.b->bs]; (*den tatsächlichen numerischen Wert ersetzt*)
Cnum8=Expand[Cnum8/.b->bs];

Switch[DD,
 1,            (*D = 1 : Multiplikation der Normalformen mit der Einheit b*)
  Dnum8=Expand[Simplify[Anum8 bs]];
  Enum8=Expand[Simplify[Bnum8 bs]];
  Fnum8=Expand[Simplify[Cnum8 bs]];

  If[Not[MemberQ[LS,Anum8]] && Not[MemberQ[LS,-Anum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Bnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Bnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Cnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Cnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Dnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Dnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Enum8]] && Not[MemberQ[LS,-Enum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Fnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Fnum8]],
   LS=Append[LS,Anum8];
   LN=Append[LN,A8Liste,el[[5]],el[[6]],el[[7]]];
  ],
 3,     (*D = 3 : Multiplikation der Normalformen mit den Einheiten b, 1 - b*)
  Dnum8=Expand[Simplify[Anum8(bs-1)]];
  Enum8=Expand[Simplify[Bnum8(bs-1)]];
  Fnum8=Expand[Simplify[Cnum8(bs-1)]];

  Gnum8=Expand[Simplify[Anum8 bs]];
  Hnum8=Expand[Simplify[Bnum8 bs]];
  Inum8=Expand[Simplify[Cnum8 bs]];

  If[Not[MemberQ[LS,Anum8]] && Not[MemberQ[LS,-Anum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Bnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Bnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Cnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Cnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Dnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Dnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Enum8]] && Not[MemberQ[LS,-Enum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Fnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Fnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Gnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Gnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Hnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Hnum8]] &&
   Not[MemberQ[LS,Inum8]] && Not[MemberQ[LS,-Inum8]],
       (*Überprüfung, ob der Wert bzw. sein Negatives oder seine Produkte*)
   LS=Append[LS,Anum8];          (*mit den Einheiten bereits in der Liste*)
   LN=Append[LN,A8Liste,el[[5]],el[[6]],el[[7]]];       (*vorkommen, wenn*)
  ],                  (*nicht, so wird er in die Ergebnisliste übernommen*)

 _,                                        (*alle anderen Diskriminanten*)
  If[Not[MemberQ[LS,Anum8]] && Not[MemberQ[LS,-Anum8]] &&
```

```
      Not[MemberQ[LS,Bnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Bnum8]] &&
      Not[MemberQ[LS,Cnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Cnum8]],
       LS=Append[LS,Anum8];
       LN=Append[LN,A8Liste,el[[5]],el[[6]],el[[7]]];
     ];
    ];
   Print[``***********************************************'']; 
   Print[``Results for t= '', t];
   Print[``***********************************************''];
   Print[LN];          (*Ausgabe der Liste mit allen Elementen kleiner Norm*)
```

A.2.5 Unentscheidbare Fälle

Die reduzierte Liste von Tripeln enthält nun natürlich auch jene Elemente, für die das Programm nicht entscheiden konnte, ob die Ungleichungen erfüllt sind oder nicht. Man muss nun jene Werte bzw. die dazugehörige (eventuell auch etwas vereinfachte) Ungleichung untersuchen. Dazu erzeugt man eine Tabelle von möglichen t-Werten und filtert jene heraus, für die $|t| \geq 6$ sowie die spezielle Ungleichung gilt. Mit dieser Methode ergibt sich dann für jede Ungleichung entweder keine, eine oder mehrere Lösungen t mit $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und $|t| \geq 6$.

Beispiel: $D = 1$ als Vertreter jener Diskriminanten, für die $D \not\equiv 3 \pmod 4$ gilt.

```
Simplify[(53 d2+10 d1 d2)^2+(139+d1(53+5 d1)-5 d2^2)^2<=(1+2 d1)^2
  +4 d2^2/.{d1->c1,d2->c2/Sqrt[1]}]              (*Umwandlung von t=d1+d2*b auf
                                            t=c1+c2*I in der Normungleichung*)

Y=Map[Point,Flatten[Table[{aa,bb Sqrt[1]},{aa,-10,10},{bb,-10,10}],1]];
                                          (*Tabelle von möglichen (c1,c2)-Werten*)

Y=Select[Y,#[[1,1]]^2+#[[1,2]]^2>=36&];     (*Jene (c1,c2), die |t| ≥ 6 erfüllen*)

Y=Select[Y,(53 c2+10 c1 c2)^2+(139+c1(53+5 c1)-5 c2^2)^2<=
  (1+2 c1)^2+4 c2^2/.c1->#[[1, 1]]/.c2->#[[1, 2]]&]          (*Jene (c1,c2), die
                           sowohl |t| ≥ 6 als auch die Normungleichung erfüllen*)

Z=Y/.Point[y_]->y               (*Umwandlung von Point[c1,c2] in eine Liste mit
                                                             Elementen {c1,c2}*)

zahl=Z/.{x_,y_}->x+Iy   (*Umwandlung von {c1,c2} in eine komplexe Zahl c1+c2I*)

betrag=Map[Abs,zahl]//N                                    (*Betrag von c1+c2I*)
```

Beispiel: $D = 3$ als Vertreter jener Diskriminanten, für die $D \equiv 3 \pmod 4$ gilt.

```
Simplify[45+ d1+4 d1^2+4 (-7+d1) d2+4 d2^2<= 0/.{d1->c1-c2/Sqrt[3],
  d2->2 c2/Sqrt[3]}]                 (*Umwandlung: t = d1 + d2 * b → t = c1 + c2 * I*)
                                                       in der Normungleichung*)

Y=Map[Point,Flatten[Table[{aa,bb Sqrt[1]},{aa,-10,10},{bb,-10,10}],1]];
                                          (*Tabelle von möglichen (c1,c2)-Werten*)

Y=Select[Y,#[[1,1]]^2+#[[1,2]]^2>=36&];     (*Jene (c1,c2), die |t| ≥ 6 erfüllen*)

Y=Select[Y,45+c1+4 c1^2+4 c2^2<=19 Sqrt[3] c2/.c1->#[[1,1]]/.c2->#[[1,2]]&]
       (*Jene (c1,c2), die sowohl |t| ≥ 6 als auch die Normungleichung erfüllen*)
```

```
Z=Y/.Point[y_]->y                    (*Umwandlung von Point[c1,c2] in eine Liste mit
                                                              Elementen {c1,c2}*)
zahl=Z/.{x_,y_}->x+Iy   (*Umwandlung von {c1,c2} in eine komplexe Zahl c1+c2I*)
betrag=Map[Abs,zahl]//N                                    (*Betrag von c1+c2I*)
```

Es werden nur jene Ergebnisse der Form $t = d1 + d2 * b$ genommen, deren Beträge größer oder gleich 6 sind.
Die restlichen Ungleichungen werden analog behandelt.

Bemerkung A.1 *Im Spezialfall $\Re t = -\frac{1}{2}$ werden nur jene Diskriminanten D betrachtet, für die $D \equiv 3 \pmod 4$ gilt. Hier müssen natürlich die Bedingungen an c_1 und c_2 modifiziert werden, da sowohl $\Re t = -\frac{1}{2}$ als auch $\Im t > 0$ erfüllt sein muss. Für $t = c_1 + c_2 b$ gilt dann $c_2 \geq 1$ und $c_1 = \frac{(-c_2-1)}{2}$.*

A.3 Berechnung der Elemente kleiner Norm mit beliebigem $\Re t$ und $|t| < 6$

Im Fall $|t| < 6$ betrachtet man nicht ein allgemeines $t = c_1 + c_2 b$, sondern berechnet sich für jede Diskriminante D jene speziellen t, für die $\Re t \leq -\frac{1}{2}$ und $|t| < 6$ gilt. Dazu sei $t = -d_1 + d_2 i\sqrt{D}$ für $D \not\equiv 3 \pmod 4$ und $t = -\frac{d_3}{2} + \frac{d_4 i\sqrt{D}}{2}$ für $D \equiv 3 \pmod 4$ mit $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall können d_1 und d_2 beliebig sein, im zweiten Fall muss $d_4 \equiv d_3(2)$ gelten, um zu gewährleisten, dass t in $\mathbb{Z}_k$ liegt. Deshalb gibt es auch im zweiten Fall zwei Programmdurchläufe, abhängig davon, ob d_3 gerade oder ungerade ist.

vwVolleListe := {0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, 5, −5, 6, −6, 7, −7, 8, −8, 9, −9, 10, −10, 11, −11, 12, −12, 13, −13, 14, −14, 15, −15, 16, −16, 17, −17, 18, −18, bs, −bs, 1+bs, 1−bs, −1+bs, −1−bs, 2+bs, 2−bs, −2+bs, −2−bs, −3+bs, 3−bs, −3−bs, 3+bs, −4+bs, 4−bs, 4+bs, −4−bs, −5+bs, 5−bs, 5+bs, −5−bs, −6+bs, 6−bs, 6+bs, −6−bs, −7+bs, 7−bs, 7+bs, −7−bs, −8+bs, 8−bs, 8+bs, −8−bs, −9+bs, 9−bs, 9+bs, −9−bs, −10+bs, 10−bs, 10+bs, −10−bs, −11+bs, 11−bs, 11+bs, −11−bs, −12+bs, 12−bs, 12+bs, −12−bs, −13+bs, 13−bs, 13+bs, −13−bs, −14+bs, 14−bs, 14+bs, −14−bs, −15+bs, 15−bs, 15+bs, −15−bs, −16+bs, 16−bs, 16+bs, −16−bs, −17+bs, 17−bs, 17+bs, −17−bs, −18+bs, 18−bs, 18+bs, −18−bs, −19+bs, 19−bs, 19+bs, −19−bs, −20+bs, 20−bs, 20+bs, −20−bs, −21+bs, 21−bs, 21+bs, −21−bs, −22+bs, 22−bs, 22+bs, −22−bs, −23+bs, 23−bs, −24+bs, 24−bs, 2bs, −2bs, 1+2bs, 1−2bs, −1+2bs, −1−2bs, 2+2bs, 2−2bs, −2+2bs, −2−2bs, −3+2bs, 3−2bs, −3−2bs, 3+2bs, −4+2bs, 4−2bs, 4+2bs, −4−2bs, −5+2bs, 5−2bs, 5+2bs, −5−2bs, −6+2bs, 6−2bs, 6+2bs, −6−2bs, −7+2bs, 7−2bs, 7+2bs, −7−2bs, −8+2bs, 8−2bs, 8+2bs, −8−2bs, −9+2bs, 9−2bs, 9+2bs, −9−2bs, −10+2bs, 10−2bs, 10+2bs, −10−2bs, −11+2bs, 11−2bs, 11+2bs, −11−2bs, −12+2bs, 12−2bs, 12+2bs, −12−2bs, −13+2bs, 13−2bs, 13+2bs, −13−2bs, −14+2bs, 14−2bs, 14+2bs, −14−2bs, −15+2bs, 15−2bs, 15+2bs, −15−2bs, −16+2bs, 16−2bs, 16+2bs, −16−2bs, −17+2bs, 17−2bs, 17+2bs, −17−2bs, −18+2bs, 18−2bs, 18+2bs, −18−2bs, −19+2bs, 19−2bs, 19+2bs, −19−2bs, −20+2bs, 20−2bs, 20+2bs, −20−2bs, −21+2bs, 21−2bs, 21+2bs, −21−2bs, −22+2bs, 22−2bs, 22+2bs, −22−2bs, −23+2bs, 23−2bs, −24+2bs, 24−2bs, 3bs, −3bs, 1+3bs, 1−3bs, −1+3bs, −1−3bs, 2+3bs, 2−3bs, −2+3bs, −2−3bs, −3+3bs, 3−3bs, −3−3bs, 3+3bs, −4+3bs, 4−3bs, 4+3bs, −4−3bs, −5+3bs, 5−3bs, 5+3bs, −5−3bs, −6+3bs, 6−3bs, 6+

```
3bs, -6-3bs, -7+3bs, 7-3bs, 7+3bs, -7-3bs, -8+3bs, 8-3bs, 8+3bs, -8-3bs, -9+
3bs, 9-3bs, 9+3bs, -9-3bs, -10+3bs, 10-3bs, 10+3bs, -10-3bs, -11+3bs, 11-3bs, 11+
3bs, -11-3bs, -12+3bs, 12-3bs, 12+3bs, -12-3bs, -13+3bs, 13-3bs, 13+3bs, -13-
3bs, -14+3bs, 14-3bs, 14+3bs, -14-3bs, -15+3bs, 15-3bs, 15+3bs, -15-3bs, -16+
3bs, 16-3bs, 16+3bs, -16-3bs, -17+3bs, 17-3bs, 17+3bs, -17-3bs, -18+3bs, 18-
3bs, 18+3bs, -18-3bs, -19+3bs, 19-3bs, 19+3bs, -19-3bs, -20+3bs, 20-3bs, 20+
3bs, -20-3bs, -21+3bs, 21-3bs, 21+3bs, -21-3bs, -22+3bs, 22-3bs, 22+3bs, -22-
3bs, -23+3bs, 23-3bs, -24+3bs, 24-3bs, 4bs, -4bs, 1+4bs, 1-4bs, -1+4bs, -1-4bs, 2+
4bs, 2-4bs, -2+4bs, -2-4bs, -3+4bs, 3-4bs, -3-4bs, 3+4bs, -4+4bs, 4-4bs, 4+
4bs, -4-4bs, -5+4bs, 5-4bs, 5+4bs, -5-4bs, -6+4bs, 6-4bs, 6+4bs, -6-4bs, -7+
4bs, 7-4bs, 7+4bs, -7-4bs, -8+4bs, 8-4bs, 8+4bs, -8-4bs, -9+4bs, 9-4bs, 9+4bs, -9-
4bs, -10+4bs, 10-4bs, 10+4bs, -10-4bs, -11+4bs, 11-4bs, 11+4bs, -11-4bs, -12+
4bs, 12-4bs, 12+4bs, -12-4bs, -13+4bs, 13-4bs, 13+4bs, -13-4bs, -14+4bs, 14-
4bs, 14+4bs, -14-4bs, -15+4bs, 15-4bs, 15+4bs, -15-4bs, -16+4bs, 16-4bs, 16+
4bs, -16-4bs, -17+4bs, 17-4bs, 17+4bs, -17-4bs, -18+4bs, 18-4bs, 18+4bs, -18-
4bs, -19+4bs, 19-4bs, 19+4bs, -19-4bs, -20+4bs, 20-4bs, 20+4bs, -20-4bs, -21+
4bs, 21-4bs, 21+4bs, -21-4bs, -22+4bs, 22-4bs, 22+4bs, -22-4bs, -23+4bs, 23-
4bs, -24+4bs, 24-4bs, 5bs, -5bs, 1+5bs, 1-5bs, -1+5bs, -1-5bs, 2+5bs, 2-5bs, -2+
5bs, -2-5bs, -3+5bs, 3-5bs, -3-5bs, 3+5bs, -4+5bs, 4-5bs, 4+5bs, -4-5bs, -5+
5bs, 5-5bs, 5+5bs, -5-5bs, -6+5bs, 6-5bs, 6+5bs, -6-5bs, -7+5bs, 7-5bs, 7+5bs, -7-
5bs, -8+5bs, 8-5bs, 8+5bs, -8-5bs, -9+5bs, 9-5bs, 9+5bs, -9-5bs, -10+5bs, 10-
5bs, 10+5bs, -10-5bs, -11+5bs, 11-5bs, 11+5bs, -11-5bs, -12+5bs, 12-5bs, 12+
5bs, -12-5bs, -13+5bs, 13-5bs, 13+5bs, -13-5bs, -14+5bs, 14-5bs, 14+5bs, -14-
5bs, -15+5bs, 15-5bs, 15+5bs, -15-5bs, -16+5bs, 16-5bs, 16+5bs, -16-5bs, -17+
5bs, 17-5bs, 17+5bs, -17-5bs, -18+5bs, 18-5bs, 18+5bs, -18-5bs, -19+5bs, 19-
5bs, 19+5bs, -19-5bs, -20+5bs, 20-5bs, 20+5bs, -20-5bs, -21+5bs, 21-5bs, 21+
5bs, -21-5bs, -22+5bs, 22-5bs, 22+5bs, -22-5bs, -23+5bs, 23-5bs, -24+5bs, 24-
5bs, 6bs, -6bs, 1+6bs, 1-6bs, -1+6bs, -1-6bs, 2+6bs, 2-6bs, -2+6bs, -2-6bs, -3+
6bs, 3-6bs, -3-6bs, 3+6bs, -4+6bs, 4-6bs, 4+6bs, -4-6bs, -5+6bs, 5-6bs, 5+6bs, -5-
6bs, -6+6bs, 6-6bs, 6+6bs, -6-6bs, -7+6bs, 7-6bs, 7+6bs, -7-6bs, -8+6bs, 8-6bs, 8+
6bs, -8-6bs, -9+6bs, 9-6bs, 9+6bs, -9-6bs, -10+6bs, 10-6bs, 10+6bs, -10-6bs}
(*Liste von Elementen aus Z_k, aus denen dann die v, w und ξ bestimmt werden*)
```

```
DiscrList = {1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,31,35,39,43,47,51,55,59,
 67,71,79,83,87,91,95,103,107,111,115,119,123,127,131,139};
                                         (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

cq = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}                       (*Liste, die bei der Konstruktion
                                              der verschiedenen t-Werte benötigt wird*)

For[Discr=1,Discr≤Length[DiscrList],Discr++,
  DD=DiscrList[[Discr]];
  If[Mod[DD,4]== 3,EQ=True,EQ=False];          (*Unterschiedliche Betrachtung,*)
  WD=Sqrt[DD];                            (*je nachdem, ob D ≡ 3(4) oder D ≢ 3(4)*)
  If[EQ,bs:=(1+WD I)/2;,bs:=WD I;];                 (*D ≡ 3(4) : b = (1 + i√D)/2,
                                                              D ≢ 3(4) : b = i√D*)
  If[EQ,{                                         (*D ≡ 3(4) : t = −c/2 + di√D/2.*)
   For[cc=1,cc<=Length[cq],cc++,           (*Damit t aus Z_k ist, müssen gewisse*)
```

```
For[dd=1,dd<=Length[cq],dd++,                    (*Bedingungen erfüllt sein:*)
 If[EvenQ[cq[[cc]]],   (*Ist c gerade, dann muss auch d gerade sein, ist*)
  If[EvenQ[cq[[dd]]], {                        (*c ungerade, dann auch d.*)
   tt=-cq[[cc]]/2+cq[[dd]]WD/2I;
   If[Abs[tt]<6 && tt!=-1/2+3Sqrt[3]/2I,{                   (*Bedingungen:*)
    t=tt;                                 (*|t| < 6 und t ≠ -1/2 + 3i√3/2*)*)
```

Dadurch, dass t bekannt ist, ist es möglich, die exakten Nullstellen $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ des Polynoms $f_t(x) = x^3 - (t-1)x^2 - (t+2)x - 1$ zu berechnen. Der Wert α sei dabei jene Nullstelle mit dem größten Absolutbetrag, $\alpha^{(2)} = -1 - \frac{1}{\alpha^{(1)}}, \alpha^{(3)} = -\frac{1}{\alpha^{(1)}+1}$.

```
Lsg=Map[Simplify,Solve[x^3-(t-1)x^2-(t+2)x-1==0,x]]//N;
                                  (*Lösung der Gleichung für jedes t*)
ab=Map[Abs,x/.Lsg]//N;
For[z=1,z<=Length[ab],z++,
 If[ab[[z]]==Max[ab],{alpha1=x/.Lsg[[z]]//N,
                     (*α:betragsgrößte Nullstelle, α^(2) = -1 - 1/α*)
  alpha2=-1-1/alpha1,alpha3=-1/(alpha1+1)}]];      (*α^(3) = -1/(α + 1)*)
```

Nun berechnet das Programm die Schranken für $|v|, |w|$ nach der Formel (A.1) und abschließend die Schranke für u. Dazu sei $M := \max|r_i - p_i|$, dann ist $\hat{R} = \sqrt[3]{|2t+1|} + M$ und $|u - p_i| < \hat{R}$.

```
deltam=1(Abs[alpha1-alpha2]Abs[alpha2-alpha3])+
 +1/(Abs[alpha1-alpha3]Abs[alpha2-alpha3])+    (*Berechnung von Δ/|m|*)
 +1/(Abs[alpha1-alpha2]Abs[alpha1-alpha3]);
c=Abs[alpha1-1-alpha3];                          (*Berechnung von C(α)*)
betragv=2^(1/3)Abs[t]^(1/3)c^(2/3) deltam; (*|v|,|w| ≤ (2|t|)^(1/3) C(α)^(2/3) Δ/|m|*)
vListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<betragv&];
                     (*Auswahl aller v,w, die die Schranke erfüllen*)
M=Max[Abs[alpha1-t+alpha2+1],Abs[alpha2+1+alpha3],
 Abs[alpha3+alpha1-t]];                    (*|r_i - p_i| ≤ M max(|v|,|w|)*)
vlist=Rest[vListe];
betragxi=Max[(Abs[2t+1])^(1/3)+M Map[Abs, vlist]];
                                                    (*Berechnung von R̂*)
rootp={-vt+w,v,-wt};                                       (*p1,p2,p3*)
ErgebnisListe={};
Print[``*******************************************''];
Print[``*******************************************''];
Print[`` t='', t];
Print[``*******************************************''];
Print[``*******************************************''];
wListe=vListe;
xiListe=Select[Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<betragxi &],
 PlusMinus[#] &];         (*Auswahl aller ξ, die die Schranke erfüllen*)
Print[``v-list='',vListe];
Print[``w-list='',wListe];
Print[``xi-list='',xiListe];
Print[``*******************************************''];
```

Nun kann man wieder für alle u, v und w den Wert $\beta = u + v\alpha + w\alpha^{(2)}$ und die Norm $N(\beta)$ berechnen. Das Programm testet, ob die Normungleichung (A.3) erfüllt ist. In diesem Fall kann jedoch im Gegensatz zum Fall $|t| \geq 6$ das Programm immer entscheiden, ob die Ungleichung (A.3) erfüllt ist oder nicht, da man die konkreten Werte für $\alpha, \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$ kennt.

```
For[l1=1,l1<=Length[vListe],l1++,
 Print[‘‘Progress: Step ’’,l1,‘‘ of ’’,Length[vListe],
  ‘‘.’’];
 For[l2=1,l2<=Length[wListe],l2++,
  For[j=1,j<=3,j++,
   For[i=1,i<=Length[xiListe],i++,
    NN2a:=NN/.u->rootp[[j]]+xiListe[[i]];      (*Berechnung der Norm*)
    NN2:=NN2a/.{v->vListe[[l1]],w->wListe[[l2]]};
    Repart:=ComplexExpand[Re[NN2]];           (*Aufspaltung der Norm*)
    Impart:=ComplexExpand[Im[NN2]];      (*in Real- und Imaginärteil*)
    C3:=FullSimplify[Repart^2+Impart^2<=Abs[2t+1]^2];
                               (*Test, ob |Norm|≤ |2t+1| erfüllt ist*)
    If[(C3!=False)||(Length[C3]>0),
     Enthalten=Flatten[Position[ErgebnisListe,{vListe[[l1]],
      wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3}]];
     If[Enthalten=={},
      ErgebnisListe=Append[ErgebnisListe,{{vListe[[l1]],
       wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3},
       {{DD }}}],
      ErgebnisListe=ReplacePart[ErgebnisListe,{{vListe[[l1]],
       wListe[[l2]],j,xiListe[[i]],Repart,Impart,C3},
       Append[ErgebnisListe[[Enthalten[[1]],2]],{DD}]},
       Enthalten[[1]]]                        (*In eine Liste werden*)
     ]                              jene Elemente hineingeschrieben,*)
    ]                             (*für die die Ungleichung erfüllt ist.*)
   ]                        (*Die Liste enthält die zugehörigen v,w,ξ,*)
  ]                                  (*den Real- und den Imaginärteil.*)
 ]
];
```

Jene β, die die Normungleichung (A.3) erfüllen, werden mit dem Algorithmus aus Abschnitt A.2.4 in Tripel von Normalformen umgewandelt und auf gegenseitige Assoziiertheit überprüft. Auch hier ergibt sich eine Liste von Werten.

```
LS={};    (*Suche der zueinander assoziierten Elemente aus der Liste*)
LN={};
troots=rootp; (*Dazu wird jedes Element zu 3 Normalformen assoziiert*)
For[ee=1,ee<Length[ErgebnisListe],ee++,
 el=Flatten[ErgebnisListe[[ee]]];
 vv=el[[1]];
 ww=el[[2]];
 rootnr=el[[3]];
```

```
pp=troots[[rootnr]]/.{v->vv,w->ww};
xi=el[[4]];

Anum=pp+xi+vv alpha+ww alphap;                        (*β = u + vα + wα^(2)*)
num2=Simplify[Anum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];
                                    (*t wird durch α + α^(2) + α^(3) + 1 ersetzt*)
num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.
 alphapp->-1/(alpha+1)];  (*α^(2), α^(3) werden durch Terme in α ersetzt*)
num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
X=Series[num4,{alpha,0,10}];  (*Reihenentwicklung in Potenzen von α*)
If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,        (*Division durch die niedrigste*)
 num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];
num6=Expand[num5];                            (*vorkommende Potenz in α*)
Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];            (*Reihe in Potenzen von α + 1*)
If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,        (*Division durch die niedrigste*)
 num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha],b==bs]];
Anum8=Expand[num7];                       (*vorkommende Potenz in α + 1*)

Bnum=pp+xi+vv alphap+ww alphapp;                 (*β = u + vα^(2) + wα^(3)*)
num2=Simplify[Bnum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];              (*weitere*)
num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.  (*Vorgangsweise wie*)
 alphapp->-1/(alpha+1)];                                        (*oben*)
num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
X=Series[num4,{alpha,0,10}];
If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,
 num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];
num6=Expand[num5];
Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];
If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,
 num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha], b==bs]];
Bnum8=Expand[num7];

Cnum=pp+xi+vv alphapp+ww alpha;                       (*β = u + vα^(3) + wα*)
num2=Simplify[Cnum/.t->alpha+alphap+alphapp+1];              (*weitere*)
num3=Simplify[num2/.alphap->-(alpha+1)/alpha/.  (*Vorgangsweise wie*)
 alphapp->-1/(alpha+1)];                                        (*oben*)
num4=Simplify[num3 alpha(alpha+1)];
X=Series[num4,{alpha,0,10}];
If[FreeQ[X,alpha],num5=num4,
 num5=Simplify[Expand[num4/alpha^X[[4]],alpha],b==bs]];
num6=Expand[num5];
Y=Series[num4,{alpha,-1,10}];
If[FreeQ[Y,alpha],num7=num6,
 num7=Simplify[Expand[num6/(alpha+1)^Y[[4]],alpha], b==bs]];
Cnum8=Expand[num7];

A8Liste=Anum8;

Anum8=Expand[Anum8/.b->bs];   (*In den drei Normalformen wird ``b''*)
Bnum8=Expand[Bnum8/.b->bs];  (*durch den tatsächlichen numerischent*)
```

```
Cnum8=Expand[Cnum8/.b->bs];                         (*Wert ersetzt*)
Switch[DD,          (*D = 3 :Multiplikation der Normalformen mit den*)
 3,                                                (*Einheiten b,1 - b*)
  Dnum8=Expand[Simplify[Anum8(bs-1)]];
  Enum8=Expand[Simplify[Bnum8(bs-1)]];
  Fnum8=Expand[Simplify[Cnum8(bs-1)]];

  Gnum8=Expand[Simplify[Anum8 bs]];
  Hnum8=Expand[Simplify[Bnum8 bs]];
  Inum8=Expand[Simplify[Cnum8 bs]];

  If[Not[MemberQ[LS,Anum8]] && Not[MemberQ[LS,-Anum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Bnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Bnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Cnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Cnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Dnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Dnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Enum8]] && Not[MemberQ[LS,-Enum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Fnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Fnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Gnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Gnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Hnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Hnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Inum8]] && Not[MemberQ[LS,-Inum8]],
          (*Überprüfung, ob der Wert bzw. sein Negatives oder seine*)
   LS=Append[LS,Anum8];      (*Produkte mit den Einheiten bereits in
                                                der Liste vorkommen*)
   LN=Append[LN,A8Liste,el[[5]],el[[6]],el[[7]]];
  ],       (*wenn nicht, so wird er in die Ergebnisliste übernommen*)
 _,                                     (*alle anderen Diskriminanten*)
  If[Not[MemberQ[LS,Anum8]] && Not[MemberQ[LS,-Anum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Bnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Bnum8]]
   && Not[MemberQ[LS,Cnum8]] && Not[MemberQ[LS,-Cnum8]],
              (*Überprüfung, ob der Wert bzw. sein Negatives in der*)
   LS=Append[LS,Anum8];                 (*Liste vorkommt, wenn nicht,*)
   LN=Append[LN,A8Liste,el[[5]],el[[6]],el[[7]]];
  ];                  (*dann wird er in die Ergebnisliste übernommen*)
 ];
Print[``*******************************************'''];
Print[``Results for t= '', t];
Print[``*******************************************'''];
Print[LN];    (*Ausgabe der Liste mit allen Elementen kleiner Norm*)
```

Diese Werte werden dann zusätzlich daraufhin überprüft, ob es verschiedene Normalformen gibt, die eine betragsmäßig gleich große Norm besitzen, aber nicht zueinander assoziiert sind. Zu diesem Zweck werden jene Elemente, deren Normen sich nur um Faktoren, die Einheiten sind, von einander unterscheiden, in eine Liste geschrieben und durch den folgenden Algorithmus weiter untersucht:

For $k < j$ do

Ersetze α im j-ten Element durch die exakte Nullstelle $\alpha^{(1)} \rightarrow x_1$.

Ersetze α im k-ten Element durch die exakte Nullstelle $\alpha^{(1)} \rightarrow x_{21}$.

Ersetze α im k-ten Element durch die exakte Nullstelle $\alpha^{(2)} \rightarrow x_{22}$.

Ersetze α im k-ten Element durch die exakte Nullstelle $\alpha^{(3)} \rightarrow x_{23}$.
Berechne $r_l = \frac{x_1}{x_{1l}}$, $l = 1, 2, 3$ und für eine gewisse Anzahl von i, j_1, j_2:
$s_l = |r_l - \zeta^i(\alpha^{(1)})^{j_1}(\alpha^{(1)} + 1)^{j_2}|$, wobei ζ für $D = 1$ von b^0 bis b^3, für $D = 3$ von b^0 bis b^5 geht und für $D \neq 1, 3$ ± 1 ist. Ist $s_l = 0$, dann sind die beiden Elemente zueinander assoziiert, und das j-te Element kann aus der Liste entfernt werden.
end for
Durch diese Überprüfung ergibt sich eine Liste, die gegenüber der ursprünglichen Liste stark verkürzt ist.

```
NV[x_,y_]:=x+yI;                        (*Umwandlung eines Paares (x,y)*)
L2={};                                   (*in eine komplexe Zahl x+iy*)
For[i=1,i<=Length[LN],i++,L2=Append[L2,{NV[LN[[i,2]],
 LN[[i,3]]]}]];
L2=Flatten[L2];                         (*Anwendung der obigen Funktion*)
L3=Union[L2];                      (*auf die Normen in der Ergebnisliste*)
L4={};
L5={};
For[ii=1,ii<=Length[L3],ii++,
 If[DD==3,       (*Zusammenfassung jener Elemente mit gleicher Norm*)
  L4=Select[LN,NV[#[[2]],#[[3]]]==L3[[ii]]                 (*bis auf*)
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==-L3[[ii]]         (*Multiplikation mit den*)
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==bsL3[[ii]]    (*Einheiten abhängig von der*)
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==-bsL3[[ii]]               (*Diskriminante*)
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==(1-bs)L3[[ii]]
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==-(1-bs)L3[[ii]] &];,
  L4=Select[LN,NV[#[[2]],#[[3]]]==L3[[ii]]
   || NV[#[[2]],#[[3]]]==-L3[[ii]] &];
 ]
 For[k=1,k<=Length[L4],k++,       (*Untersuchung, ob diese Elemente*)
  For[j=k+1,j<=Length[L4],j++,         (*zueinander assoziiert sind*)
   x1=Simplify[L4[[j,1]]/.{alpha->alpha1}];
                                     (*Zwei Elemente werden untersucht:*)
   x21=Simplify[L4[[k,1]]/.{alpha->alpha1}];    (*Kann der Quotient*)
   x22=Simplify[L4[[k,1]]/.{alpha->alpha2}];      (*der beiden oder*)
   x23=Simplify[L4[[k,1]]/.{alpha->alpha3}];        (*eine der dazu*)
   r1=Simplify[x1/x21];                      (*Konjugierten in der Form*)
   r2=Simplify[x1/x22];          (*Einheitswurzel·α^j1 · (α+1)^j2*)
   r3=Simplify[x1/x23];             (*geschrieben werden, so sind die*)
   l=8;                      (*beiden Elemente zueinander assoziiert*)
   For[i=0,i<6,i++,
    For[j1=-l,j1<l,j1++,
     For[j2=-l,j2<l,j2++,
      If[DD==3,ew=bs,ew=-1];
      s1=Abs[r1-(ew)^i alpha1^(j1)(alpha1+1)^(j2)//N];
      If[s1<0.00001,
       If[NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]]
        || NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==-NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]],
```

```
                  L4=ReplacePart[L4,L4[[k]],j];,L4=ReplacePart[L4,L4[[j]],k];
                 ]    (*Sind zwei Elemente assoziiert, so wird jenes Element,*)
                ];     (*dessen Norm nicht gleich (bis auf das Vorzeichen) der
                           Norm des ersten Elements der Liste ist, verworfen*)
                s2=Abs[r2-(ew)^i alpha1^(j1)(alpha1+1)^(j2)//N];
                If[s2<0.00001,
                 If[NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]]
                  || NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==-NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]],
                  L4=ReplacePart[L4,L4[[k]],j];,L4=ReplacePart[L4,L4[[j]],k];
                 ]
                ];
                s3=Abs[r3-(ew)^i alpha1^(j1)(alpha1+1)^(j2)//N];
                If[s3<0.00001,
                 If[NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]]
                  || NV[L4[[k,2]],L4[[k,3]]]==-NV[L4[[1,2]],L4[[1,3]]],
                  L4=ReplacePart[L4,L4[[k]],j];,L4=ReplacePart[L4,L4[[j]],k];
                 ]
                ];
               ]
              ]
              ]
            ]
           ];
           L4=Union[L4];
           L5=Union[Join[L5, L4]];
          ];
          L5=Union[L5];
          Print[``*******************************************''];
          Print[``Final Result for t= '', t];
          Print[``*******************************************''];
          Print[L5];                         (*Endergebnis enthält nur mehr die*)
         }                    (*Elemente, die nicht zueinander assoziiert sind*)
        ]
        }
       ],
```

Nun würde die Abfrage nach ungeraden d_3 und d_4 erfolgen. Das zugehörige Programm ist das gleiche wie vorher und wird daher an dieser Stelle nicht noch einmal dargestellt.
Dann werden noch jene Fälle mit $D \not\equiv 3 \bmod 4$ behandelt. Hier werden die unterschiedlichen t wie folgt konstruiert:

```
{For[cc=1,cc<=Length[cq],cc++,                                    (*D ≢ 3 mod 4*)
 For[dd=1,dd<=Length[cq],dd++,{
  tt=-cq[[cc]]+cq[[dd]]Sqrt[DD]I;
```

Das Programm ist hier ebenfalls analog zum obigen, allerdings muss man für $D = 1$ zusätzlich noch jene Werte betrachten, die durch Multiplikation mit der Einheit $b = i$ entstanden sind.

A.4 Programme zur Berechnung der Lösungen der Thue-Gleichung

Um die Lösungen der Thue-Gleichung

$$F_t(x,y) = x^3 - (t-1)x^2y - (t+2)xy^2 - y^3 = \ell \tag{A.4}$$

zu berechnen, betrachtet man die Fälle $|t| \geq 6$ und $|t| < 6$ getrennt voneinander. In Abschnitt A.4.1 wird eine untere Schranke für Λ_j berechnet, mit der man die Anzahl jener (x,y) einschränken kann, die mögliche Lösungen der Thue-Gleichung (1.1) sind. Dann betrachtet man alle möglichen Lösungspaare (x,y), abhängig davon, ob $\Lambda_j \neq 0$ oder $\Lambda_j = 0$ gilt. In Abschnitt A.4.2 werden dann zuerst die Fälle mit $\Lambda_j = 0$ behandelt. Danach werden jene Fälle mit $\Lambda_j \neq 0$ betrachtet. In Abschnitt A.4.3 berechnet man die Lösungen der Thue-Gleichung mit betragsmäßig kleinem y, in Abschnitt A.4.4 jene Lösungen, für die $x = 0, x = -y$ oder $x = ty$ gilt und in Abschnitt A.4.5 die Lösungen, für die $\gamma = x - \alpha y$ zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist.

A.4.1 Berechnung einer unteren Schranke für Λ_j

Zuerst werden für große y Schranken für den Wert

$$\Lambda_j = C_j \log|\alpha| + \log|\delta_j| \tag{A.5}$$

berechnet, wobei δ_j den Quotienten von zwei zyklisch aufeinander folgenden Elementen in einem Tripel der Elemente mit kleiner Norm bezeichnet. Für $|t| \geq 6$ wurde eine allgemein gültige obere Schranke in Abschnitt 3.2 bis Abschnitt 3.3 ermittelt, für $|t| < 6$ wird die obere Schranke wie im Fall $|t| \geq 6$ berechnet, allerdings ist sie in diesem Fall nicht allgemein gültig, sondern wird für jeden Wert t extra berechnet. Dazu ermittelt das Programm zuerst für jedes t die Nullstelle α des Polynoms $f_t = x^3 - (t-1)x^2 - (t+2)x - 1$. Dann setzt man t in die Ungleichung

$$\left|\frac{\gamma^{(j)}}{y}\right| \leq \left(\frac{(3\sqrt{3})^2|\ell|^4}{|t^2+t+7|^2}\right)^{1/6} \frac{1}{|y|^2} \tag{A.6}$$

ein. Diese obere Schranke wird dann mittels "Bootstrapping", wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, verbessert, wodurch man dann eine obere Schranke für $|\Lambda_j|$ erhält. Nun berechnet man eine untere Schranke für $|\Lambda_j|$, indem man für jedes Tripel $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)}, \beta^{(j+2)})$ von Elementen mit kleiner Norm die Quotienten $\frac{\beta^{(j)}}{\beta^{(j+1)}}, \frac{\beta^{(j+1)}}{\beta^{(j+2)}}, \frac{\beta^{(j+2)}}{\beta^{(j)}}$ bildet und diese dann in die Darstellung (A.5) von Λ_j einsetzt. Im Fall $|t| \geq 6$ wird dann für den Betrag von α, je nachdem, ob die Schranke für alle t mit $|t| \geq 6$ einer Diskriminante oder für Einzelwerte t mit beliebigem Betrag gelten soll, die Entwicklung von α in Potenzen von t oder die exakte Nullstelle α verwendet.

$|t| \geq 6$

Will man eine Schranke für Λ_j berechnen, die für alle t einer Diskriminante gültig ist, so verwendet man die Entwicklung von α in Potenzen von t.

Beispiel: $D = 3$ und $\delta_j = \frac{b}{1+b}\frac{2b}{(2b-1)\alpha-1+b}$:

```
alpha:=t+2/t-1/t^2-3/t^3+4.6/t^3.5                    (*Entwicklung von α*)
```

```
b:=1/2+Sqrt[3]/2I                                        (*D ≡ 3(4) : b = 1/2 + i√D/2*)
Expand[(2be-1)alpha-1+be]                   (*Einsetzen der Entwicklung von α in
                                                                 den Nenner von δ_j*)
n1:=t(Abs[2b-1]-(Abs[(b-1)/t]+Abs[(4b-2)/t^2]+Abs[(1-2b)/t^3]+
  Abs[(3-6b)/t^4]+Abs[(9.2b-4.6)/t^4.5]))/.t->6      (*Ordnung der Entwicklung
              des Nenners nach Potenzen von t und Bildung des Betrages mithilfe
                      der Dreiecksungleichung |Nenner|≥|führender Term|-|Rest|*)
Expand[(0)alpha+2be]  (*Einsetzen der Entwicklung von α in den Zähler von δ_j*)
n2:=t(Abs[(2b)/t])/.t->6  (*Ordnung der Entwicklung des Zählers nach Potenzen
              von t und Bildung des Betrages mithilfe der Dreiecksungleichung
                                      |Zähler|≤|führender Term|-|Rest|*)
q=n2/n1                                                        (*Zähler/Nenner*)
f:=q/(1-q)                                 (*| log |1 + q|| ≤ q/(1 − q) für |q| ≤ 1*)
L6=f t/.t->6
Zahl=Abs[b]/Abs[1+b]
For[c=-5,c<5,c++,{d=Abs[c Log[Abs[alpha]]+Log[Zahl]+f] /.t->6,
  Print[''C_j='',c],Print[''Lambda_j>='',d]}]   (*|Λ_j| = |C log |α| + log Zahl+f|*)
```

Will man eine Schranke für Λ_j berechnen, die nur für ein spezielles t einer Diskriminante gilt, so löst man die Thue-Gleichung und erhält so den exakten Wert für alpha.

Beispiel: $D = 3, t = -\frac{1}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}$ und $\delta_j = \frac{1}{2b}\frac{3-2b}{2b\alpha+1}$:

```
b:=1/2+Sqrt[3]/2I                                        (*D ≡ 3(4) : b = 1/2 + i√D/2*)
t:=-1/2+7Sqrt[3]/2I
Lsg=Map[Simplify,Solve[x^3-(t-1)x^2-(t+2)x-1==0,x]]//N;
ab=x/.Lsg //N;
For[z=1,z<=Length[ab],z++,
  If[Re[ab[[z]]] == -1/2,{alpha=x/.Lsg[[z]]//N}]]  (*α: Nullstelle, ℜα = −1/2*)
n1:=(2b)alpha+1                                                        (*Nenner*)
n2:=3-2b                                                               (*Zähler*)
q:=n2/n1                                                        (*Zähler/Nenner*)
f=Abs[1+q]                                                             (*|1 + q|*)
Zahl=Abs[1]/Abs[2b]
For[c=-5,c<5,c++,{d=Abs[c Log[Abs[alpha]]+Log[Zahl]+Log[f]]/.t->6,
  Print[''C_j='',c],Print[''Lambda_j>='',d]}]
                                         (*|Λ_j| = |C log |α| + log Zahl+ log f|*)
```

Für die untere Schranke nimmt man jeweils den minimalen Wert der Tabelle.

$|t| < 6$

Für alle $|t| < 6$ wird im Programm analog zu oben für jedes einzelne t eine obere bzw. eine untere Schranke berechnet und außerdem noch überprüft, ob die untere Schranke größer als die obere Schranke ist, in dem Fall wird dann "Widerspruch" ausgegeben. Zusätzlich gibt das Programm jene Fälle aus, für die sich kein Widerspruch ergeben hat. Das sind die Fälle, für die $\Lambda_j = 0$ gilt, diese werden extra betrachtet.

Beispiel: $\beta^{(j+1)} = \alpha - 1$

```
alpha=.;alphap=.;alphapp=.;                                    (*α, α^(2), α^(3)*)

a=.;t=.;c=.;d=.;WD=.;DD=.;
Assume:=Element[{WD},Reals]

DiscrList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71,79,83,87,91,95,103,
  107,111,115,119,123,127,131}; (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

cq={1,3,5,7};        (*Liste, die zum Aufbau jener t mit |t| < 6 benötigt wird*)

PList={};          (*Liste mit jenen t, für die sich kein Widerspruch ergibt*)
For[Discr=1,Discr<=Length[DiscrList],Discr++,
  DD = DiscrList[[Discr]];
  Print[``D ='',DD];
  WD=Sqrt[DD];
  bs:=(1+WD I)/2;
   For[dd=1,dd<=Length[cq],dd++,
    {
    tt=-1/2+cq[[dd]] Sqrt[DD]/2I;
    If[Abs[tt]<6&&tt!=-1/2+3ISqrt[3]/2,
     {                              (*Auswahl jener t mit ℜt = -1/2 und |t| < 6*)
     t=tt;
     Lsg=Map[Simplify,Solve[x^3-(t-1)x^2-(t+2)x-1==0,x]]//N;
     ab=x/.Lsg //N;                          (*Lösung der Gleichung für jedes t*)
     For[z=1,z<=Length[ab],z++,
      If[Re[ab[[z]]] == -1/2,{alpha1=x/.Lsg[[z]]//N,
                                (*α:Nullstelle mit ℜ = -1/2, α^(2) = -1 - 1/α*)
       alpha2=-1-1/alpha1,alpha3=-1/(alpha1+1)}]];        (*α^(3) = -1/(α + 1)*)
      gammay=((3Sqrt[3])^2Abs[2t+1]^4/Abs[t^2+t+7]^2)^(1/6)/y^2;
                                                      (*Schranke für γ^(j)/y*)
      mlist={Abs[alpha1-alpha2],Abs[alpha1-alpha3],Abs[alpha2-alpha3]};
                                                                (*|α_i - α_j|*)
      minlist=mlist[[Ordering[mlist,3]]];          (*Ordnung nach der Größe,*)
      min1=minlist[[1]];                                  (*min1: kleinster,*)
      min2=minlist[[2]];                         (*min2: zweitkleinster Betrag*)
      xay1=(min1-gammay);                                (*xay1: min1-γ^(j)/y,*)
      xay2=(min2-gammay);                                 (*xay2: min2-γ^(j)/y*)
      xya=Abs[2t+1]/(xay1 xay2);                   (*Verbesserung der Schranke:
                                            |x/y - α^(j)| ≤ |N|/(|xay1||xay2|*)
      xyaaiaj=xya/min1;                       (*xyaaiaj: Schranke wird durch den
                                                 minimalen Betrag min1 dividiert*)
      r=xyaaiaj/(1-xyaaiaj/y^3);           (*|R_l| ≤ |xyaaiaj|/(1-|xyaaiaj|/y^3)*)
      lambdaoben=2r/y^3/.y->6;                  (*obere Schranke für Lambda,*)
      Print[``t='',t];                            (*für jedes t extra berechnet*)
```

```
      Print[‘‘obere Schranke fuer lambda=’’, lambdaoben];
      If[Abs[alpha1-1]==Abs[2alpha1+1],          (*1.Tripel: Überprüfung,*)
       {Print[‘‘|logdeltaj|=1’’];              (*ob der Quotient |δ_j| = 1 ist*)
       Print[‘‘Widerspruch’’];
       Print[‘‘**********’’];}
       {
       logdeltaj=Log[1/2]+Log[Abs[1-3/(2alpha1+1)]];                  (*|δ_j|*)
       Print[‘‘logdeltaj=’’,logdeltaj];
       clist1=Table[c Log[Abs[alpha1]]+logdeltaj,{c, -10, 11}];
       clist=Map[Abs,clist1];           (*Liste für |Λ_j| = |C_j log|α| + log|δ_j|*)
       lambdaunten=Min[clist];    (*Berechnung des minimalen Wertes von |Λ_j|*)
       ge=Ordering[clist,1];
       g=clist1[[ge[[1]]]];                               (*->untere Schranke,*)
       cj=(g-logdeltaj)/Log[Abs[alpha1]];                   (*dazugehörendes C_j*)
       Print[‘‘Minimum fuer cj=’’, cj];
       Print[‘‘untere Schranke fuer lambda=’’,lambdaunten];
                                      (*Ist die untere Schranke für |Λ_j| größer*)
       If[lambdaunten>lambdaoben,Print[‘‘Widerspruch’’];,
        PList=Append[PList, t];]                 (*als die obere, so ergibt*)
        Print[‘‘**********’’];                     (*sich ein Widerspruch,*)
       }                              (*ansonsten wird t zur PList hinzugefügt*)
      ]                           (*Das 2. und 3. Tripel müssten auch untersucht*)
      }                      (*werden, dies fällt bei der Untersuchung von α − 1*)
     ]                      (*jedoch weg, da hier immer |α − 1| = |α + 2| und somit*)
    }                                      (*in beiden Fällen |δ_j| = 1 gilt*)
  ]
 ]
]
Print[‘‘Kein Widerspruch bei t aus der folgenden Liste’’];
Print[PList];
(*Ausgabe jener t, für die sich kein Widerspruch ergibt:
1. Möglichkeit: |Λ_j| = 0, diese Fälle werden extra betrachtet
2. Möglichkeit: |Λ_j| ≠ 0, aber lambdaunten<lambdaoben, hier so lange Wert für y
in lambdaoben erhöhen, bis sich ein Widerspruch ergibt*)
```

Die Vorgehensweise für die anderen Tripel ist analog.

A.4.2 $\Lambda_j = 0$

In den Fällen, wo $\Lambda_j = 0$ gilt, lässt sich die Thue-Gleichung (1.1) jeweils in eine reelle Gleichung umwandeln, die mithilfe von KASH3 [5] gelöst werden kann. (Siehe Abschnitt 4.2).

Beispiel: Fall 2: $D = 3, t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{3}}{2}$ mit $c \leq 93$, $\beta = \alpha + 1 - b$, und die dazugehörige Gleichung

$$3(p^3 + \tilde{x}p^2c) + 9\tilde{x}^2p + \tilde{x}^3c = \pm 4(c-3) \text{ mit } \tilde{x} = bx.$$

Die Eingabe in KASH3 ist in diesem Fall folgendermaßen:

```
for k in [2..46] do AppendTo(''C:/Daten/Fall2Plus.txt'', ''c='',2*k+1,'':'',
 Solutions(Thue( 3*(1+(2*k+1)*X)+9*X^2+(2*k+1)*X^3 ), 4*(2*k-2) )); od;
```

Die eingegebene Gleichung wird vom Programm durch eine Potenz von p ergänzt, sodass der Grad jedes Terms gleich 3 ist und anschließend gelöst. Die Lösungen (x, p) der Gleichung werden dann in ein *.txt-file geschrieben. Man muss dann daraus noch die Lösung (x, y) der Thue-Gleichung (1.1) berechnen.

A.4.3 Berechnung der Lösungen (x, y) der Thue-Gleichung mit betragsmäßig kleinem y

Als nächstes betrachtet man alle y, die betragsmäßig klein sind, d.h. alle y mit $|y| < 4$ für $|t| \geq 6$ bzw. $|y| < 7$ für $|t| < 6$. Dazu verwendet man wieder die Ungleichung (A.6). Man setzt $\gamma^{(j)} = x - \alpha^{(j)}y$ und ersetzt im Fall $\underline{|t| \geq 6}$ $\alpha^{(j)}$ durch die Summe $\lfloor\alpha^{(j)}\rfloor + \{\alpha^{(j)}\}$. Auf diese Weise lassen sich mittels eines Hilfsprogrammes obere Schranken für $x - \lfloor\alpha\rfloor y = x - ty$, $x - \lfloor\alpha^{(2)}\rfloor y = x + y$ und $x - \lfloor\alpha^{(3)}\rfloor y = x$ berechnen. Zur genaueren Untersuchung der kleinen y siehe Abschnitt 4.3.1.

```
alpha1b:=(2+1/t+3/t^2+4.6/t^2.5)/t/.t->6   (*Bruchteil der Entwicklung von α*)
alpha2b:=(1+2/t^2+1.5/t^2.5)/t/.t->6    (*Bruchteil der Entwicklung von α^(2)*)
alpha3b:=(1+1/t+1/t^2+2/t^2.5)/t/.t->6  (*Bruchteil der Entwicklung von α^(3)*)
xty=2.9482/y1+alpha1b y2/.{y1->2,y2->4}          (*obere Schranke für |x − ty|,
                         wobei t der Ganzteil in der Entwicklung von α ist*)
xty=2.9482/y1+alpha2b y2/.{y1->2,y2->4}        (*obere Schranke für |x − (−1)y|,
                      wobei -1 der Ganzteil in der Entwicklung von α^(2) ist*)
xty=2.9482/y1+alpha3b y2/.{y1->2,y2->4}      (*obere Schranke für |x − 0y| = |x|,
                       wobei 0 der Ganzteil in der Entwicklung von α^(3) ist*)
```

Im Fall $\underline{|t| < 6}$ ist es nicht notwendig, die Nullstelle $\alpha^{(j)}$ in einen Ganzteil und einen Bruchteil aufzuspalten, da in diesem Fall die exakte Nullstellen berechnet und in die Ungleichung (A.6) eingesetzt werden können.
Damit können alle x, y aus $\mathbb{Z}_k$ berechnet werden, die diese Ungleichungen erfüllen. Diese Werte werden dann in die linke Seite der Thue-Gleichung (A.4) eingesetzt und mit den Werten für ℓ verglichen, die sich als Normen, welche die Ungleichung $|N| \leq |2t + 1|$ für spezielle Diskriminanten erfüllen, ergeben haben. Ist die linke Seite identisch zu der rechten Seite, so wird das betreffende Paar (x, y) ausgegeben und ist für alle Werte t eine Lösung der Thue-Gleichung (A.4). Andernfalls wird die Gleichung nach t gelöst und überprüft, ob für t die Bedingungen $\Re t = -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ sowie $|t| \geq 6$ bzw. $|t| < 6$ erfüllt sind. Weiters wird überprüft, ob t ein Element aus $\mathbb{Z}_k$ ist, in diesem Fall muss t von der Form $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}$ sein, wobei c eine ungerade natürliche Zahl bezeichnet. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt das Programm die Lösung (x, y) der Thue-Gleichung (A.4) sowie die dazugehörigen Werte ℓ und t aus.

$\underline{\boldsymbol{|t| \geq 6}}$

Berechnung aller Lösungen (x, y), die den Bedingungen $2 \leq |y| < 4$ und $|x - ty| \leq 3.00888$ genügen

Die obere Schranke für $|x - ty|$ wurde bereits in obigem Programm berechnet.

```
te =.; x =.; y =.; f =.; ft =.; xy =.; WD =.; DD =.;
vwVolleListe := {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, 7, -7, 8, -8, 9, -9,
10, -10, 11, -11, 12, -12, 13, -13, 14, -14, 15, -15, 16, -16, 17, -17, 18, -18, bs,
-bs, 1+bs, 1-bs, -1+bs, -1-bs, 2+bs, 2-bs, -2+bs, -2-bs, -3+bs, 3-bs, -3-bs, 3+
bs, -4+bs, 4-bs, 4+bs, -4-bs, -5+bs, 5-bs, 5+bs, -5-bs, -6+bs, 6-bs, 6+bs, -6-
bs, -7+bs, 7-bs, 7+bs, -7-bs, -8+bs, 8-bs, 8+bs, -8-bs, -9+bs, 9-bs, 9+bs, -9-
bs, -10+bs, 10-bs, 10+bs, -10-bs, -11+bs, 11-bs, 11+bs, -11-bs, -12+bs, 12-
bs, 12+bs, -12-bs, -13+bs, 13-bs, 13+bs, -13-bs, -14+bs, 14-bs, 14+bs, -14-
bs, -15+bs, 15-bs, 15+bs, -15-bs, -16+bs, 16-bs, 16+bs, -16-bs, -17+bs, 17-
bs, 17+bs, -17-bs, -18+bs, 18-bs, 18+bs, -18-bs, -19+bs, 19-bs, 19+bs, -19-
bs, -20+bs, 20-bs, 20+bs, -20-bs, -21+bs, 21-bs, 21+bs, -21-bs, -22+bs, 22-
bs, 22+bs, -22-bs, -23+bs, 23-bs, -24+bs, 24-bs, 2bs, -2bs, 1+2bs, 1-2bs, -1+
2bs, -1-2bs, 2+2bs, 2-2bs, -2+2bs, -2-2bs, -3+2bs, 3-2bs, -3-2bs, 3+2bs, -4+
2bs, 4-2bs, 4+2bs, -4-2bs, -5+2bs, 5-2bs, 5+2bs, -5-2bs, -6+2bs, 6-2bs, 6+
2bs, -6-2bs, -7+2bs, 7-2bs, 7+2bs, -7-2bs, -8+2bs, 8-2bs, 8+2bs, -8-2bs, -9+
2bs, 9-2bs, 9+2bs, -9-2bs, -10+2bs, 10-2bs, 10+2bs, -10-2bs, -11+2bs, 11-2bs, 11+
2bs, -11-2bs, -12+2bs, 12-2bs, 12+2bs, -12-2bs, -13+2bs, 13-2bs, 13+2bs, -13-
2bs, -14+2bs, 14-2bs, 14+2bs, -14-2bs, -15+2bs, 15-2bs, 15+2bs, -15-2bs, -16+
2bs, 16-2bs, 16+2bs, -16-2bs, -17+2bs, 17-2bs, 17+2bs, -17-2bs, -18+2bs, 18-
2bs, 18+2bs, -18-2bs, -19+2bs, 19-2bs, 19+2bs, -19-2bs, -20+2bs, 20-2bs, 20+
2bs, -20-2bs, -21+2bs, 21-2bs, 21+2bs, -21-2bs, -22+2bs, 22-2bs, 22+2bs, -22-
2bs, -23+2bs, 23-2bs, -24+2bs, 24-2bs, 3bs, -3bs, 1+3bs, 1-3bs, -1+3bs, -1-3bs, 2+
3bs, 2-3bs, -2+3bs, -2-3bs, -3+3bs, 3-3bs, -3-3bs, 3+3bs, -4+3bs, 4-3bs, 4+
3bs, -4-3bs, -5+3bs, 5-3bs, 5+3bs, -5-3bs, -6+3bs, 6-3bs, 6+3bs, -6-3bs, -7+
3bs, 7-3bs, 7+3bs, -7-3bs, -8+3bs, 8-3bs, 8+3bs, -8-3bs, -9+3bs, 9-3bs, 9+
3bs, -9-3bs, -10+3bs, 10-3bs, 10+3bs, -10-3bs, -11+3bs, 11-3bs, 11+3bs, -11-
3bs, -12+3bs, 12-3bs, 12+3bs, -12-3bs, -13+3bs, 13-3bs, 13+3bs, -13-3bs, -14+
3bs, 14-3bs, 14+3bs, -14-3bs, -15+3bs, 15-3bs, 15+3bs, -15-3bs, -16+3bs, 16-
3bs, 16+3bs, -16-3bs, -17+3bs, 17-3bs, 17+3bs, -17-3bs, -18+3bs, 18-3bs, 18+
3bs, -18-3bs, -19+3bs, 19-3bs, 19+3bs, -19-3bs, -20+3bs, 20-3bs, 20+3bs, -20-
3bs, -21+3bs, 21-3bs, 21+3bs, -21-3bs, -22+3bs, 22-3bs, 22+3bs, -22-3bs, -23+
3bs, 23-3bs, -24+3bs, 24-3bs, 4bs, -4bs, 1+4bs, 1-4bs, -1+4bs, -1-4bs, 2+4bs, 2-
4bs, -2+4bs, -2-4bs, -3+4bs, 3-4bs, -3-4bs, 3+4bs, -4+4bs, 4-4bs, 4+4bs, -4-
4bs, -5+4bs, 5-4bs, 5+4bs, -5-4bs, -6+4bs, 6-4bs, 6+4bs, -6-4bs, -7+4bs, 7-4bs, 7+
4bs, -7-4bs, -8+4bs, 8-4bs, 8+4bs, -8-4bs, -9+4bs, 9-4bs, 9+4bs, -9-4bs, -10+
4bs, 10-4bs, 10+4bs, -10-4bs, -11+4bs, 11-4bs, 11+4bs, -11-4bs, -12+4bs, 12-
4bs, 12+4bs, -12-4bs, -13+4bs, 13-4bs, 13+4bs, -13-4bs, -14+4bs, 14-4bs, 14+
4bs, -14-4bs, -15+4bs, 15-4bs, 15+4bs, -15-4bs, -16+4bs, 16-4bs, 16+4bs, -16-
4bs, -17+4bs, 17-4bs, 17+4bs, -17-4bs, -18+4bs, 18-4bs, 18+4bs, -18-4bs, -19+
4bs, 19-4bs, 19+4bs, -19-4bs, -20+4bs, 20-4bs, 20+4bs, -20-4bs, -21+4bs, 21-
4bs, 21+4bs, -21-4bs, -22+4bs, 22-4bs, 22+4bs, -22-4bs, -23+4bs, 23-4bs, -24+
4bs, 24-4bs, 5bs, -5bs, 1+5bs, 1-5bs, -1+5bs, -1-5bs, 2+5bs, 2-5bs, -2+5bs, -2-
5bs, -3+5bs, 3-5bs, -3-5bs, 3+5bs, -4+5bs, 4-5bs, 4+5bs, -4-5bs, -5+5bs, 5-
5bs, 5+5bs, -5-5bs, -6+5bs, 6-5bs, 6+5bs, -6-5bs, -7+5bs, 7-5bs, 7+5bs, -7-
5bs, -8+5bs, 8-5bs, 8+5bs, -8-5bs, -9+5bs, 9-5bs, 9+5bs, -9-5bs, -10+5bs, 10-
5bs, 10+5bs, -10-5bs, -11+5bs, 11-5bs, 11+5bs, -11-5bs, -12+5bs, 12-5bs, 12+
```

```
5bs, -12-5bs, -13+5bs, 13-5bs, 13+5bs, -13-5bs, -14+5bs, 14-5bs, 14+5bs, -14-
5bs, -15+5bs, 15-5bs, 15+5bs, -15-5bs, -16+5bs, 16-5bs, 16+5bs, -16-5bs, -17+
5bs, 17-5bs, 17+5bs, -17-5bs, -18+5bs, 18-5bs, 18+5bs, -18-5bs, -19+5bs, 19-
5bs, 19+5bs, -19-5bs, -20+5bs, 20-5bs, 20+5bs, -20-5bs, -21+5bs, 21-5bs, 21+
5bs, -21-5bs, -22+5bs, 22-5bs, 22+5bs, -22-5bs, -23+5bs, 23-5bs, -24+5bs, 24-
5bs, 6bs, -6bs, 1+6bs, 1-6bs, -1+6bs, -1-6bs, 2+6bs, 2-6bs, -2+6bs, -2-6bs, -3+
6bs, 3-6bs, -3-6bs, 3+6bs, -4+6bs, 4-6bs, 4+6bs, -4-6bs, -5+6bs, 5-6bs, 5+6bs, -5-
6bs, -6+6bs, 6-6bs, 6+6bs, -6-6bs, -7+6bs, 7-6bs, 7+6bs, -7-6bs, -8+6bs, 8-
6bs, 8+6bs, -8-6bs, -9+6bs, 9-6bs, 9+6bs, -9-6bs, -10+6bs, 10-6bs, 10+6bs, -10-
6bs, -11+6bs, 11-6bs, 11+6bs, -11-6bs, -12+6bs, 12-6bs, 12+6bs, -12-6bs, -13+
6bs, 13-6bs, 13+6bs, -13-6bs, -14+6bs, 14-6bs, 14+6bs, -14-6bs, -15+6bs, 15-
6bs, 15+6bs, -15-6bs, -16+6bs, 16-6bs, 16+6bs, -16-6bs, -17+6bs, 17-6bs, 17+
6bs, -17-6bs, -18+6bs, 18-6bs, 18+6bs, -18-6bs, -19+6bs, 19-6bs, 19+6bs, -19-
6bs, -20+6bs, 20-6bs, 20+6bs, -20-6bs, -21+6bs, 21-6bs, 21+6bs, -21-6bs, -22+
6bs, 22-6bs, 22+6bs, -22-6bs, -23+6bs, 23-6bs, -24+6bs, 24-6bs, 7bs, -7bs, 1+7bs, 1-
7bs, -1+7bs, -1-7bs, 2+7bs, 2-7bs, -2+7bs, -2-7bs, -3+7bs, 3-7bs, -3-7bs, 3+
7bs, -4+7bs, 4-7bs, 4+7bs, -4-7bs, -5+7bs, 5-7bs, 5+7bs, -5-7bs, -6+7bs, 6-7bs, 6+
7bs, -6-7bs, -7+7bs, 7-7bs, 7+7bs, -7-7bs, -8+7bs, 8-7bs, 8+7bs, -8-7bs, -9+
7bs, 9-7bs, 9+7bs, -9-7bs, -10+7bs, 10-7bs, 10+7bs, -10-7bs, -11+7bs, 11-7bs, 11+
7bs, -11-7bs, -12+7bs, 12-7bs, 12+7bs, -12-7bs, -13+7bs, 13-7bs, 13+7bs, -13-
7bs, -14+7bs, 14-7bs, 14+7bs, -14-7bs, -15+7bs, 15-7bs, 15+7bs, -15-7bs, -16+
7bs, 16-7bs, 16+7bs, -16-7bs, -17+7bs, 17-7bs, 17+7bs, -17-7bs, -18+7bs, 18-
7bs, 18+7bs, -18-7bs, -19+7bs, 19-7bs, 19+7bs, -19-7bs, -20+7bs, 20-7bs, 20+
7bs, -20-7bs, -21+7bs, 21-7bs, 21+7bs, -21-7bs, -22+7bs, 22-7bs, 22+7bs, -22-
7bs, -23+7bs, 23-7bs, -24+7bs, 24-7bs, 8bs, -8bs, 1+8bs, 1-8bs, -1+8bs, -1-8bs, 2+
8bs, 2-8bs, -2+8bs, -2-8bs, -3+8bs, 3-8bs, -3-8bs, 3+8bs, -4+8bs, 4-8bs, 4+
8bs, -4-8bs, -5+8bs, 5-8bs, 5+8bs, -5-8bs, -6+8bs, 6-8bs, 6+8bs, -6-8bs, -7+
8bs, 7-8bs, 7+8bs, -7-8bs, -8+8bs, 8-8bs, 8+8bs, -8-8bs, -9+8bs, 9-8bs, 9+8bs, -9-
8bs, -10+8bs, 10-8bs, 10+8bs, -10-8bs, -11+8bs, 11-8bs, 11+8bs, -11-8bs, -12+
8bs, 12-8bs, 12+8bs, -12-8bs, -13+8bs, 13-8bs, 13+8bs, -13-8bs, -14+8bs, 14-
8bs, 14+8bs, -14-8bs, -15+8bs, 15-8bs, 15+8bs, -15-8bs, -16+8bs, 16-8bs, 16+
8bs, -16-8bs, -17+8bs, 17-8bs, 17+8bs, -17-8bs, -18+8bs, 18-8bs, 18+8bs, -18-
8bs, -19+8bs, 19-8bs, 19+8bs, -19-8bs, -20+8bs, 20-8bs, 20+8bs, -20-8bs, -21+
8bs, 21-8bs, 21+8bs, -21-8bs, -22+8bs, 22-8bs, 22+8bs, -22-8bs, -23+8bs, 23-
8bs, -24+8bs, 24-8bs, 9bs, -9bs, 1+9bs, 1-9bs, -1+9bs, -1-9bs, 2+9bs, 2-9bs, -2+
9bs, -2-9bs, -3+9bs, 3-9bs, -3-9bs, 3+9bs, -4+9bs, 4-9bs, 4+9bs, -4-9bs, -5+
9bs, 5-9bs, 5+9bs, -5-9bs, -6+9bs, 6-9bs, 6+9bs, -6-9bs, -7+9bs, 7-9bs, 7+9bs, -7-
9bs, -8+9bs, 8-9bs, 8+9bs, -8-9bs, -9+9bs, 9-9bs, 9+9bs, -9-9bs, -10+9bs, 10-
9bs, 10+9bs, -10-9bs, -11+9bs, 11-9bs, 11+9bs, -11-9bs, -12+9bs, 12-9bs, 12+
9bs, -12-9bs, -13+9bs, 13-9bs, 13+9bs, -13-9bs, -14+9bs, 14-9bs, 14+9bs, -14-
9bs, -15+9bs, 15-9bs, 15+9bs, -15-9bs, -16+9bs, 16-9bs, 16+9bs, -16-9bs, -17+
9bs, 17-9bs, 17+9bs, -17-9bs, -18+9bs, 18-9bs, 18+9bs, -18-9bs, -19+9bs, 19-
9bs, 19+9bs, -19-9bs, -20+9bs, 20-9bs, 20+9bs, -20-9bs, -21+9bs, 21-9bs, 21+
9bs, -21-9bs, -22+9bs, 22-9bs, 22+9bs, -22-9bs, -23+9bs, 23-9bs, -24+9bs, 24-9bs}
```

(*Liste von Elementen aus $\mathbb{Z}_k$, aus denen dann die x und y bestimmt werden*)

```
DiscrList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71};
```

```
                                   (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)
d3List={2t+1,-(2t+1),(2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2),
  (2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2),(2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2,
  -((2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2),(2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2,-((2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2),
  5+6Sqrt[3]I,-(5+6Sqrt[3]I),-5+6Sqrt[3]I,-(-5+6Sqrt[3]I),-12,12};
d7List={2t+1,-(2t+1),2t+1-2Sqrt[7]I,-(2t+1-2Sqrt[7]I),11-2Sqrt[7]I,
  -(11-2Sqrt[7]I),11+2Sqrt[7]I,-(11+2Sqrt[7]I)};
dList={2t+1,-(2t+1)};     (*d3List,d7List,dList: Liste der möglichen Werte auf
      der rechten Seite der Thue-Gleichung, geordnet nach den Diskriminanten*)
F[x_,y_]=x^3-(t-1)x^2y-(t+2)x y^2-y^3;      (*linke Seite der Thue-Gleichung*)
For[Discr=1,Discr<=Length[DiscrList],Discr++,
  DD = DiscrList[[Discr]];
  Print[''D ='',DD];
  WD=Sqrt[DD];
  bs:=(1+WD I)/2;
  yListe=Select[vwVolleListe,2<=Abs[Part[#]]<4&];      (*alle y aus der Liste,
                                                      die 2 ≤ |y| < 4 erfüllen*)
  xtyListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<3.00888&];        (*alle k = x − ty
                                      aus der Liste, für die |k| < 3.00888 gilt*)
  For[yy=1,yy<=Length[yListe],yy++,
   For[xty=1,xty<=Length[xtyListe],xty++,
    y=yListe[[yy]];
    x=xtyListe[[xty]]+t y;                                          (*x = k + ty*)
    f=Simplify[Expand[F[x,y]]];                     (*Einsetzen von x und y in die
                                                        linke Seite der Gleichung*)
    If[DD==3,{                                   (*Aufspaltung nach Diskriminanten*)
     For[dl3=1,dl3<=Length[d3List],dl3++,
      If[Expand[f]===Expand[d3List[[dl3]]],{                     (*Ist f(x, y) = ℓ,*)
       Print[''x='',x];                          (*d.h. gleich einem Wert aus der*)
       Print[''y='',y];                            (*Liste der rechten Seiten, so*)
       Print[''F(x,y)='',f];                           (*werden sowohl f(x, y) als*)
       Print[''**********''];}, {                               (*auch ℓ ausgegeben*)
       Lsg1=Solve[f==d3List[[dl3]],t];                      (*Andernfalls wird die*)
       For[z1=1,z1<=Length[Lsg1],z1++,                        (*Gleichung f(x, y) = ℓ*)
        te1=ComplexExpand[t/.Lsg1[[z1]]];                       (*nach t gelöst und*)
        If[Abs[te1]>=6,{                    (*überprüft, ob für die Lösung t gilt,
                                                           dass |t| ≥ 6, ℜ(t) = −1/2,*)
         If[Re[te1]==-1/2&&(Im[te1]>0&&OddQ[2Im[te1]/WD]==True),
          {                              (*ℑ(t) > 0 und t ein Element aus ℤ_k ist*)
          Print[''x='',x];                                (*Dann erfolgt die Ausgabe*)
          Print[''y='',y];                                  (*von x, y, f(x, y), ℓ und t*)
          Print[''F(x,y)='',f];
          Print[''RS='',d3List[[dl3]]];
          Print[''t='',te1];
          Print[''##########''];
```

Für alle anderen Diskriminanten erfolgt die Berechnung analog.

Berechnung aller Lösungen (x, y), die den Bedingungen $2 \le |y| < 4$ und $|x + y| \le 2.18914$ genügen

Hier erfolgt die Berechnung der möglichen Lösungen (x, y) durch

```
yListe=Select[vwVolleListe,2<=Abs[Part[#]]<4&];      (*alle y aus der Liste,
                                                      die 2 ≤ |y| < 4 erfüllen*)
xtyListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<2.18914&];          (*alle k = x + y
                                   aus der Liste, für die |k| < 2.18914 gilt*)
For[yy=1,yy<=Length[yListe],yy++,
 For[xty=1,xty<=Length[xtyListe],xty++,
  y=yListe[[yy]];
  x=xtyListe[[xty]]-y;                                             (*x = k − y*)
```

Das restliche Programm ist analog zum obigen.

Berechnung aller Lösungen (x, y), die den Bedingungen $2 \le |y| < 4$ und $|x| \le 2.28552$ genügen

Hier werden die möglichen Lösungen (x, y) durch

```
yListe=Select[vwVolleListe,2<=Abs[Part[#]]<4&];      (*alle y aus der Liste,
                                                      die 2 ≤ |y| < 4 erfüllen*)
xtyListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]<2.28552&];            (*alle x aus
                                      der Liste, für die |x| < 2.28552 gilt*)
For[yy=1,yy<=Length[yListe],yy++,
 For[xty=1,xty<=Length[xtyListe],xty++,
  y=yListe[[yy]];
  x=xtyListe[[xty]];
```

berechnet, der Rest verläuft analog zu oben.

$|t| < 6$

Zu Beginn wird wieder die Liste `vwVolleListe` definiert, aus denen dann die x und y bestimmt werden. Man verwendet die Liste aus dem Programm für $|t| \ge 6$, daher wird sie an dieser Stelle nicht nochmals angeführt.

```
te =.; x =.; y =.; f =.; ft =.; xy =.; wd =.; dd =.;

DList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71,79,83,87,91,95,103,107,
     111,115,119,123,127,131};  (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

cq={1,3,5,7};          (*Liste, die zum Aufbau jener t mit |t| < 6 benötigt wird*)

d3List={2t+1,-(2t+1),4Sqrt[3]I,-4Sqrt[3]I,Sqrt[3]I,-Sqrt[3]I,
  2+3Sqrt[3]I,2-3Sqrt[3]I,-2+3Sqrt[3]I,-2-3Sqrt[3]I,
  4+3Sqrt[3]I,4-3Sqrt[3]I,-4+3Sqrt[3]I,-4-3Sqrt[3]I,
  -3,3,-4,4,-5,5,-8,8};

d7List={2t+1,-(2t+1),Sqrt[7]I,-Sqrt[7]I,4+Sqrt[7]I,4-Sqrt[7]I,
  -4+Sqrt[7]I,-4-Sqrt[7]I,1+2Sqrt[7]I,1-2Sqrt[7]I,-1+2Sqrt[7]I,
  -1-2Sqrt[7]I,7/2+5/2Sqrt[7]I,7/2-5/2Sqrt[7]I,-7/2+5/2Sqrt[7]I,
  -7/2-5/2Sqrt[7]I,-3,3,-5,5,-7,7};
```

```
d11List={2t+1,-(2t+1),2Sqrt[11]I,-2Sqrt[11]I,7+2Sqrt[11]I,
 -(7+2Sqrt[11]I),7-2Sqrt[3]I,-(7-2Sqrt[3]I)};
d15List={2t+1,-(2t+1),3,-3};
d19List={2t+1,-(2t+1),2,-2,3,-3,4,-4};
d23List={2t+1,-(2t+1),3/2+Sqrt[23]I/2,-(3/2+Sqrt[23]I/2),
 3/2-Sqrt[23]I/2,-(3/2-Sqrt[23]I/2)};
d31List={2t+1,-(2t+1),1/2+Sqrt[31]I/2,-(1/2+Sqrt[31]I/2),
 1/2-Sqrt[31]I/2,-(1/2-Sqrt[31]I/2),3,-3};
d35List={2t+1,-(2t+1),2,-2,4,-4,5,-5};
ddList={2t+1,-(2t+1),t^2+t+7,-(t^2+t+7)};
dList={2t+1,-(2t+1)};        (*d3List,...: Listen der möglichen Werte auf der
         rechten Seite der Thue-Gleichung, geordnet nach den Diskriminanten*)
F[x_,y_,t_]= x^3-(t-1)x^2y-(t+2)x y^2-y^3; (*Thue-Gleichung*)
For[Dis=1,Dis<=Length[DList],Dis++,
  dd=DList[[Dis]];
  Print[''D='',dd];
  wd=Sqrt[dd];
  b:=(1+wd I)/2;                          (*Berechnung von b = 1/2 + i√D/2*)
  For[ee=1,ee<=Length[cq],ee++,            (*und t = -1/2 + ci√D/2*)
   tt=-1/2+cq[[ee]] Sqrt[dd]/2I;
   If[Abs[tt]<6&&tt!=-1/2+3Sqrt[3]/2I,                (*Test: |t| < 6*)
   {t=tt;
    Lsg= Map[Simplify, Solve[x^3-(t-1)x^2-(t+2)x-1==0,x]]//N;
    ab=x/.Lsg//N;                        (*Lösung der Thue-Gleichung*)
    For[z=1,z<=Length[ab],z++,
     If[Re[ab[[z]]]==-1/2,{alpha1=x/.Lsg[[z]]//N;
      alpha2=-1-1/alpha1;alpha3=-1/(alpha1+1);},
     ]          (*Bezeichnung der Nullstellen: α^(1) mit ℜ(α^(1)) = -1/2,*)
    ];                    (*α^(2) = -1 - 1/α^(1); α^(3) = -1/(α^(1) + 1)*)
    gammay=((3Sqrt[3])^2Abs[2t+1]^4/Abs[t^2+t+7]^2)^(1/6)/y/.y->7;
                                        (*obere Schranke für |γ^(j)|*)
    yListe=Select[vwVolleListe,1<=Abs[Part[#]]<7&];
                                   (*Auswahl jener y für die |y| < 7 gilt*)
    m=Max[Abs[alpha1],Abs[alpha2],Abs[alpha3]];   (*Berechnung von max|α^(j)|*)
    xwert=gammay+7m;             (*|x| - 7 max|α^(j)| ≤ |x - α^(j)y| = |γ^(j)|*)
    xListe=Select[vwVolleListe,Abs[Part[#]]< xwert&];
    For[yy=1,yy<=Length[yListe],yy++,
     For[xty=1,xty<=Length[xListe],xty++,
      y=yListe[[yy]];          (*Jedes Paar (x,y) wird in die Thue-Gleichung*)
      x=xListe[[xty]];                                   (*eingesetzt → f*)
      f=Simplify[Expand[F[x,y,t]]];
       Switch[dd,
        3,
```

```
If[t==-1/2+Sqrt[3]/2I, {
 For[dl3a=1,dl3a<=Length[dList],dl3a++,
  If[Expand[f]==Expand[dList[[dl3a]]], {
   Print[``t='',t];          (*f wird mit jedem ℓ verglichen und bei*)
   Print[``x='',x];          (*Gleichheit werden (x,y),ℓ,t ausgegeben*)
   Print[``y='',y];
   Print[``F(x,y)='',f];
   Print[``l='',dList[[dl3a]]];
   Print[``**********''];},
  ];
 ];
},
{
 For[dl3=1,dl3<=Length[d3List],dl3++,
  If[Expand[f]== Expand[d3List[[dl3]]], {
   Print[``t='',t];
   Print[``x='',x];
   Print[``y='',y];
   Print[``F(x,y)='',f];
   Print[``l='',d3List[[dl3]]];
   Print[``**********''];},
```

Die Vorgangsweise für alle anderen Diskriminanten ist analog.

A.4.4 Berechnung aller Lösungen (x, y) der Thue-Gleichung, wobei entweder $x = 0, x = -y$ oder $x = ty$ gilt

Im Abschnitt 3.2 wurden für den Fall $|t| \geq 6$ die Werte $x = 0, x = -y$ und $x = ty$ ausgenommen, damit der Ausdruck $|x - \lfloor\alpha^{(j)}\rceil y| \neq 0$ war. In diesen Fällen vereinfachen sich die Thue-Gleichungen soweit, dass man nur mehr kubische Wurzeln berechnen muss (siehe Abschnitt 4.3.2). Diese werden nun behandelt. Zu diesem Zweck erzeugt das Programm eine Liste von zu untersuchenden Werten t mit $\Re t = -\frac{1}{2}, \Im t > 0$ und $|t| \geq 6$ und berechnet abhängig vom speziellen t die dritten Wurzeln aus $-\ell$ für $x = 0$, aus ℓ für $x = -y$ sowie aus $-\frac{\ell}{2t+1}$ für $x = ty$. Im Fall $D = 3$ ergeben sich weitere Wurzeln durch Multiplikation mit den Einheiten b und $1 - b$. Dann wird getestet, ob die berechneten dritten Wurzeln y Elemente aus $\mathbb{Z}_k$ sind. Dazu wird y in der Form $y = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2 i\sqrt{D}}{2}$ geschrieben. Es muss $c_2 \equiv c_1(2)$ erfüllt sein, damit y in $\mathbb{Z}_k$ liegt. Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so wird die Lösung (x, y) der Thue-Gleichung (A.4) und die dazugehörigen Werte ℓ und t ausgegeben.

Berechnung aller Lösungen der Form $(0, y)$ der Thue-Gleichung

```
tt=.;x=.;WD=.;DD=.;y1=.;y2=.;y3=.;y=.;a1=.;a2=.;a3=.;a=.;b1=.;
 b2=.;b3=.;b=.;wy=.;

DiscrList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71}
                              (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

d3List={2t+1,-(2t+1),(2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2),
  (2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2),(2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2,
```

```
 -((2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2),(2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2,-((2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2),
 5+6Sqrt[3]I,-(5+6Sqrt[3]I),-5+6Sqrt[3]I,-(-5+6Sqrt[3]I),-12,12};
d7List={2t+1,-(2t+1),2t+1-2Sqrt[7]I,-(2t+1-2Sqrt[7]I),11-2Sqrt[7]I,
 -(11-2Sqrt[7]I),11+2Sqrt[7]I,-(11+2Sqrt[7]I)};
dList={2t+1,-(2t+1)};     (*d3List,d7List,dList: Liste der möglichen Werte auf
     der rechten Seite der Thue-Gleichung, geordnet nach den Diskriminanten*)
For[Discr=1,Discr<=Length[DiscrList],Discr++,
  DD=DiscrList[[Discr]];
  Print[``D='',DD];
  WD=Sqrt[DD];
  bs:=(1+WD I)/2;
  For[cc=1,cc<=1000,cc+=2,                      (*Konstruktion einer Liste von*)
   tt:=-1/2+cc Sqrt[DD]/2I;                               (*möglichen t-Werten*)
   If[tt!=-1/2+3Sqrt[3]/2I,
    If[DD==3,{                               (*Aufspaltung nach Diskriminanten*)
     For[dl3=1,dl3<=Length[d3List],dl3++,        (*Lösung der Gleichung -y^3 = ℓ
                                          mit ℓ aus einer der obigen Listen*)
      wy=(-d3List[[dl3]]/.t->tt)^(1/3);      (*Berechnung der dritten Wurzeln
                                                                     aus -ℓ*)
      y1=Simplify[wy];                   (*D = 3 : Durch Multiplikation mit den*)
      y2=Simplify[wy(-bs)];                       (*Einheiten b und 1 - b erhält*)
      y3=Simplify[wy(-1+bs)];                           (*man weitere Lösungen*)
      b1=2Im[y1]/WD;
      a1=2Re[y1];
      b2=2Im[y2]/WD;   (*Überprüfung, ob y = a/2 + bi√D/2 ein Element aus Z_k ist*)
      a2=2Re[y2];
      b3=2Im[y3]/WD;
      a3=2Re[y3];
      If[EvenQ[b1]==True,          (*Ist b gerade, so muss auch a gerade sein*)
       If[EvenQ[a1]==True,
       {
       Print[``y='',y1];
       Print[``RS='',d3List[[dl3]]];                    (*Ausgabe von y,ℓ und t*)
       Print[``t='', tt];
       Print[``**********''];
       }
       ],
       If[OddQ[a1]==True,     (*Ist b ungerade, so muss auch a ungerade sein*)
       {
       Print[``y='', y1];
       Print[``RS='',d3List[[dl3]]];                    (*Ausgabe von y,ℓ und t*)
       Print[``t='', tt];
       Print[``**********''];
       }
       ]
```

```
];
```

Für die weiteren Wurzeln `y2,y3` wird ebenfalls untersucht, ob sie aus $\mathbb{Z}_k$ sind. Die Vorgangsweise für alle anderen Diskriminanten ist analog.

Berechnung aller Lösungen der Form $(-y, y)$ der Thue-Gleichung

Der einzige Unterschied zum vorigen Programm ist die Textzeile

```
wy=(d3List[[dl3]]/.t->tt)^(1/3);   (*Berechnung der 3. Wurzeln aus ℓ*),
```

der Rest verläuft analog.

Berechnung aller Lösungen der Form (ty, y) der Thue-Gleichung

Hier berechnet man die folgenden dritten Wurzeln:

```
wy=(-(d3List[[dl3]]/(2t+1))/.t->tt)^(1/3);      (*Berechnung der dritten
                                                 Wurzeln aus −ℓ/(2t+1)*)
```

Das restliche Programm ist analog zu obigem.

A.4.5 Berechnung aller Lösungen (x, y), wenn $\gamma = x - \alpha y$ zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist

Zum Schluss werden noch alle Lösungen der Thue-Gleichung (A.4) unter der Bedingung, dass $\gamma = x - \alpha y$ zu einer Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert ist, ermittelt.
Die Lösung dieses Problems wird auf ein Problem zurückgeführt, welches von Heuberger, Pethő und Tichy in [1], [2], [3] bzw. [4] behandelt wurde.
Ist γ zu einer ganzen Zahl aus $\mathbb{Z}_k$ assoziiert, so sind $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ zur selben Zahl assoziiert, und man kann ℓ in der Form $\ell = \mu r^3$ darstellen und die obige Thue-Gleichung durch r^3 ($r^3 \neq 0$) dividieren, wodurch man die Gleichung

$$\hat{x}^3 - (t-1)\hat{x}^2\hat{y} - (t+2)\hat{x}\hat{y}^2 - \hat{y}^3 = \mu \tag{A.7}$$

mit $\hat{x} = \frac{x}{r}, \hat{y} = \frac{y}{r}$ und $|\mu| = 1$ erhält. Diese Gleichung wurde von Heuberger, Pethő und Tichy gelöst.
(Siehe auch Abschnitt 4.3.3).

$|t| \geq 6$

Im Programm werden zu Beginn die Liste aller zu behandelnden Diskriminanten, die Listen der möglichen ℓ-Werte, die sich als jene Normen, die die Ungleichung $|N| \leq |2t+1|$ erfüllen, ergeben haben, sowie die Listen aller Lösungen $(\hat{x}, \hat{y})$ von (A.7) angeschrieben.

```
tt=.;x=.;WD=.;DD=.;y1=.;y2=.;y3=.;y=.;a1=.;a2=.;a3=.;a=.;b1=.;
 b2=.;b3=.;b=.;wy=.;

DiscrList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71}
                              (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

xyD3={0,1,-1,bs,-bs,1-bs,-1+bs};           (*Lösungen der Gleichung F(x,y) = μ
            mit |μ| = 1, abhängig von der Diskriminanten, siehe [1] bzw. [3]*)

xyD={0,1,-1};

d3List={2t+1,-(2t+1),(2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2-7/2),
 (2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2,-((2t+1)Sqrt[3]I/2+7/2),(2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2,
```

```
 -((2t+1)/2+3Sqrt[3]I/2),(2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2,-((2t+1)/2-3Sqrt[3]I/2),
 5+6Sqrt[3]I,-(5+6Sqrt[3]I),-5+6Sqrt[3]I,-(-5+6Sqrt[3]I),-12,12};
d7List={2t+1,-(2t+1),2t+1-2Sqrt[7]I,-(2t+1-2Sqrt[7]I),11-2Sqrt[7]I,
 -(11-2Sqrt[7]I),11+2Sqrt[7]I,-(11+2Sqrt[7]I)};
dList={2t+1,-(2t+1)};     (*d3List,d7List,dList: Liste der möglichen Werte auf
     der rechten Seite der Thue-Gleichung, geordnet nach den Diskriminanten*)
F[x_,y_]=x^3-(t-1)x^2y-(t+2)x y^2-y^3;      (*linke Seite der Thue-Gleichung*)
For[Discr=1,Discr<=Length[DiscrList],Discr++,
  DD=DiscrList[[Discr]];
  Print[``D='',DD];
  WD=Sqrt[DD];
  bs:=(1+WD I)/2;
```

Dann erzeugt man für jede einzelne Diskriminante D eine gewisse Anzahl von t-Werten der Form $t = -\frac{1}{2} + \frac{ci\sqrt{D}}{2}$, wobei $c \in \mathbb{N}$ ungerade ist, um gewährleisten zu können, dass $t \in \mathbb{Z}_k$ liegt.

```
  For[cc=1,cc<=1000,cc+=2,                          (*Konstruktion einer Liste von*)
   tt:=-1/2+cc Sqrt[DD]/2I;                                  (*möglichen t-Werten*)
   If[tt!=-1/2+3Sqrt[3]/2I,
    If[DD==3,{                                    (*Aufspaltung nach Diskriminanten*)
     For[dl3=1,dl3<=Length[d3List],dl3++,                    (*Lösung der Gleichung
                             -(2t+1)y^3 = ℓ mit ℓ aus einer der obigen Listen*)
```

Nun berechnet man für jeden dieser t-Werte die dritten Wurzeln r aus ℓ. Im Fall $D = 3$ erhält man durch die Multiplikation mit den Einheiten b und $1 - b$ die weiteren Wurzeln.

```
      w=(d3List[[dl3]]/.t->tt)^(1/3);      (*Berechnung der 3. Wurzeln aus ℓ*)
      w11=Simplify[w];                    (*D = 3 : Durch Multiplikation mit den*)
      w12=Simplify[w(-bs)];                          (*Einheiten b und 1 - b erhält*)
      w13=Simplify[w(-1+bs)];                            (*man weitere Lösungen*)
```

Durch Multiplikation der Lösungen $(\hat{x}, \hat{y})$ von (A.7) mit den berechneten Wurzeln ergeben sich die Lösungen der Thue-Gleichung $F_t(x, y) = x^3 - (t-1)x^2y - (t+2)xy^2 - y^3 = \ell$.

```
      For[xx=1,xx<=Length[xyD3],xx++,             (*Multiplikation der Lösungen*)
       For[yy=1,yy<=Length[xyD3],yy++,            (*(x,y) von F(x,y) = μ mit den*)
        xs11=Simplify[xyD3[[xx]]w11];                     (*Wurzeln von ℓ liefert*)
        ax11=2Re[xs11];                       (*die Lösungen (x,y) von F(x,y) = ℓ*)
        bx11=2Im[xs11]/WD;
        ys11=Simplify[xyD3[[yy]]w11];
        ay11=2Re[ys11];
        by11=2Im[ys11]/WD;
```

Das Programm überprüft nun, ob die berechneten Werte x, y tatsächlich Lösungen von $F_t(x, y) = \ell$ sind und ob $x, y \in \mathbb{Z}_k$ gilt. Wenn ja, dann werden x, y, ℓ und t ausgegeben.

```
        f=Simplify[Expand[F[xs11,ys11,tt]]];      (*Überprüfung, ob F(x,y) = ℓ*)
        If[Expand[f]===Expand[d3List[[dl3]]/.t->tt],
         If[IntegerQ[ax11]==True&&IntegerQ[ay11]==True
```

```
&&IntegerQ[bx11]==True&&IntegerQ[by11]==True,
{
Print[‘‘x=’’, xs11];                                   (*Sind x,y aus Z_k,*)
Print[‘‘y=’’, ys11];                        (*so werden x,y,ℓ,t ausgegeben*)
Print[‘‘w=’’, w11];
Print[‘‘l=’’, d3List[[dl3]]];
Print[‘‘t=’’, tt];
Print[‘‘**********’’];}]];
```

Für die beiden anderen Wurzeln `w12,w13` geht man ebenso vor. Die Vorgangsweise für die restlichen Diskriminanten ist analog, allerdings entfällt in diesen Fällen die Multiplikation mit b bzw. $1-b$, da es sich bei diesen Werten für alle Diskriminanten $D \neq 3$ nicht um Einheiten handelt.

$|t| < 6$

Im Fall $|t| < 6$ geht man analog zum Fall $|t| \geq 6$ vor, allerdings verwendet man bei der Erzeugung der möglichen t-Werte zusätzlich noch die Einschränkung $|t| < 6$.

```
alpha=.;alphap=.;alphapp=.;                                      (*α,α^(2),α^(3)*)

tt =.; x =.; WD =.; DD =.; y1 =.; y2 =.; y3 =.; y =.; a1 =.; a2 =.; a3 =.; a  =.;
b1 =.; b2 =.; b3 =.; b =.; wy =.;

DiscrList={3,7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71,79,83,87,91,95,103,107,
 111,115,119,123,127,131};      (*Liste der zu untersuchenden Diskriminanten*)

xyD3={0,1,-1,bs,-bs,1-bs,-1+bs,1-3bs,-1+3bs,2-3bs,-2+3bs,3-6bs,-3+6bs};

xyD7={0,1,-1,bs,-bs,1-bs,-1+bs,1-2bs,-1+2bs};

xyD19={0,1,-1,1+bs,-1-bs,2-bs,-2+bs,1-2bs,-1+2bs};

xyD31={0,1,-1,9+bs,-9-bs,10-bs,-10+bs,1-2bs,-1+2bs};

xyD35={0,1,-1,23+2bs,-23-2bs,25-2bs,-25+2bs,2-4bs,-2+4bs};

xyD={0,1,-1};                    (*Lösungen der Gleichung F(x,y) = μ mit |μ| = 1,
                                            abhängig von D, siehe [1] bzw. [3]*)

d3List={2t+1,-(2t+1),4Sqrt[3]I,-4Sqrt[3]I,Sqrt[3]I,-Sqrt[3]I,
 2+3Sqrt[3]I,2-3Sqrt[3]I,-2+3Sqrt[3]I,-2-3Sqrt[3]I,
 4+3Sqrt[3]I,4-3Sqrt[3]I,-4+3Sqrt[3]I,-4-3Sqrt[3]I,
 -3,3,-4,4,-5,5,-8,8};

d7List={2t+1,-(2t+1),Sqrt[7]I,-Sqrt[7]I,4+Sqrt[7]I,4-Sqrt[7]I,
 -4+Sqrt[7]I,-4-Sqrt[7]I,1+2Sqrt[7]I,1-2Sqrt[7]I,-1+2Sqrt[7]I,
 -1-2Sqrt[7]I,7/2+5/2Sqrt[7]I,7/2-5/2Sqrt[7]I,-7/2+5/2Sqrt[7]I,
 -7/2-5/2Sqrt[7]I,-3,3,-5,5,-7,7};

d11List={2t+1,-(2t+1),2Sqrt[11]I,-2Sqrt[11]I,7+2Sqrt[11]I,
 -(7+2Sqrt[11]I),7-2Sqrt[3]I,-(7-2Sqrt[3]I)};

d15List={2t+1,-(2t+1),3,-3};

d19List={2t+1,-(2t+1),2,-2,3,-3,4,-4};

d23List={2t+1,-(2t+1),3/2+Sqrt[23]I/2,-(3/2+Sqrt[23]I/2),
```

```
 3/2-Sqrt[23]I/2,-(3/2-Sqrt[23]I/2)};
d31List={2t+1,-(2t+1),1/2+Sqrt[31]I/2,-(1/2+Sqrt[31]I/2),
 1/2-Sqrt[31]I/2,-(1/2-Sqrt[31]I/2),3,-3};
d35List={2t+1,-(2t+1),2,-2,4,-4,5,-5};
ddList={2t+1,-(2t+1),t^2+t+7,-(t^2+t+7)};
dList={2t+1,-(2t+1)};        (*d3List,...: Listen der möglichen Werte auf der
         rechten Seite der Thue-Gleichung, geordnet nach den Diskriminanten*)
F[x_,y_,t_]= x^3-(t-1)x^2y-(t+2)x y^2-y^3; (*Thue-Gleichung*)
For[Discr=1,Discr<=Length[DiscrList],Discr++,
  DD=DiscrList[[Discr]];
  Print[``D ='',DD];
  WD=Sqrt[DD];
  bs:=(1+WD I)/2;                              (*Konstruktion von b = 1/2 + i√D/2*)
  For[cc=1,cc<=11,cc+=2,                             (*und t = -1/2 + ci√D/2,*)
   tt:=-1/2+cc Sqrt[DD]I/2];                               (*mit c ungerade*)
   If[Abs[tt]<6&&tt!=-1/2+3ISqrt[3]/2,                        (*Test: |t| < 6*)
    Switch[DD,
     3,
     For[dl3=1,dl3<=Length[d3List],dl3++,
      w=(d3List[[dl3]]/. t -> tt)^(1/3);                (*Berechnung von ∛ℓ*)
      w11=Simplify[w];                         (*aus einer der obigen Listen*)
      w12=Simplify[w(-bs)];                    (*D = 3 : Weitere Wurzeln durch*)
      w13=Simplify[w(-1+bs)];              (*Multiplikation mit den Einheiten*)
      For[xx1=1,xx1<=Length[xyD3],xx1++,
       For[yy1=1,yy1<=Length[xyD3],yy1++,  (*Multiplikation mit den Lösungen*)
        xs11=Simplify[xyD3[[xx1]]w11];              (*(x,y) von F(x,y) = μ mit*)
        ax11=2Re[xs11];                            (*den Wurzeln von ℓ liefert*)
        bx11=2Im[xs11]/WD;                     (*die Lösungen vonF(x,y) = ℓ*)
        ys11=Simplify[xyD3[[yy1]]w11];
        ay11=2Re[ys11];
        by11=2Im[ys11]/WD;
        f=Simplify[Expand[F[xs11,ys11,tt]]];
        If[Expand[f]===Expand[d3List[[dl3]]/.t->tt],        (*Test: F(x,y) = ℓ*)
         If[IntegerQ[ax11]==True&&IntegerQ[ay11]==True&&
          IntegerQ[bx11]==True&&IntegerQ[by11]==True,
          {Print[``x='',xs11]; Print[``y='', ys11];
          Print[``w='',w11]; Print[``l='',d3List[[dl3]]];
          Print[``t='',tt]; Print[``*********'']; }]];
                                (*Sind x,y ∈ Z_k, so werden x,y,ℓ,t ausgegeben*)
```

Die beiden restlichen Wurzeln `w12,w13` werden auf die gleiche Art untersucht.
Die Vorgangsweise für die restlichen Diskriminanten ist analog, eine Multiplikation mit b bzw. $1-b$ ist gleich wie für große t nicht erforderlich.

Literaturverzeichnis

[1] Heuberger, C., Pethő, A., und Tichy, R. F. Thomas' family of Thue equations over imaginary quadratic fields. *J. Symbolic Comput. 34* (2002), 437–449.

[2] Heuberger, C., Pethő, A., and Tichy, R. F. Thomas' family of Thue equations over imaginary quadratic fields II. Erscheint in *Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.*.

[3] Heuberger, C. All solutions to Thomas' family of Thue equations over imaginary quadratic number fields. *J. Symbolic Comput. 41* (2006), 980–998.

[4] Heuberger, C. All solutions to Thomas' family of Thue equations over imaginary quadratic number fields. Online ressources, 2006. Erhältlich unter `http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~cheub/publications/thuerel-hyper-online.html`.

[5] KASH3. Erhältlich unter `http://www.math.tu-berlin.de/~kant/kash.html`.

[6] Kirschenhofer, P., und Thuswaldner, J. Elements of small norm in Shanks' cubic extensions of imaginary quadratic fields. *J. Symbolic Comput. 38* (2004), 1471–1486.

[7] Kirschenhofer, P., Lampl, C., und Thuswaldner, J. On a parameterized family of relative Thue equations. Erscheint in *Public. Math. Debrecen.*

[8] Lemmermeyer, F., und Pethő, A. Simplest cubic fields. *Manuscripta Math. 88*, 1 (1995), 53–58.

[9] Matijasevic, Y. Diofantovost' perechislimykh mnozhestv. *Doklady Akademii Nauk SSSR 191*, 2 (1970), 279–282. Englische Übersetzung: Enumerable sets are Diophantine. *Soviet Mathematics. Doklady, 11*, 2 (1970), 354–358.

[10] Mignotte, M. Verification of a conjecture of E. Thomas. *J. Number Theory 44* (1993), 172–177.

[11] Mignotte, M., Pethő, A., und Lemmermeyer, F. On the family of Thue equations $x^3 - (n-1)x^2y - (n+2)xy^2 - y^3 = k$. *Acta Arith. 76*, 3 (1996), 245–269.

[12] Schmidt, A. L. Farey triangles and Farey quadrangles in the complex plane. *Math. Scand. 21* (1967), 241–295.

[13] Schmidt, A. L. Diophantine approximation of complex numbers. *Acta Math. 134* (1975), 1–85.

[14] Schmidt, A. L. Diophantine approximation in the field $\mathbb{Q}(i(11^{1/2}))$. *J. Number Theory 10* (1978), 151–176.

[15] Schmidt, A. L. Diophantine approximation in the Eisensteinian field. *J. Number Theory 16* (1983), 169–204.

[16] Shanks, D. The simplest cubic fields. *Math. Comp. 28* (1974), 1137–1152.

[17] Siegel, C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., Nr. 1, Ges. Abh., Band 1* (1929) 209–266.

[18] Thomas, E. Complete solutions to a family of cubic Diophantine equations. *J. Number Theory 34* (1990), 235–250.

[19] Thue, A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. Reine Angew. Math. 135* (1909), 284–305.

[20] Werner, A. Elliptische Kurven in der Kryptographie. *Springer-Verlag, Berlin* (2002).

[21] Wiles, A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2) 141*, 3 (1995), 443–551.